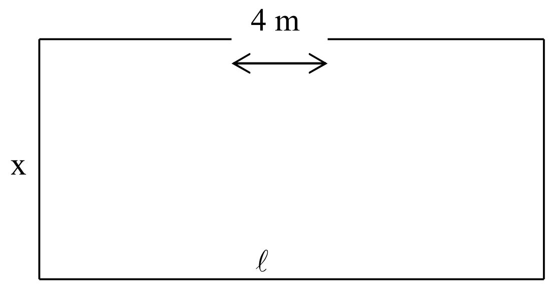
Extremwertaufgaben mit quadratischen Funktionen

aus alter Schulaufgabe:

1.0 Auf einer Wiese soll mit einem 60 m langen Zaun eine rechteckige Fläche eingezäunt werden; dabei sollen 4 m als Einfahrt frei bleiben:



Die Funktion A ordnet jeder möglichen Seitenlänge x den Inhalt der Fläche zu; Einheiten können dabei ignoriert werden.

1.1 Ermitteln Sie einen Funktionsterm von A (mögliches Ergebnis: $A(x) = -x^2 + 32x$) und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge an.

1.2 Ermitteln Sie rechnerisch, für welchen Wert von x der Inhalt der eingezäunten Fläche am größten ist, und geben Sie diesen größten Flächeninhalt an.

1.3 Ermitteln Sie, für welche Werte von x der Inhalt der eingezäunten Fläche größer als 220 (m^2) ist.

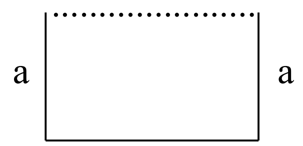
aus Prüfungen: *(geordnet in etwa nach zunehmender Schwierigkeit)*

1999-AI:

2 Die Zahl $\sqrt{10}$ ist so in zwei reelle positive Summanden zu zerlegen, dass die Summe der Quadrate dieser Summanden einen absoluten Extremwert annimmt. Berechnen Sie die beiden Summanden und entscheiden Sie, welche Art von absolutem Extremum vorliegt.

2001-AI:

2.0 Im Geometrie-Unterricht der 5.Klasse findet ein „Wettbewerb“ statt. Jedes der Kinder erhält ein Stück Draht der Länge 15 cm. Durch rechtwinkliges Aufbiegen je eines Stückes der Länge a an beiden Enden soll daraus ein U-förmiges Gebilde entstehen. Denkt man sich nun die beiden Drahtenden durch eine unsichtbare Linie verbunden, so erhält man ein Rechteck (siehe Skizze). Sieger des Wettbewerbs ist dasjenige Kind, dessen Rechteck den größten Flächeninhalt hat.



2.1 Stellen Sie die Maßzahl A(a) der Rechtecksfläche in Abhängigkeit von a dar; bestimmen Sie die Definitionsmenge D_A der Funktion A sinnvoll.

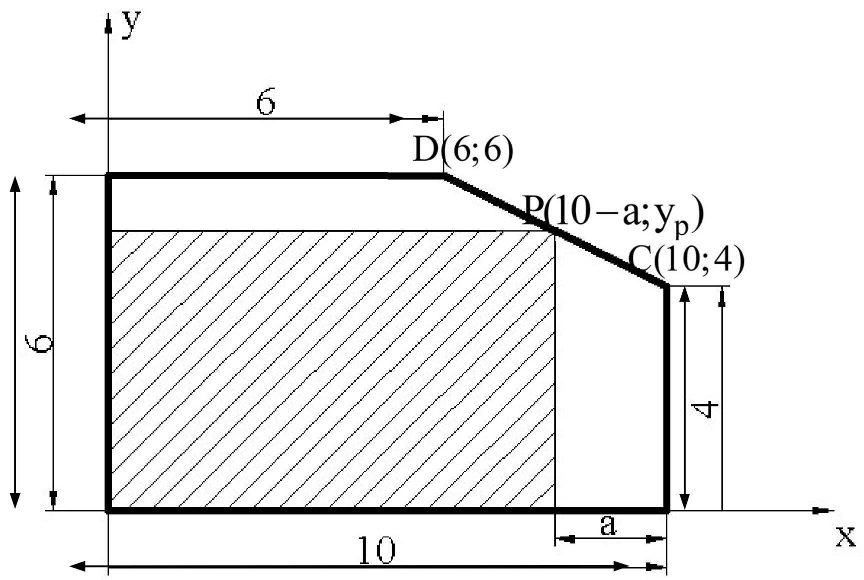
(Teilergebnis: $A(a) = 15a - 2a^2$) (4 BE)

2004-AI:

2.0 Aus einem fünfeckigen Brett soll ein rechteckiges Stück herausgesägt werden (siehe Skizze unten). Dabei soll der Punkt P auf der Strecke [CD] liegen.

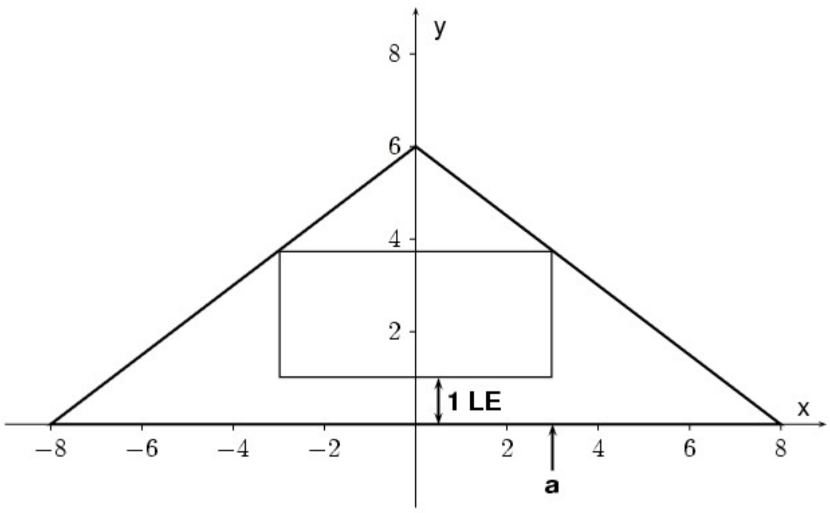
2.1 Stellen Sie die Flächenmaßzahl A(a) des Rechtecks in Abhängigkeit von der Streckenlänge a dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion A an.

(Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 2a - 80)$) (6 BE)



2007-AII:

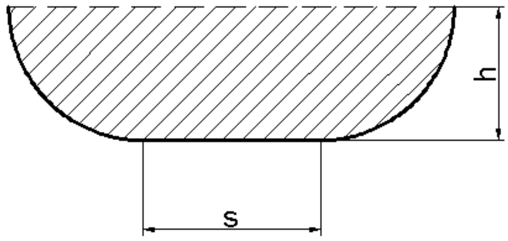
4.0 In einen dreieckigen Dachgiebel soll symmetrisch zur Mittelachse (y-Achse) ein rechteckiges Fenster eingebaut werden. Das Fenster soll auf einem Sims der Höhe 1 LE aufsitzen (siehe Skizze):



4.1 Stellen Sie den Flächeninhalt A(a) des Fensters in Abhängigkeit von a (siehe Skizze) dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge der Funktion A an. [Mögliches Teilergebnis: $A(a) = 10a - 1{,}5a^2$] (7 BE)

2005-AI:

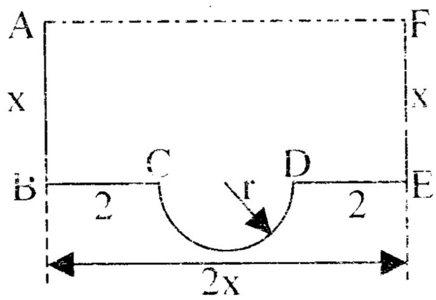
4.0 Der Querschnitt des abgebildeten, oben offenen Kanals ist begrenzt durch zwei Viertelkreisbögen und durch eine Strecke der Länge $s \geq 0$. Die Höhe des Kanals ist h.



4.1 Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche A(h) in Abhängigkeit von der Höhe h, wenn der „Umfang" (2 Viertelkreisbögen und Strecke s) 5 LE beträgt.
Ermitteln Sie die größtmögliche geometrisch sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $A: h \mapsto A(h)$.
[Mögliches Teilergebnis: $A(h) = 5h - \frac{1}{2}h^2\pi$] (7 BE)

2014-AI:

4.0 Der Querschnitt eines Abflusskanals ist begrenzt durch ein Rechteck und einen Halbkreis mit Radius r. Alle Angaben sind in Meter. Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet.



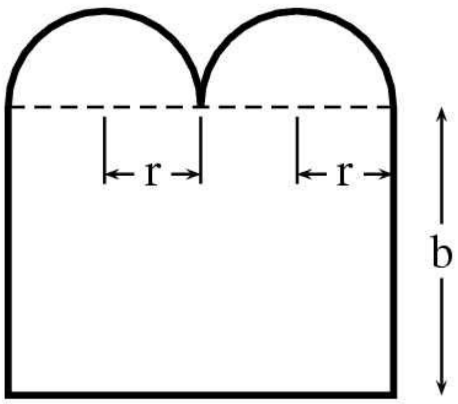
4.1 Zeigen Sie, dass sich die Maßzahl A(x) der Querschnittsfläche des Kanals in Abhängigkeit von x durch $A(x) = (2 + 0{,}5\pi)x^2 - 2\pi x + 2\pi$ darstellen lässt. (5 BE)

4.2 Die Strecken [AB], [BC], [DE] und [EF] besitzen in der Summe höchstens eine Länge von 12 m. Weisen Sie nach, dass dann für die sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A der Funktion $A: x \mapsto A(x)$ gilt: $D_A =]2; 4]$. (3 BE)

4.4 Nun sei x = 4. Der Kanal ist bis 1 m unter der Oberkante gefüllt. Berechnen Sie, wie viel Prozent der Querschnittsfläche des Kanals ausgelastet sind. (3 BE)

2008-AII:

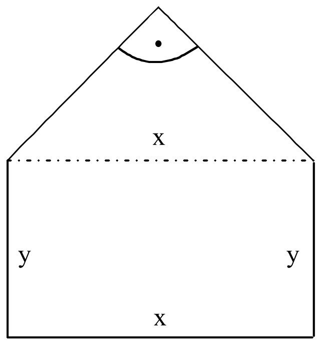
4.0 Ein Doppelrundbogenfenster (siehe Zeichnung) wird von drei Seiten eines Rechtecks sowie von zwei Halbkreisen (jeweils Radius r) begrenzt.
Der Umfang des Fensters beträgt 10 m. (Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet!)



4.1 Stellen Sie den Flächeninhalt A(r) des Fensters in Abhängigkeit vom Radius r der Halbkreise dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A an. (7 BE)
[Teilergebnis: $A(r) = 20r - (3\pi + 8) \cdot r^2$]

Nachtermin 2000:

2.0

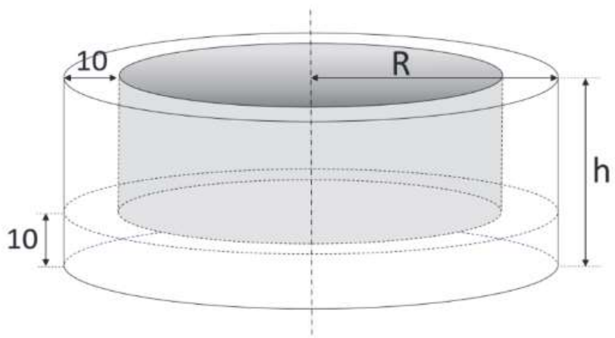


Herr K. plant den Einbau eines Dachfensters. Dieses soll die Form eines Rechtecks mit darübergesetztem gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck haben (siehe Skizze!). Der Umfang U des gesamten Fensters beträgt 6 m.

2.1 Stellen Sie zunächst die Maßzahl G(x) der Gesamtfläche des Fensters in Abhängigkeit von der Rechtecksbreite x dar. Ermitteln Sie auch die Definitionsmenge D_G der Funktion G: $x \mapsto G(x)$.
(Ergebnisse: $G(x) = 3x - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot x^2$; $D_G = \left]0; \frac{6}{1+\sqrt{2}}\right[$.) (6 BE)

2016-AI:

4.0 Ein Planschbecken soll entsprechend folgender Skizze hergestellt werden, wobei der Boden und die Wand luftgefüllte Hohlkammern mit einer Dicke von 10 cm sind. Die Summe aus Radius R und Höhe h soll konstant 90 cm betragen.



4.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, welche die Maßzahl des Volumens des mit Luft gefüllten Teils des Planschbeckens in Abhängigkeit von R beschreibt. (6 BE)
[Mögliches Ergebnis: $V(R) = \pi\,(-10R^2 + 1700R - 8000)$]