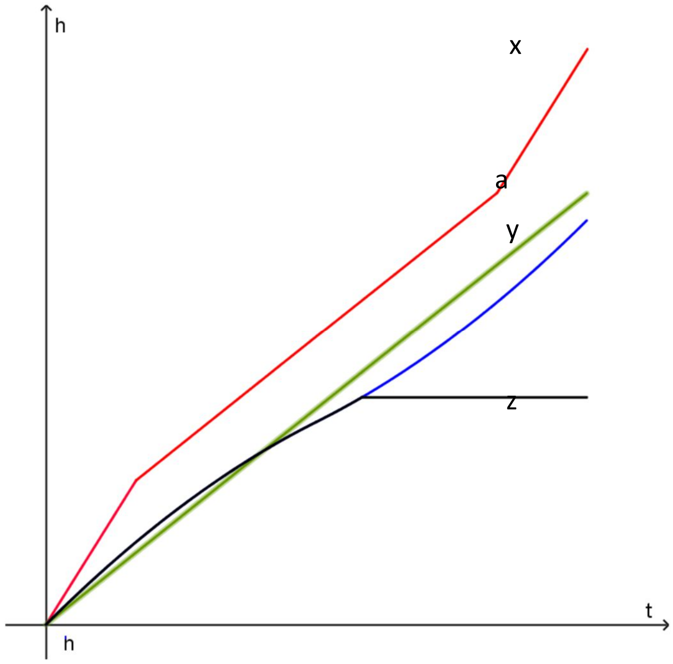
<u>III.1 Steigung eines Funktionsgraphen und Änderungsraten</u>

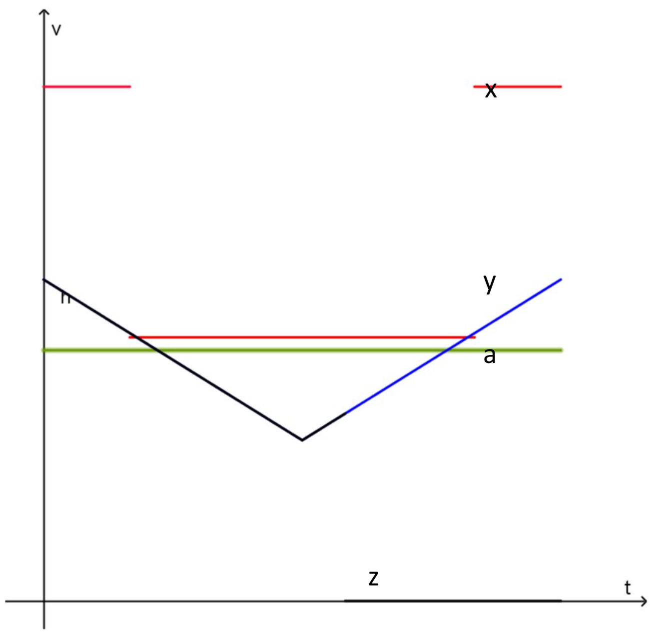
<u>121/1</u> (T) bzw. <u>117/1</u> (NT)
zeichnerisch: jeweils G_f zeichnen, Sekanten einzeichnen, deren Steigungen mit Steigungsdreiecken ermitteln; rechnerisch: übliche Formel für Steigung verwenden
a) 12 bzw. 6 b) –62 bzw. –42 c) 2 bzw. 2

<u>121/2</u> (T) bzw. <u>117/2</u> (NT)
a) 2020 bis 2030
b) D: 0,54% pro Jahr; E: 0,5% pro Jahr; F: 0,3% pro Jahr; P: 0,24% pro Jahr

<u>121/3</u> (T) bzw. <u>117/3</u> (NT)
a)



b)



c) Die Graphen aus (b) geben die Änderungsraten zu den Graphen aus (a) an.

121/4 (T) bzw. 117/4 (NT)
Differenzenquotient = Sekantensteigung = mittlere Steigung in einem Intervall
Differenzialquotient = Grenzwert der Sekantensteigung = Tangentensteigung = momentane / lokale Steigung an einer Stelle / zu einem Zeitpunkt; die Differenzen in Zähler und Nenner werden „unendlich klein"
Beispiel: f(x) = x^2
$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 3 = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ist ein Differenzenquotient,
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2 = \frac{df}{dx}\Big|_{x=1}$ ist ein Differenzialquotient

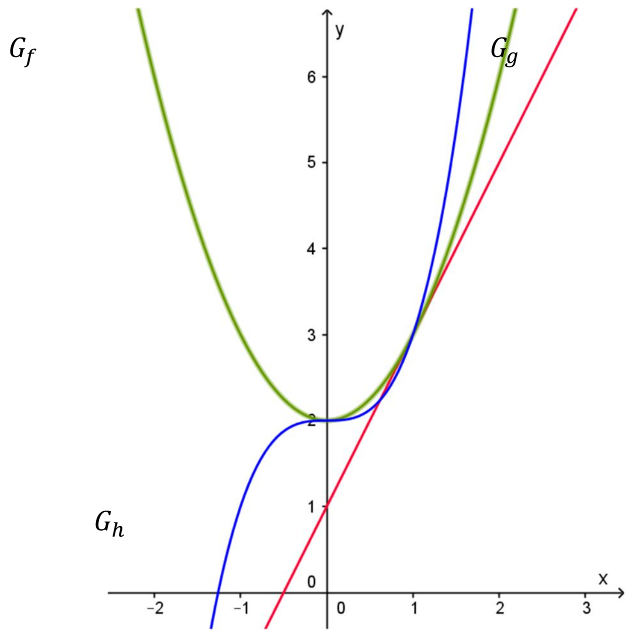
121/5 (T) bzw. 117/5 (NT) a) 2 b) −2 c) 6 d) −1

121/6 (T) bzw. 117/6 (NT) a) −1 bzw. 0

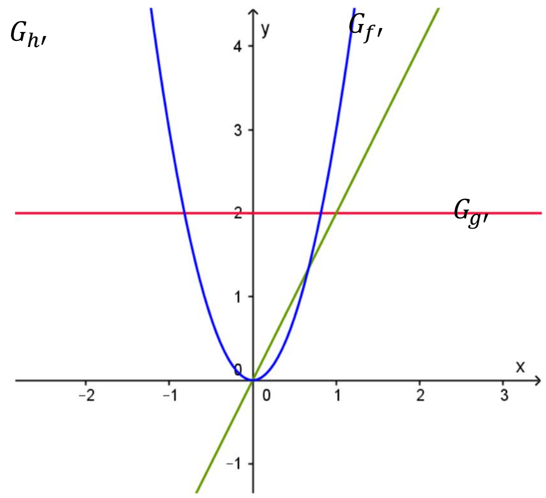
III.2 Ableitungsfunktionen und Ableitungsregeln

121/6 (T) bzw. 117/6 (NT) b) $0{,}5x_0$ bzw. $2x_0 + 4$ c) 2,5 bzw. 14

122/8 (T) bzw. 118/8 (NT)
a)



b) keine allgemeine Lösung angebbar - machen Sie selbst mal!
(bei g(x) ergibt es allerdings keinen Sinn, Tangenten einzuzeichnen...)
c) f '(x) = 2x; g'(x) = 2; h'(x) = $3x^2$
d)



122/9 (T) bzw. 118/9 (NT) ***eigentlich eher Stoff Klasse 12***

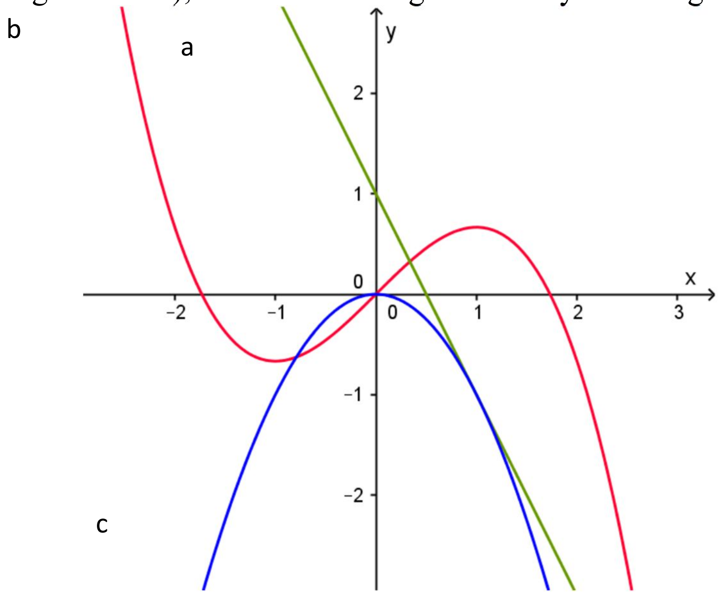
a) Graph 2 (G_f hat die konstante Steigung 2, also muss der Wert der Ableitung konstant gleich 2 sein.)

b) Graph 3 (G_f hat erst negative Steigung (bis x = 0), dann positive Steigung, also muss die Ableitung erst negativ sein (bis x = 0), dann positiv. Alternativ rechnerisch: $f(x) = 0{,}5x^2 - 2 \Longrightarrow f'(x) = x$)

c) Graph 1 (G_f hat überall positive Steigung, außer bei x = 0 (dort ist G_f waagrecht), also muss die Ableitung überall positiv sein, außer bei x = 0 (dort ist die Ableitung gleich 0).)

122/10 (T) bzw. 118/10 (NT) ***eigentlich eher Stoff Klasse 12***

Die Art der Ableitungsfunktion (konstant bzw. quadratisch bzw. linear) und Parameter können entnommen werden (alternativ: man kann an verschiedenen Stellen Funktionswerte der Ableitungsfunktion entnehmen und hat dann dort Steigungen von G_f); die Verschiebung von G_f in y-Richtung kann man selbst festlegen.



131/1 (T) bzw. 127/1 (NT)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{4x^3-4x_0^3}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(4x^3-4x_0^3):(x-x_0)\underset{PD}{=}\lim_{x\to x_0}(4x^2+4xx_0+4x_0^2)=12x_0^2$$

bzw.

$$\lim_{h\to 0}\frac{4(x_0+h)^3-4x_0^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4(x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3)-4x_0^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{12x_0^2h+12x_0h^2+4h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(12x_0^2+12x_0h+4h^2)=12x_0^2$$

127/1 (T) bzw. 123/1 (NT)

a) $f'(x) = 4x$; m = 2
b) $f'(x) = 6x^3$; m = 384
c) $f'(x) = 1{,}5x^2$; m = 3,375
d) $f'(x) = 1{,}5x^2$; m = 0,375
e) $f'(x) = 1{,}5x^2$; m = 6
f) $f'(x) = 12{,}5x^4$; m = 12,5
g) $f'(x) = 2{,}5x^4$; m = 0,004
h) $f'(x) = 9x^2 + 6x$; m = 3
i) $f'(x) = 5$; m = 5
j) $f'(x) = 0$; m = 0

127/2 (T) bzw. 123/2 (NT)

a) $f^{(5)}(x) = 300$
b) $f^{(10)}(x) = 1\,451\,520$
c) $f^{(7)}(x) = -560$
d) $f^{(2)}(x) = 2a$

127/3 (T) bzw. 123/3 (NT)

a) wahr; Beispiel: $f(x) = x^4 \Longrightarrow f'''(x) = 24x$
b) falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = m\,x \Longrightarrow f'(x) = m$
c) falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$
d) wahr; Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x$ (zwei ExP) $\Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$ (zwei Achsenschnittpunkte)
e) wahr; Beispiel: $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$ (waagrechte Tangente bei $x_1 = 0$) $\Longrightarrow f''(x) = 6x$ (Nullstelle $x_1 = 0$)
f) wahr; Beispiel: $f(x) = x^n \Longrightarrow f^{(n)}(x) = n!$

127/4 (T) bzw. 123/4 (NT)
Die Steigung der Tangente an den Graph von f an der Stelle $x_0 = 3$ beträgt 4.

127/5 (T) bzw. 123/5 (NT) ***eigentlich eher Stoff Klasse 12*** f2, g3, h1

127/6 (T) bzw. 123/6 (NT) $f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$

131/2 (T) bzw. 127/2 (NT)
a) $f'''(x) = 3$ b) $f'''(x) = -30x^2$ c) $f'''(x) = 18$ d) $f'''(x) = 6 + 120x^2$
e) $f'''(x) = 3$ f) $f'''(x) = -630x^4$ g) $f'''(x) = -12x^{-6}$ h) $f'''(x) = 0$

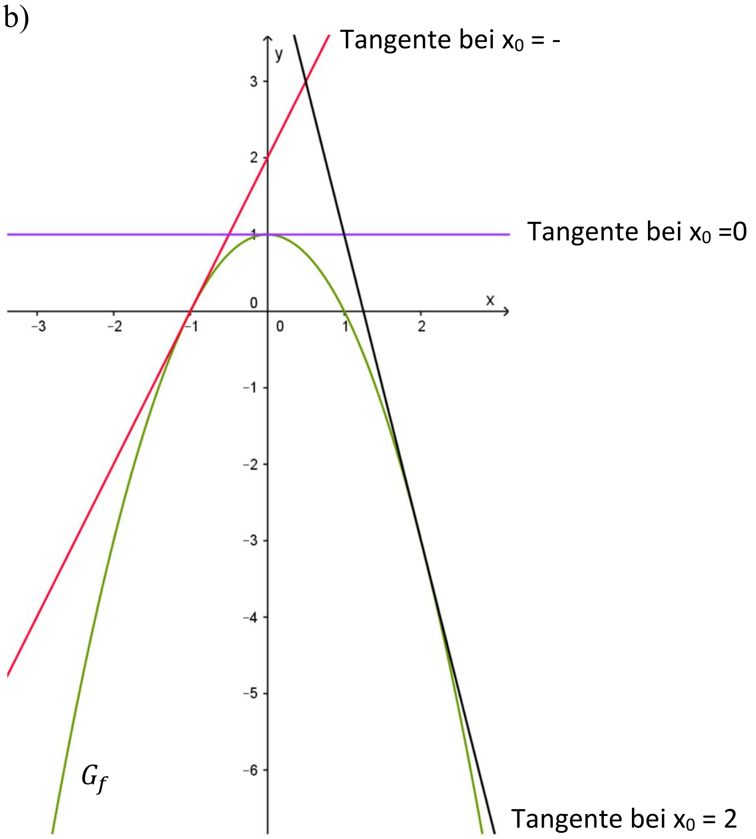
131/4 (T) bzw. 127/4 (NT)
Wegen der Potenzregel nimmt bei jedem Summanden, also auch beim führenden, der Exponent jeweils um 1 ab ==> Der Grad nimmt um 1 ab.

132/8 (T) bzw. 128/8 (NT) ***Stoff 12. Klasse...***keine allgemeine Lösung angebbar - machen Sie selbst mal!

Übungsblatt (altes Buch aus Bildungsverlag EINS, 229/1):
a) $f'(x) = 6x + 2$; $f''(x) = 6$ b) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x + 5$; $f''(x) = 12x^2 - 12x + 6$
c) $f'(x) = \frac{1}{6}(6x^2 + 2x - 4)$; $f''(x) = \frac{1}{6}(12x + 2)$ d) $f'(x) = 4x^5 - 3x^3 + x$; $f''(x) = 20x^4 - 9x^2 + 1$
e) $f'(x) = 4x - 2$; $f''(x) = 4$ f) $f'(x) = 12x - 1$; $f''(x) = 12$
g) $f'(x) = 9x^2 + 2(a+1)x - 3a^2$; $f''(x) = 18x + 2(a+1)$ h) $f'(x) = 2{,}5x^4 + (a-2)x$; $f''(x) = 10x^3 + a - 2$
i) $f'(x) = 6x^5 + 12a^3x^2 - 2a$; $f''(x) = 30x^4 + 24a^3x$ k) $f'(x) = 8ax^3 - 2x$; $f''(x) = 24ax^2 - 2$

III.3 Einfache Anwendungen

130/1 (T) bzw. 126/1 (NT)
a) f: $m = 2$ bzw. 0 bzw. -4; $y = 2x + 2$ bzw. $y = 1$ bzw. $y = -4x + 5$
g: $m = -3$ bzw. -1 bzw. 3; $y = -3x - 4$ bzw. $y = -x - 3$ bzw. $y = 3x - 7$
h: $m = 4$ bzw. -3 bzw. 1; $y = 4x + 6$ bzw. $y = -3x + 2$ bzw. $y = x - 6$
i: $m = -0{,}5$ bzw. -2 bzw. 4; $y = -0{,}5x + 1$ bzw. $y = -2x$ bzw. $y = 4x - 8$
b)



130/2 (T) bzw. 126/2 (NT)
a) $x_1 = -0{,}5;\ x_2 = -0{,}25; x_3 = 0;\ x_4 = 0{,}5;\ x_5 = 1$
b) $x_1 = -4;\ x_2 = -3{,}5; x_3 = -3;\ x_4 = -2;\ x_5 = -1$
c) $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3};\ x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}; x_5 = 0;\ -;\ -$
d) $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3};\ x_2 = \pm 1; x_3 = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3};\ x_4 = \pm\sqrt{2};\ x_5 = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$
e) $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{6};\ x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{7}}{6}; x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{3};\ -;\ -$

130/3 (T) a) 10 m/s^2 b) 100 m/s c) 20 m/s

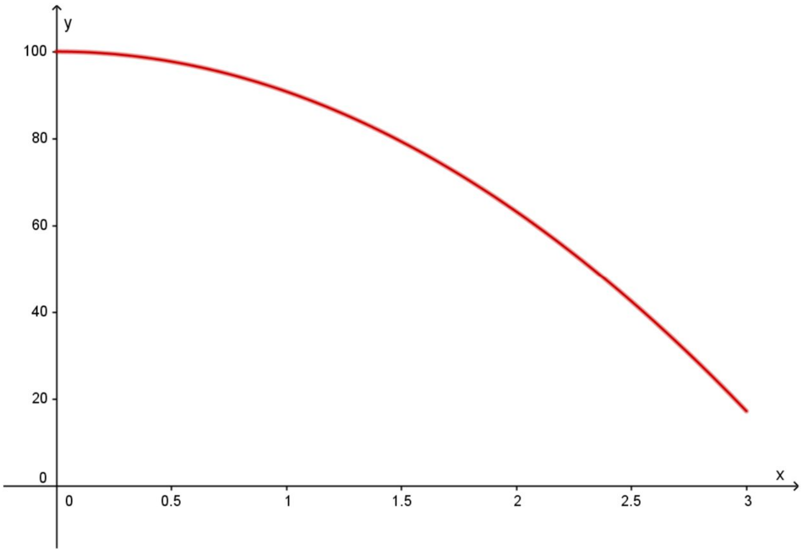
126/3 (NT)
a) 6; 3; 3,75; 15; 34,6875 b) ??? Ich bin Physiker, kein Ökonom!

126/4 (NT)
a) Die Grenzkosten sind für alle Produktionsmengen gleich, nämlich 5. b) keine

126/5 (NT)
a) 10,25 bzw. 0 b) ??? Ich bin Physiker, kein Ökonom!

131/3 (T) bzw. 127/3 (NT)
t_1: W; t_2: V; t_3: P; t_4: R; t_5: T; t_6: S; t_7: Q; t_8: U

131/5 (T) bzw. 127/5 (NT) ***Zeitvariable wird hier mit x bezeichnet!?!***
a)



b) 100 m
c) (–)99,36 km/h, d. h. im Schnitt war das Fahrzeug unter der Höchstgeschwindigkeit
d) (–)66,24 km/h bzw. (–)132,48 km/h
e) $v(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(-9{,}2(x_0+h)^2+100)-(-9{,}2{x_0}^2+100)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-18{,}4x_0h-9{,}2h^2}{h} = -18{,}4x_0$
f) unklar, was hier gemeint ist... soll man vielleicht eine Gerade mit Steigung (–)100 km/h einzeichnen und dann schauen, ob der Graph von f steiler verläuft?
g) 0 km/h (d. h. also, das Fahrzeug beschleunigt aus dem Stand in 3 Sekunden (!) von 0 auf knapp 200 km/h, und das auch noch auf die Radarfalle zu (!!!) ... wer denkt sich solche bescheuerten Aufgaben aus?!)

131/6 (T) bzw. 127/6 (NT)
a) 25 m; 40 m; 25 m b) 20 m/s; 10 m/s; –20 m/s
c) $\pm$15 m/s; 1,5 s und 4,5 s d) 6 s; –30 m/s e) 0 m/s; 45 m

132/7 (T) bzw. 128/7 (NT)

a) 12,2%; (–)2,925%; 6,875%; (–)17,8%; 1,2%

b) 10,8%; (–)4,2%; 10,8%; (–)16,2%

c) $x_2 = 8$

d) $x_1 = 2$; $x_2 = 5$; $x_3 = 10$; Höhen: 244 m; 156,25 m; 500 m

132/10 (T) bzw. 128/10 (NT)

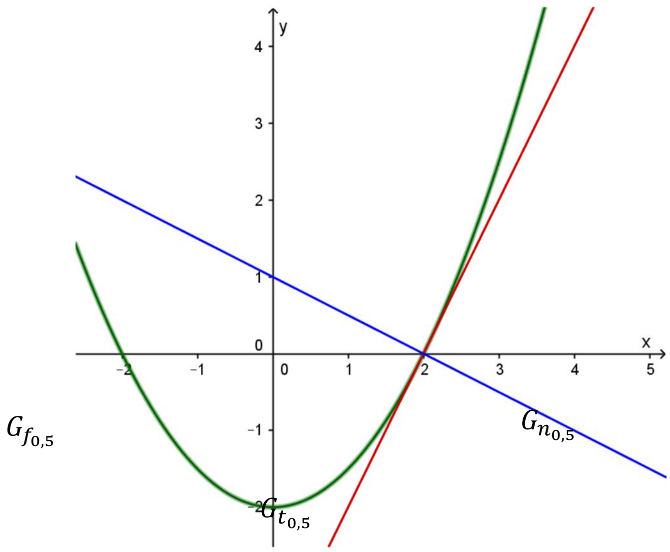
a) (–)10 ℓ pro 100 km

b) (–) $6,\overline{6}\ \ell$ pro 100 km

c) Der Benzinverbrauch war zwischen 50 km und 150 km deutlich höher als vorher. Herr Söst ist auf dieser Strecke anscheinend deutlich schneller gefahren, und/oder die Strecke war bergiger.

166/8 (nur T) a) $t_a(x) = 4ax - 8a$ b) $n_a(x) = -\frac{1}{4a}x + \frac{1}{2a}$

c)



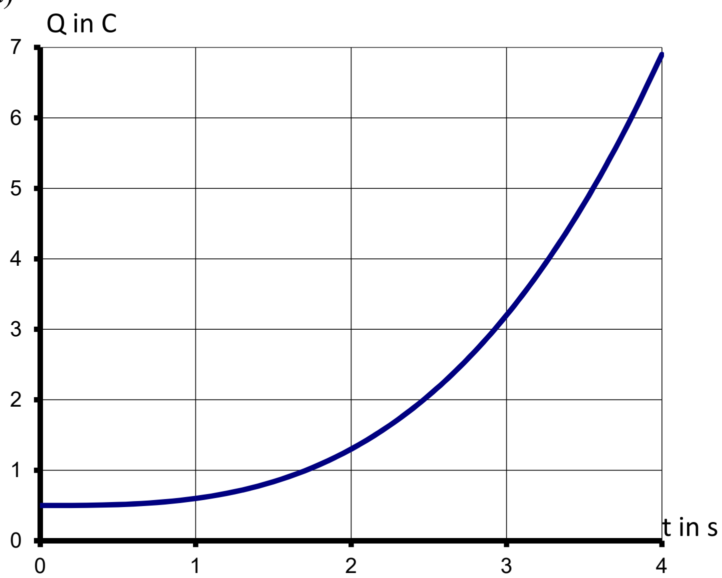
altes Buch (Bildungsverlag EINS):

241/1

a) $v(t) = 2\,\frac{m}{s}$; $a(t) = 0$ b) $v(t) = 10\,\frac{m}{s^2}\cdot t + 10\,\frac{m}{s}$; $a(t) = 10\,\frac{m}{s^2}$ c) $v(t) = v_0 - 9\,\frac{m}{s^2}\cdot t$; $a(t) = -9\,\frac{m}{s^2}$

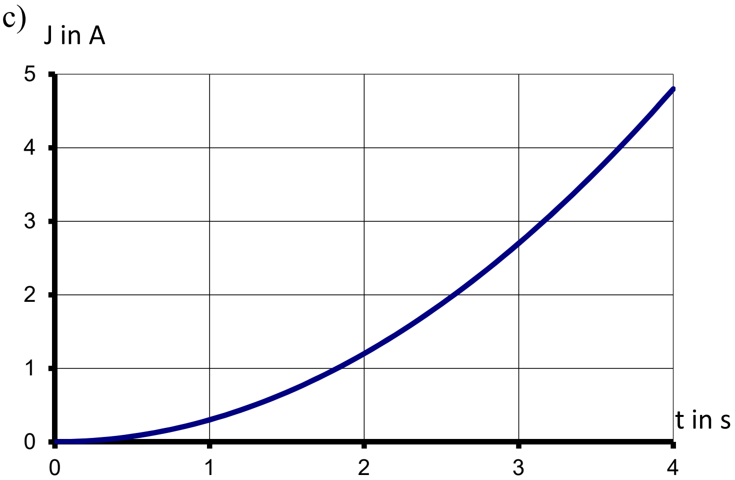
243/11

a)



b) $J(t) = 0{,}3t^2$

c)



altes NT-Buch Klasse 12 (winklers-Verlag):

29/1 a) $P_{1,2}\left(\pm\sqrt{3}\mid\mp\sqrt{3}\right)$ b) $P_1(0|1)$; $P_2(2|0)$ c) $P_1(-3|4)$; $P_2\left(-\frac{1}{3}\middle|-5\frac{13}{27}\right)$ d) $P_1(0|0)$; $P_2(4|0)$; $P_3(2|16)$

30/2 a) $P_1\left(1\middle|\frac{4}{3}\right)$; $P_2\left(-1\middle|-\frac{10}{3}\right)$ b) $P(-2|-2)$

30/3 a) $P(1{,}5|1)$ b) $P(3|5)$

III.4 Differenzierbarkeit

121/7 (T) bzw. 117/7 (NT)
f ist bei x = 1 nicht differenzierbar, weil die Steigung „von links" gleich 2 ist, „von rechts" aber gleich 1, es gibt also keine eindeutige (Tangenten-)Steigung. Anschaulich: Dort ist ein Knick im Graph.