

III.1 Steigung eines Funktionsgraphen und Änderungsraten

121/1 (T) bzw. 117/1 (NT)

zeichnerisch: jeweils G_f zeichnen, Sekanten einzeichnen, deren Steigungen mit Steigungsdreiecken ermitteln; rechnerisch: übliche Formel für Steigung verwenden

a) 12 bzw. 6 b) -62 bzw. -42 c) 2 bzw. 2

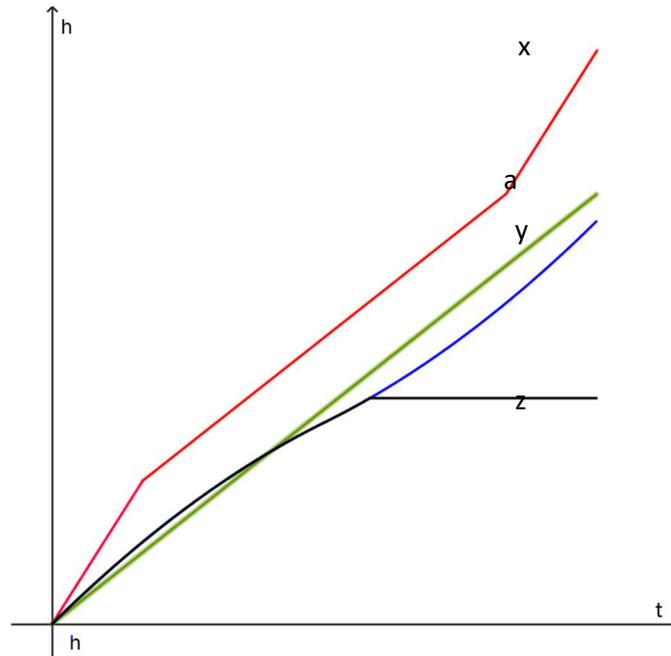
121/2 (T) bzw. 117/2 (NT)

a) 2020 bis 2030

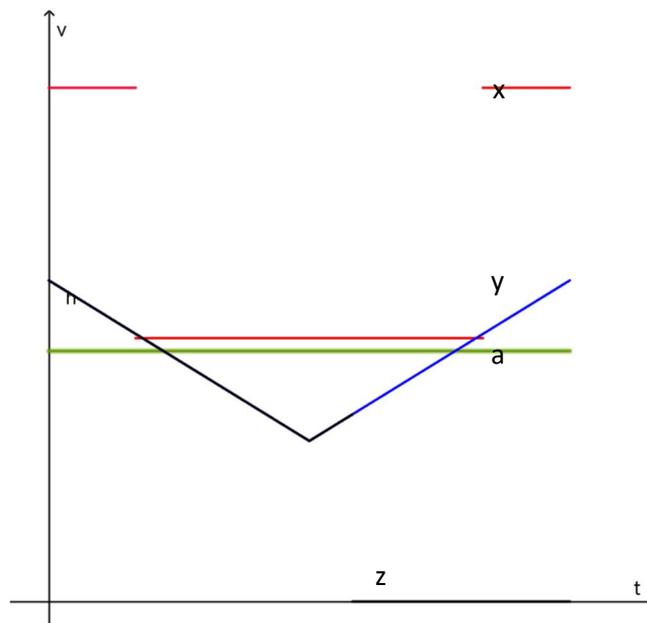
b) D: 0,54% pro Jahr; E: 0,5% pro Jahr; F: 0,3% pro Jahr; P: 0,24% pro Jahr

121/3 (T) bzw. 117/3 (NT)

a)



b)



c) Die Graphen aus (b) geben die Änderungsraten zu den Graphen aus (a) an.

121/4 (T) bzw. 117/4 (NT)

Differenzenquotient = Sekantensteigung = mittlere Steigung in einem Intervall

Differenzialquotient = Grenzwert der Sekantensteigung = Tangentensteigung = momentane / lokale

Steigung an einer Stelle / zu einem Zeitpunkt; die Differenzen in Zähler und Nenner werden „unendlich klein“

Beispiel: $f(x) = x^2$

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 3 = \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ ist ein Differenzenquotient,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2 = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} \text{ ist ein Differenzialquotient}$$

121/5 (T) bzw. 117/5 (NT)

a) 2

b) -2

c) 6

d) -1

121/6 (T) bzw. 117/6 (NT)

a) -1 bzw. 0

III.2 Ableitungsfunktionen und Ableitungsregeln

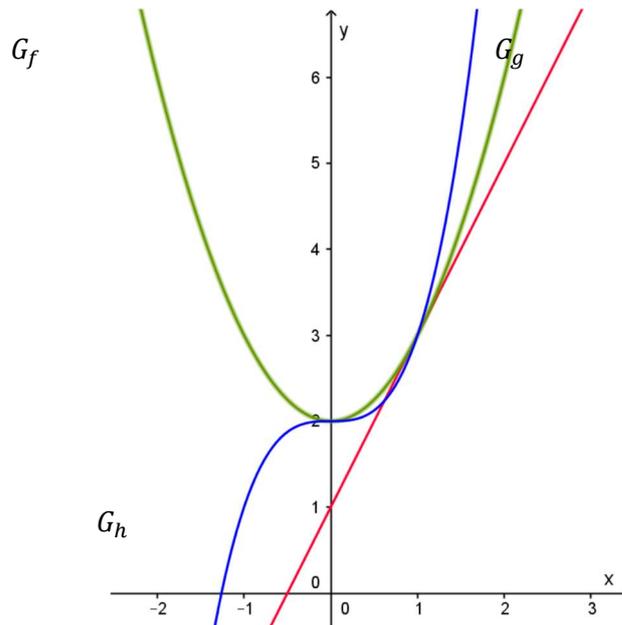
121/6 (T) bzw. 117/6 (NT)

b) $0,5x_0$ bzw. $2x_0 + 4$

c) 2,5 bzw. 14

122/8 (T) bzw. 118/8 (NT)

a)

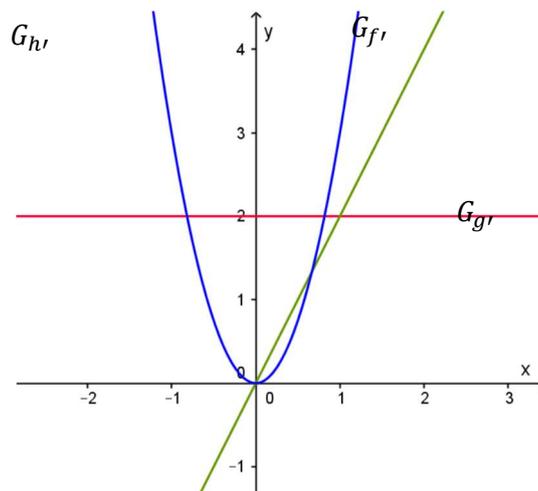


b) keine allgemeine Lösung angebar - machen Sie selbst mal!

(bei $g(x)$ ergibt es allerdings keinen Sinn, Tangenten einzuzeichnen...)

c) $f'(x) = 2x$; $g'(x) = 2$; $h'(x) = 3x^2$

d)

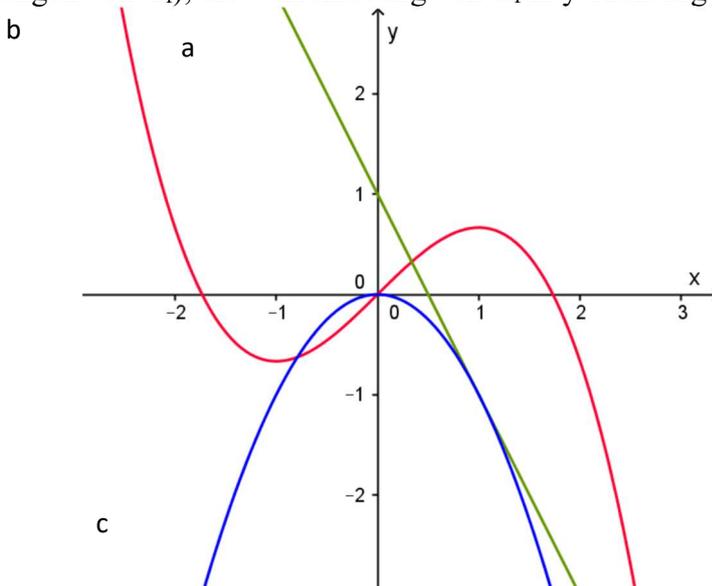


122/9 (T) bzw. 118/9 (NT) **eigentlich eher Stoff Klasse 12**

- a) Graph 2 (G_f hat die konstante Steigung 2, also muss der Wert der Ableitung konstant gleich 2 sein.)
b) Graph 3 (G_f hat erst negative Steigung (bis $x = 0$), dann positive Steigung, also muss die Ableitung erst negativ sein (bis $x = 0$), dann positiv. Alternativ rechnerisch: $f(x) = 0,5x^2 - 2 \implies f'(x) = x$)
c) Graph 1 (G_f hat überall positive Steigung, außer bei $x = 0$ (dort ist G_f waagrecht), also muss die Ableitung überall positiv sein, außer bei $x = 0$ (dort ist die Ableitung gleich 0).)

122/10 (T) bzw. 118/10 (NT) **eigentlich eher Stoff Klasse 12**

Die Art der Ableitungsfunktion (konstant bzw. quadratisch bzw. linear) und Parameter können entnommen werden (alternativ: man kann an verschiedenen Stellen Funktionswerte der Ableitungsfunktion entnehmen und hat dann dort Steigungen von G_f); die Verschiebung von G_f in y-Richtung kann man selbst festlegen.



131/1 (T) bzw. 127/1 (NT)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^3 - 4x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (4x^3 - 4x_0^3) : (x - x_0) \stackrel{PD}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} (4x^2 + 4xx_0 + 4x_0^2) = 12x_0^2$$

bzw.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x_0 + h)^3 - 4x_0^3}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3) - 4x_0^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12x_0^2h + 12x_0h^2 + 4h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12x_0^2 + 12x_0h + 4h^2) = 12x_0^2 \end{aligned}$$

127/1 (T) bzw. 123/1 (NT)

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $f'(x) = 4x$; $m = 2$ | f) $f'(x) = 12,5x^4$; $m = 12,5$ |
| b) $f'(x) = 6x^3$; $m = 384$ | g) $f'(x) = 2,5x^4$; $m = 0,004$ |
| c) $f'(x) = 1,5x^2$; $m = 3,375$ | h) $f'(x) = 9x^2 + 6x$; $m = 3$ |
| d) $f'(x) = 1,5x^2$; $m = 0,375$ | i) $f'(x) = 5$; $m = 5$ |
| e) $f'(x) = 1,5x^2$; $m = 6$ | j) $f'(x) = 0$; $m = 0$ |

127/2 (T) bzw. 123/2 (NT)

- | | |
|--------------------------------|------------------------|
| a) $f^{(5)}(x) = 300$ | c) $f^{(7)}(x) = -560$ |
| b) $f^{(10)}(x) = 1\,451\,520$ | d) $f^{(2)}(x) = 2a$ |

127/3 (T) bzw. 123/3 (NT)

- a) wahr; Beispiel: $f(x) = x^4 \implies f'''(x) = 24x$
b) falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = m x \implies f'(x) = m$
c) falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x$
d) wahr; Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x$ (zwei Exp) $\implies f'(x) = 3x^2 - 3$ (zwei Achsenschnittpunkte)
e) wahr; Beispiel: $f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2$ (waagrechte Tangente bei $x_1 = 0$) $\implies f''(x) = 6x$ (Nullstelle $x_1 = 0$)
f) wahr; Beispiel: $f(x) = x^n \implies f^{(n)}(x) = n!$

127/4 (T) bzw. 123/4 (NT)

Die Steigung der Tangente an den Graph von f an der Stelle $x_0 = 3$ beträgt 4.

127/5 (T) bzw. 123/5 (NT)

eigentlich eher Stoff Klasse 12

f_2, g_3, h_1

127/6 (T) bzw. 123/6 (NT)

$$f(x) = c \implies f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

131/2 (T) bzw. 127/2 (NT)

- a) $f'''(x) = 3$ b) $f'''(x) = -30x^2$ c) $f'''(x) = 18$ d) $f'''(x) = 6 + 120x^2$
e) $f'''(x) = 3$ f) $f'''(x) = -630x^4$ g) $f'''(x) = -12x^{-6}$ h) $f'''(x) = 0$

131/4 (T) bzw. 127/4 (NT)

Wegen der Potenzregel nimmt bei jedem Summanden, also auch beim führenden, der Exponent jeweils um 1 ab \implies Der Grad nimmt um 1 ab.

132/8 (T) bzw. 128/8 (NT)

Stoff 12. Klasse... keine allgemeine Lösung angebar - machen Sie selbst mal!

Übungsblatt (altes Buch aus Bildungsverlag EINS, 229/1):

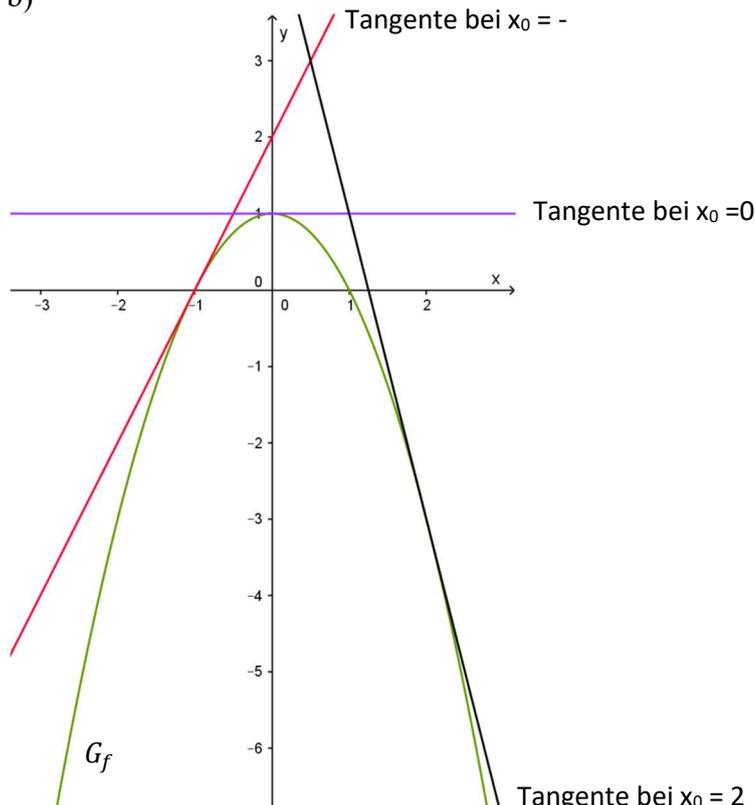
- a) $f'(x) = 6x + 2$ b) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x + 5$
c) $f'(x) = \frac{1}{6}(6x^2 + 2x - 4)$ d) $f'(x) = 4x^5 - 3x^3 + x$
e) $f'(x) = 4x - 2$ f) $f'(x) = 12x - 1$
g) $f'(x) = 9x^2 + 2(a+1)x - 3a^2$ h) $f'(x) = 2,5x^4 + (a-2)x$
i) $f'(x) = 6x^5 + 12a^3x^2 - 2a$ k) $f'(x) = 8ax^3 - 2x$

III.3 Einfache Anwendungen

130/1 (T) bzw. 126/1 (NT)

- a) f: $m = 2$ bzw. 0 bzw. -4 ; $y = 2x + 2$ bzw. $y = 1$ bzw. $y = -4x + 5$
g: $m = -3$ bzw. -1 bzw. 3 ; $y = -3x - 4$ bzw. $y = -x - 3$ bzw. $y = 3x - 7$
h: $m = 4$ bzw. -3 bzw. 1 ; $y = 4x + 6$ bzw. $y = -3x + 2$ bzw. $y = x - 6$
i: $m = -0,5$ bzw. -2 bzw. 4 ; $y = -0,5x + 1$ bzw. $y = -2x$ bzw. $y = 4x - 8$

b)



130/2 (T) bzw. 126/2 (NT)

a) $x_1 = -0,5; x_2 = -0,25; x_3 = 0; x_4 = 0,5; x_5 = 1$

b) $x_1 = -4; x_2 = -3,5; x_3 = -3; x_4 = -2; x_5 = -1$

c) $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}; x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; x_5 = 0; -; -$

d) $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}; x_2 = \pm 1; x_3 = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}; x_4 = \pm \sqrt{2}; x_5 = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$

e) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}; x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{6}; x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{3}; -; -$

130/3 (T)

a) 10 m/s^2

b) 100 m/s

c) 20 m/s

126/3 (NT)

a) $6; 3; 3,75; 15; 34,6875$

b) ??? Ich bin Physiker, kein Ökonom!

126/4 (NT)

a) Die Grenzkosten sind für alle Produktionsmengen gleich, nämlich 5.

b) keine

126/5 (NT)

a) $10,25$ bzw. 0

b) ??? Ich bin Physiker, kein Ökonom!

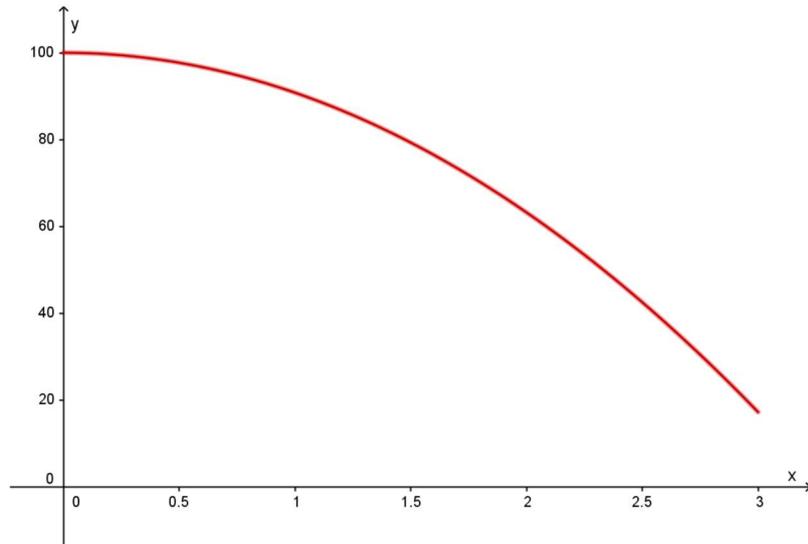
131/3 (T) bzw. 127/3 (NT)

$t_1: W; t_2: V; t_3: P; t_4: R; t_5: T; t_6: S; t_7: Q; t_8: U$

131/5 (T) bzw. 127/5 (NT)

Zeitvariable wird hier mit x bezeichnet!?!

a)



b) 100 m

c) $(-99,36 \text{ km/h})$, d. h. im Schnitt war das Fahrzeug unter der Höchstgeschwindigkeit

d) $(-66,24 \text{ km/h})$ bzw. $(-132,48 \text{ km/h})$

e) $v(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-9,2(x_0+h)^2+100)-(-9,2x_0^2+100)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-18,4x_0h-9,2h^2}{h} = -18,4x_0$

f) unklar, was hier gemeint ist... soll man vielleicht eine Gerade mit Steigung (-100 km/h) einzeichnen und dann schauen, ob der Graph von f steiler verläuft?

g) 0 km/h (d. h. also, das Fahrzeug beschleunigt aus dem Stand in 3 Sekunden (!) von 0 auf knapp 200 km/h , und das auch noch auf die Radarfalle zu (!!!) ... wer denkt sich solche bescheuerten Aufgaben aus?!)

131/6 (T) bzw. 127/6 (NT)

a) $25 \text{ m}; 40 \text{ m}; 25 \text{ m}$

b) $20 \text{ m/s}; 10 \text{ m/s}; -20 \text{ m/s}$

c) $\pm 15 \text{ m/s}; 1,5 \text{ s}$ und $4,5 \text{ s}$

d) $6 \text{ s}; -30 \text{ m/s}$

e) $0 \text{ m/s}; 45 \text{ m}$

132/7 (T) bzw. 128/7 (NT)

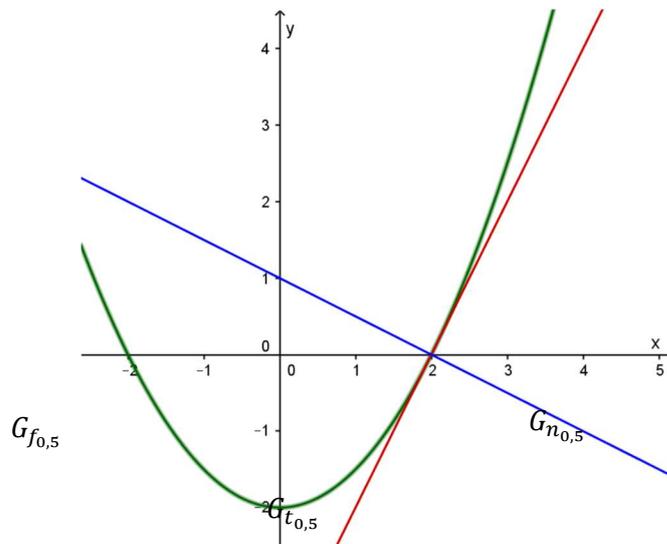
- a) 12,2%; (-)2,925%; 6,875%; (-)17,8%; 1,2%
b) 10,8%; (-)4,2%; 10,8%; (-)16,2%
c) $x_2 = 8$
d) $x_1 = 2$; $x_2 = 5$; $x_3 = 10$; Höhen: 244 m; 156,25 m; 500 m

132/10 (T) bzw. 128/10 (NT)

- a) (-)10 ℓ pro 100 km
b) (-) 6, $\bar{6}$ ℓ pro 100 km
c) Der Benzinverbrauch war zwischen 50 km und 150 km deutlich höher als vorher. Herr Söst ist auf dieser Strecke anscheinend deutlich schneller gefahren, und/oder die Strecke war bergiger.

166/8 (nur T) a) $t_a(x) = 4ax - 8a$ b) $n_a(x) = -\frac{1}{4a}x + \frac{1}{2a}$

c)



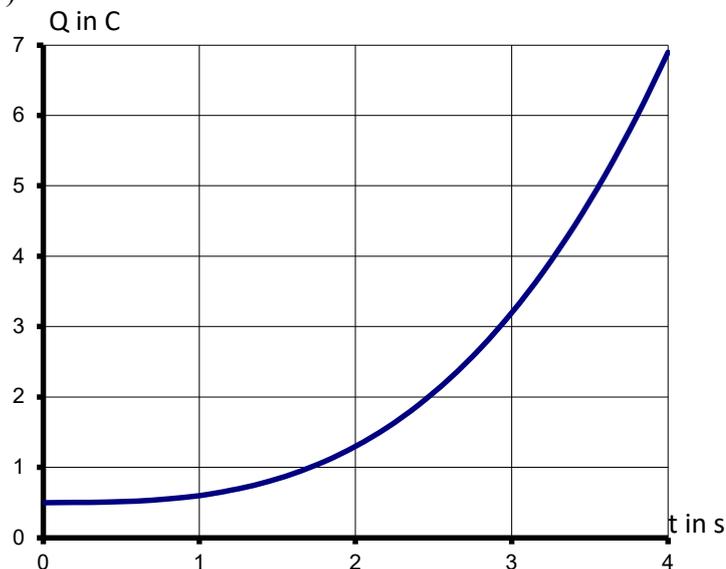
altes Buch (Bildungsverlag EINS):

241/1

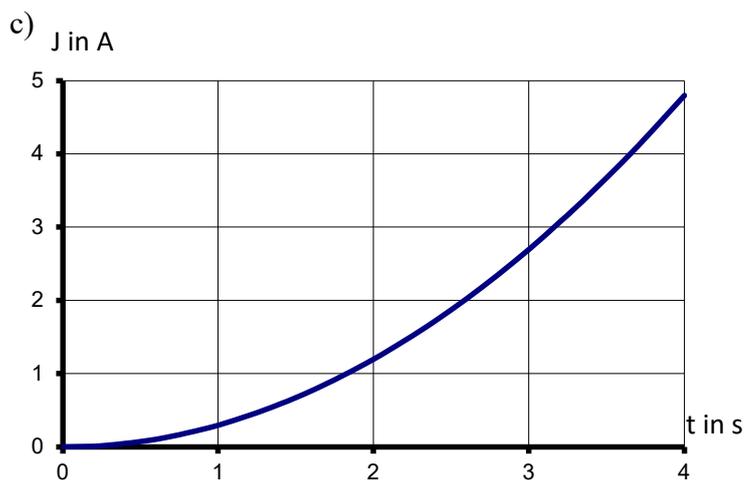
- a) $v(t) = 2 \frac{m}{s}$; $a(t) = 0$ b) $v(t) = 10 \frac{m}{s^2} \cdot t + 10 \frac{m}{s}$; $a(t) = 10 \frac{m}{s^2}$ c) $v(t) = v_0 - 9 \frac{m}{s^2} \cdot t$; $a(t) = -9 \frac{m}{s^2}$

243/11

a)



b) $J(t) = 0,3t^2$



altes NT-Buch Klasse 12 (winklers-Verlag):

29/1 a) $P_{1,2}(\pm\sqrt{3} \mid \mp\sqrt{3})$ b) $P_1(0|1); P_2(2|0)$ c) $P_1(-3|4); P_2\left(-\frac{1}{3} \mid -5\frac{13}{27}\right)$ d) $P_1(0|0); P_2(4|0); P_3(2|16)$

30/2 a) $P_1\left(1 \mid \frac{4}{3}\right); P_2\left(-1 \mid -\frac{10}{3}\right)$ b) $P(-2|-2)$ 30/3 a) $P(1,5|1)$ b) $P(3|5)$

III.4 Differenzierbarkeit

121/7 (T) bzw. 117/7 (NT)

f ist bei $x = 1$ nicht differenzierbar, weil die Steigung „von links“ gleich 2 ist, „von rechts“ aber gleich 1, es gibt also keine eindeutige (Tangenten-)Steigung. Anschaulich: Dort ist ein Knick im Graph.