aus alter Schulaufgabe:

1.1 $A = x \cdot \ell$; ℓ ist noch unbekannt!

gesamter Umfang: 60 m Zaun + 4 m Einfahrt = 64 m ➔ $2x + 2\ell = 64$ ➔ $2\ell = 64 - 2x$ ➔ $\ell = 32 - x$

oben einsetzen ➔ $A(x) = x \cdot (32 - x) = -x^2 + 32x$

$x > 0$ und $\ell > 0$ ➔ $32 - x > 0$ ➔ $x < 32$; damit: $D =]0;32[$

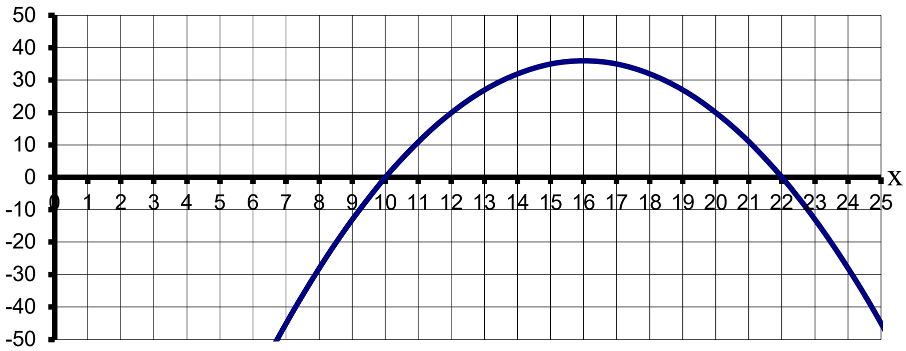
1.2 $x_S = -\frac{32}{2\cdot(-1)} = 16$; $A(16) = -16^2 + 32 \cdot 16 = 256$

➔ Die Fläche ist für x = 16 (m) am größten, nämlich 256 (m^2).

1.3 $-x^2 + 32x > 220$ ➔ $-x^2 + 32x - 220 > 0$; Gleichung lösen: $-x^2 + 32x - 220 = 0$

➔ $x_{1,2} = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-220)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-32\pm 12}{-2}$ ➔ $x_1 = 10$; $x_2 = 22$

Skizze:



➔ Der Flächeninhalt ist größer als 220 (m^2) für $10 < x < 22$.

alte Prüfungen:

1999-AI:

Nennen wir die beiden Summanden mal x und y. Also ist laut Aufgabe: $x + y = \sqrt{10}$ ➔ $y = \sqrt{10} - x$.
Laut Aufgabe geht es um die Summe der Quadrate der beiden Summanden, also um $x^2 + y^2$. Setzen wir die Bedingung von oben ein, so haben wir also folgende Funktion:

$f(x) = x^2 + (\sqrt{10} - x)^2$ *(Klammern setzen!)*

$= x^2 + \sqrt{10}^2 - 2\sqrt{10}x + x^2$ *(2. binomische Formel)*

$= 2x^2 - 2\sqrt{10}x + 10$

Von dieser Funktion ist nun das Extremum zu bestimmen. Es ist eine quadratische Funktion, die eine nach oben geöffnete Parabel beschreibt, also ergibt der Scheitelpunkt hier ein Minimum.

$x_S = -\frac{-2\sqrt{10}}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ➔ $y = \sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

➔ Die Summe der Quadrate wird minimal (nämlich gleich 5), wenn beide Summanden gleich $\frac{\sqrt{10}}{2}$ sind.

2001-AI:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist Länge mal Breite (welche der Seiten man die Länge und welche die Breite nennt, ist natürlich egal!). In der Aufgabe und der Skizze steht schon, dass die eine Seitenlänge a ist; die andere nennen wir mal b (wir könnten sie auch Hans nennen... auch das ist egal!). Also ist erst mal $A = a \cdot b$.
Der Flächeninhalt soll (nur) in Abhängigkeit von a angegeben werden; b müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht aber auch, dass der Draht insgesamt 15 (cm) lang ist. Also muss gelten: $a + b + a = 15$ ➔ $2a + b = 15$ ➔ $b = 15 - 2a$

Das setzen wir nun ein: $A = a \cdot (15 - 2a)$ *(Klammern setzen!)*

$= 15a - 2a^2$

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad 15 - 2a > 0$$

Ungleichungen lösen:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad a < 7{,}5$$

Beide Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < a < 7{,}5$; deshalb ist $\mathbb{D}_A =]0;7{,}5[$.

Der Flächeninhalt wird hier maximal für $a_S = -\frac{15}{2\cdot(-2)} = 3{,}75$ (cm) und $b = 15 - 2 \cdot 3{,}75 = 7{,}5$ (cm), nämlich $A(3{,}75) = \ldots = 28{,}125$ (cm²).

2004-AI:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist allgemein Länge mal Breite. Nehmen wir die Seite auf der x-Achse als Breite b und die Seite parallel zur y-Achse als Länge ℓ (Vorsicht: Man sollte keine der beiden Seiten a nennen, weil a hier schon eine andere Bedeutung hat!) Das fünfeckige Brett hat die Breite 10, rechts vom Rechteck wird aber ein Streifen der Breite abgesägt, also ist $b = 10 - a$. Die Länge geht von der x-Achse senkrecht zum Punkt P, also ist $\ell = y_P - 0 = y_P$. Laut Aufgabe soll P auf der Strecke [CD] liegen; von dieser Strecke hat man aber die Gleichung leider nicht gegeben!

Also ein wenig Grundwissen heraussuchen: Wie stellt man die Gleichung einer Strecke (bzw. Gerade) auf, von der man zwei Punkt kennt? (1) Man berechnet zunächst die Steigung: $m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{6-4}{6-10} = -0{,}5$. (Welcher der beiden Punkte zuerst kommt, ist egal – wichtig ist nur, dass die Differenz der y-Koordinaten oben steht und die der x-Koordinate unten! Und dass die Koordinaten von Punkt D und von Punkt C jeweils übereinanderstehen – die Reihenfolge oben und unten nicht unterschiedlich machen!) (2) Man schreibt sich die Gleichung der Geraden hin, am Besten mithilfe der Punktsteigungsform:
$y = -0{,}5\,(x - 6) + 6 = -0{,}5x + 9$

Weiter – nun können wir den x-Wert von P einsetzen, um damit seinen y-Wert auszurechnen:

$$\ell = y_P = -0{,}5\,(10 - a) + 9 = -5 + 0{,}5a + 9 = 0{,}5a + 4$$

(Vorsicht: Die y-Koordinate von P ist 10 – a, nicht a! Steht in der Zeichnung – also einfach ablesen, wenn man nicht selbst darauf kommt! Wieder mal gilt: In der Zeichnung hat x_P etwa den Wert 8 und y_P etwa den Wert 5 – im Allgemeinen hängt das aber von a ab, wir dürfen also nicht einfach diese abgelesenen Zahlen verwenden!)

Das setzen wir alles in die Flächeninhaltsformel ein:

$A(a) = (10 - a) \cdot (0{,}5a + 4)$ *(Klammern setzen!)*
$= 5a + 40 - 0{,}5a^2 - 4a$ *(Klammern ausmultiplizieren)*
$= -\frac{1}{2}a^2 + a + 40$ *(Reihenfolge umstellen, zusammen fassen, die 0,5 als Bruch schreiben)*
$= -\frac{1}{2}(a^2 - 2a - 80)$ *(ausklammern; auf VZ achten!)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass P auf der Strecke [CD] liegen soll. Aus der Zeichnung kann man ablesen, dass dies nur für a-Werte zwischen 0 und 4 der Fall ist. Also ist $\mathbb{D}_A = [0;\,4]$ (die beiden Werte sollte man hier einschließen, weil ja auch P = C oder P = D sein könnte).

Der Flächeninhalt wird hier maximal für $a_S = -\frac{1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$ bzw. $a_S = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1$, nämlich

$A(1) = \ldots = 40{,}5$.

2007-AII:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist allgemein Länge mal Breite. Nehmen wir die Seite parallel zur x-Achse als Breite b und die Seite parallel zur y-Achse (also die Höhe des Fensters) als Länge ℓ (Vorsicht: Man sollte keine der beiden Seiten a nennen, weil a hier schon eine andere Bedeutung hat!). Das Fenster erstreckt sich laut Zeichnung rechts bis a. Laut Aufgabe ist es symmetrisch zur y-Achse, also geht es links bis –a. Damit ist b = 2a. Die Länge geht vom y-Wert 1 (Sims!) senkrecht hinauf bis zur Schräge; nennen wir den Punkt rechts oben P, dann ist also $\ell = y_P - 1$. Laut Aufgabe soll P liegt auf der schrägen Strecke; von dieser Strecke hat man aber die Gleichung leider nicht gegeben!

Die Gleichung dieser Strecke (bzw. Geraden) aufzustellen, geht ähnlich wie in 2004-AI – nur einfacher. Den y-Achsenabschnitt kann man hier sofort ablesen: 6. Die Steigung berechnet man wie oben: $m = \frac{0-6}{8-0} = -0{,}75$. (Welcher der beiden Punkte zuerst kommt, ist wieder egal – wichtig ist nur, dass die Differenz der y-Koordinaten oben steht und die der x-Koordinate unten! Und dass die Koordinaten der Punkte jeweils übereinanderstehen – die Reihenfolge oben und unten nicht unterschiedlich machen!) Also ist die Gleichung der Geraden, auf der P liegt: $y = -0{,}75x + 6$.

Weiter – nun können wir den x-Wert von P einsetzen, um damit seinen y-Wert auszurechnen:

$\ell = y_P - 1 = (-0{,}75\,a + 6) - 1 = -0{,}75\,a + 5$ *(die Klammern hier sind nicht nötig, machen es aber übersichtlicher)*

(Wieder mal gilt: In der Zeichnung hat x_P etwa den Wert 3 und y_P etwa den Wert 3,8 – im Allgemeinen hängt das aber von a ab!)

Das setzen wir alles in die Flächeninhaltsformel ein:

$A(a) = 2a \cdot (-0{,}75a + 5)$ *(Klammern setzen!)*

$= -1{,}5a^2 + 10a$ *(Klammern ausmultiplizieren)*

$= 10a - 1{,}5a^2$ *(Reihenfolge umstellen)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass der Punkt rechts oben auf der schrägen Strecke liegen soll – und auch, dass der y-Wert größer als 1 sein muss bzw. die Länge (Höhe) des Fensters größer als 0! Aus der Zeichnung kann man ablesen, dass a größer als 0 sein muss; den zweiten Wert kann man nicht so einfach ablesen. Aber man kann ihn ausrechnen:

$$\ell > 0 \Rightarrow -0{,}75a + 5 > 0 \Rightarrow -0{,}75a > -5 \Rightarrow a < \frac{20}{3}$$

Also ist $D_A =]0; \frac{20}{3}[$.

Vorsicht: (1) Man teilt hier durch eine negative Zahl, also dreht sich die Richtung der Ungleichung um. (2) Nicht runden! Auch wenn der Taschenrechner hier 6,66666666 oder so anzeigt – man schreibt nicht 6,67 hin (oder gar 6,66), sondern gefälligst das exakte Ergebnis, also den Bruch oder meinetwegen auch die periodische Kommazahl $6,\bar{6}$!

Der Flächeninhalt wird hier maximal für $a_S = -\frac{10}{2\cdot(-1{,}5)} = \frac{10}{3}$, nämlich $A\left(\frac{10}{3}\right) = \cdots = \frac{50}{3}$.

2014-AI:

4.1 Gesucht ist der Flächeninhalt; laut Angabe besteht dieser aus einem Rechteck und einem Halbkreis. Das Rechteck hat laut Skizze die Seitenlängen x und 2x, der Halbkreis den Radius r. Also ist erst mal:

$$A = A_{Rechteck} + 0{,}5\cdot A_{Kreis} = x\cdot 2x + 0{,}5\pi r^2$$

Laut Aufgabe soll man den Flächeninhalt nur in Abhängigkeit von x schreiben; r müssen wir also noch rausbekommen. Dazu schauen wir nochmal in die Skizze, insbesondere die untere Seite des Rechtecks. Dann sehen wir, dass

$$2 + 2r + 2 = 2x$$

gilt. Also: $4 + 2r = 2x \mid -4 \Rightarrow 2r = 2x - 4 \mid :42 \Rightarrow r = x - 2$ *(auf der rechten Seite beides teilen!)*

Das setzen wir jetzt ein:

$A(x) = x\cdot 2x + 0{,}5\pi\cdot(x-2)^2$ *(Klammern setzen!)*

$= 2x^2 + 0{,}5\pi\cdot(x^2 - 4x + 4)$ *(vorne zusammenfassen, hinten 2. bin Formel)*

$= 2x^2 + 0{,}5\pi x^2 - 2\pi x + 2\pi$ *(Klammer auflösen)*

$= (2 + 0{,}5\pi)x^2 - 2\pi x + 2\pi$ *(bei den ersten beiden Summanden x^2 ausklammern)*

4.2 Benutzen wir erst mal das, was in der Aufgabe steht. Die Strecken [AB] und [EF] haben laut Skizze jeweils die Längen x, die Strecken [BD] und [DE] die Längen 2. Also muss gelten:

$$x + 2 + 2 + x \le 12 \Rightarrow 2x + 4 \le 12 \mid -4 \Rightarrow 2x \le 8 \mid :2 \Rightarrow x \le 4$$

Außerdem muss man wie üblich beachten, dass alle Längen positiv sein müssen, also x > 0 und r > 0. Die zweite Ungleichung ergibt, wenn wir das r von oben einsetzen:

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Alles zusammengenommen führt auf $2 < x \leq 4$, also ist die Definitionsmenge, wie in der Aufgabe angegeben, tatsächlich $D_A =]2;4]$.

Wenn man hier den Scheitel ausrechnet, erhält man $x_S = -\frac{-2\pi}{2\cdot(2+0{,}5\pi)} \approx 0{,}88$, dieser Wert gehört aber gar nicht zur Definitionsmenge! (Dazu kommt noch, dass A(x) eine nach oben geöffnete Parabel beschreibt, beim Scheitelpunkt hätte man also sowieso nicht den größten Flächeninhalt, sondern den kleinstein!) In einem solchen Fall schaut man sich die Werte an den Rändern der Definitionsmenge an („Randwerte''):
$A(2) = (2 + 0{,}5\pi) \cdot 2^2 - 2\pi \cdot 2 + 2\pi = 8;\quad A(4) = (2 + 0{,}5\pi) \cdot 4^2 - 2\pi \cdot 4 + 2\pi = 32 + 2\pi \approx 38{,}28$
Den größten Flächeninhalt erhält man also für x = 4 (m).

4.4 Die Querschnittsfläche für x = 4 ist $A(4) = 32 + 2\pi \approx 38{,}28$, siehe eben.
Der Kanal ist aber nur bis 1 m unter der Oberkante gefüllt; von dieser berechneten Fläche müssen wir also einen Teil abziehen. Oben fehlt ein Rechteck mit Höhe 1 (m) und Breite $2x = 2\cdot 4 = 8$, also mit dem Flächeninhalt $1\cdot 8 = 8$. Damit ist insgesamt nur die Fläche $A(4) - 8 = 24 + 2\pi \approx 30{,}28$ ausgefüllt.
Der Rest der Aufgabe ist simple Prozentrechnung. Man kann z. B. so rechnen (alternativ: Dreisatz!):
$(A(4) - 8)/(A(4)) = (24 + 2\pi)/(32 + 2\pi) \approx 30{,}28/38{,}28 \approx 0{,}791 = 79{,}1\%$

2005-AI:

Der Querschnitt des Kanals besteht aus zwei Viertelkreisen und einem Rechteck. Nach der Skizze haben die Viertelkreise den Radius h, das Rechteck hat die beiden Seitenlängen h und s. Also ist der Flächeninhalt:
$A = 2\cdot A_{\text{Viertelkreis}} + A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2}\cdot A_{\text{Kreis}} + A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2}\pi h^2 + h\cdot s.$
Der Flächeninhalt soll (nur) in Abhängigkeit von h angegeben werden; s müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht, dass die beiden Viertelkreisbögen und die Strecke s zusammen 5 LE haben. Also:
$2\cdot \text{Viertelkreisbogen} + s = 5 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \text{Kreisumfang} + s = 5 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\pi h + s = 5 \Rightarrow \pi h + s = 5 \Rightarrow s = 5 - \pi h.$

Das setzen wir nun ein: $A = \frac{1}{2}\pi h^2 + h \cdot (5 - \pi h)$ *(Klammern setzen!)*

$= \frac{1}{2}\pi h^2 + 5h - \pi h^2$ *(Klammer auflösen)*

$= 5h - \frac{1}{2}\pi h^2$ *(ein halbes πh^2 minus ein ganzes πh^2 ist minus ein halbes πh^2)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$h > 0 \quad \text{und} \quad 5 - \pi h > 0$$

Ungleichungen lösen:

$$h > 0 \quad \text{und} \quad h < 5/\pi$$

Beide Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < h < 5/\pi$; deshalb ist $D_A =]0;5/\pi[$. Also müssen am Schluss die Randwerte A(0) und A(5/π) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert. *(Ja, ich weiß, die meisten rechnen nicht gerne mit π und tippen das lieber in den Taschenrechner ein (oder benutzen einfach gleich 3,14) – aber in der Aufgabe steht nichts von Runden! Um ein Gefühl für den Wert zu bekommen, kann man sich gerne mal mit dem Taschenrechner ausrechnen, dass 5/π etwa 1,59 ist; trotzdem sollte man das **exakte** Ergebnis angeben!)*

Den größten Flächeninhalt erhält man hier für $h_S = -\frac{5}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{5}{\pi} \approx 1{,}59$ (m), nämlich $A\left(\frac{5}{\pi}\right) = \cdots = \frac{12{,}5}{\pi} \approx 3{,}98$ (m²).

2016-AI:
Vorsicht, Aufgabe sorgfältig lesen! Gefragt ist hier nicht das Volumen des mit Wasser gefüllten Bereichs (also das, was grau schraffiert ist), sondern das Volumen des mit Luft gefüllten Bereichs (also das Weiße)! Diesen Bereich kann man sich als Summe des Zylinders unten und des Zylinderrings oben ausrechnen oder (meiner Ansicht nach etwas einfacher) als Differenz aus dem gesamten Zylinder und dem grau schraffierten Zylinder.

Laut Merkhilfe ist das Volumen eines Zylinders: $V = \pi r^2 h$. Der gesamte Zylinder hat den Radius R und die Höhe H, also das Volumen $V_{ges} = \pi R^2 h$. Beim grau schraffierten Zylinder kann man aus Text und Skizze entnehmen, dass sein Radius gleich R – 10 ist und seine Höhe h – 10; also ist sein Volumen $V_{grau} = \pi(R-10)^2(h-10)$ *(Klammern setzen!)*.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von R angegeben werden; wir müssen also noch H bestimmen. Im Aufgabentext steht dazu, dass die Summe aus Radius R und Höhe h gleich 90 sein soll, also R + h = 90 ➔ h = 90 – R. Setzen wir das erst mal oben ein:
$V_{ges} = \pi R^2(90-R)$ und $V_{grau} = \pi(R-10)^2\big((90-R)-10\big) = \pi(R-10)^2(80-R)$
(Die meisten Klammern sind hier nötig, nur die um 90 – R in V_{grau} nicht!)

Der Rest ist nun „nur" noch Algebra (Klammern ausmultiplizieren, u.a. mit binomischer Formel) – relativ aufwendig, aber nicht eigentlich schwierig… Es empfiehlt sich in allen Rechnungen sehr, das π außerhalb der Klammern stehen zu lassen, nicht mit rein zu multiplizieren! (Steht ja auch im gegebenen Teilergebnis außerhalb der Klammer.)
$V_{ges} = \pi R^2(90-R) = \pi(-R^3+90R^2)$
$V_{grau} = \pi(R^2-20R+100)(80-R) = \pi(80R^2-R^3-1600R+20R^2+8000-100R$
$\quad = \pi(-R^3+100R^2-1700R+8000)$
Damit folgt dann für das gesuchte Volumen:
$V(R) = V_{ges} - V_{grau} = \pi(-R^3+90R^2) - \pi(-R^3+100R^2-1700R+8000)$
$\quad = \pi(-R^3+90R^2+R^3-100R^2+1700R-8000) = \pi(-10R^2+1700R-8000)$
(Eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge ist hier gar nicht gefragt, die wird in 4.2 dann vorgegeben.)

Das größte Volumen ergibt sich hier für $R_S = -\frac{1700}{2\cdot(-10)} = 85$ (cm), nämlich $V(85) = \cdots = 64250\pi \approx 202\,000$ (cm³).

2008-AII:
Das Fenster besteht aus zwei Halbkreisen und einem Rechteck. Nach der Skizze haben die Halbkreise den Radius r, das Rechteck hat die beiden Seitenlängen b und 4r. Also ist der Flächeninhalt: $A = 2\cdot A_{Halbkreis} + A_{Rechteck} = A_{Kreis} + A_{Rechteck} = \pi r^2 + b\cdot 4r$.
Der Flächeninhalt soll (nur) in Abhängigkeit von r angegeben werden; b müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht, dass der gesamte Umfang 10 (m) sein soll. Der Umfang besteht aus zwei Halbkreisbögen, den beiden Seiten der Länge b und der Strecke unten mit Länge 4r. Also gilt: 2·Halbkreisbogen + b + b + 4r = 10 ➔ Kreisumfang + 2b + 4r = 10 ➔ $2\pi r + 2b + 4r = 10$
➔ $2b = 10 - 2\pi r - 4r$ ➔ $b = 5 - \pi r - 2r$ *(Vorsicht: Auf der rechten Seite muss man **alle** Terme durch 2 teilen, wenn man links durch 2 teilt!)*
Das setzen wir nun ein: $A = \pi r^2 + (5 - \pi r - 2r)\cdot 4r$ *(Klammern setzen!)*
$\quad = \pi r^2 + 20r - 4\pi r^2 - 8r^2$ *(Klammer auflösen)*
$\quad = 20r - 3\pi h^2 - 8r^2$ *(ein πr^2 minus ein $4\pi r^2$ sind minus $3\pi r^2$)*
$\quad = 20r - (3\pi + 8)\, r^2$ *(r^2 nach hinten, das Minus nach vorne ausklammern, in der Klammer die VZ umdrehen!)*
Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$r > 0 \quad \text{und} \quad 5 - \pi r - 2r > 0$$

Bei der zweiten Ungleichung sollte man das r und das Minus ausklammern (auf VZ achten!):

$$r > 0 \quad \text{und} \quad 5 - (\pi + 2) > 0$$

Jetzt kann man die zweite Ungleichung auch lösen:

$$r > 0 \quad \text{und} \quad r < \frac{5}{\pi+2}$$

Beide Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < r < \frac{5}{\pi+2}$; deshalb ist $D_A =]0;\frac{5}{\pi+2}[$. Also müssen am Schluss die Randwerte A(0) und $A(\frac{5}{\pi+2})$ überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert. *(Hier steht zwar noch nichts von Runden, im Aufgabenteil 4.2 soll man dann aber r auf drei Nachkommastellen angeben – also wäre es hier wohl in Ordnung, wenn man auch in der Definitionsmenge (und dann auch beim zweiten Randwert) schon rundet:* $D_A =]0;0{,}972[$. *Trotzdem ist es natürlich besser, (auch) das* ***exakte*** *Ergebnis anzugeben!)*

Den größten Flächeninhalt erhält man hier für $r_S = -\frac{20}{2\cdot(-(3\pi+8))} = \frac{10}{3\pi+8} \approx 0{,}574$ (m), nämlich $A\left(\frac{10}{3\pi+8}\right) = \cdots = \frac{100}{3\pi+8} \approx 57{,}39$ (m²).

Nachtermin 2000:

Das Fenster besteht laut Aufgabentext und Zeichnung aus einem Rechteck und einem gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck.

- Der Flächeninhalt des Rechtecks ist Länge mal Breite, mit den Bezeichnungen in der Aufgabe also $x\cdot y$.
- Der Flächeninhalt des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ist die Hälfte seiner Grundlinie mal seiner Höhe. Die Grundlinie ist x, die Höhe ist nicht direkt gegeben.
- Das Dreieck ist aber ein halbes Quadrat. x ist eine Diagonale, die Höhe ist die Hälfte der anderen Diagonale. Da die beiden Diagonalen gleich lang sind, muss die Höhe also gleich x/2 sein.
- (Alternativ: Da die Spitze des Dreiecks aber auf dem Thaleskreis um die Grundlinie liegen muss (weil das Dreieck ja rechtwinklig ist) und weil der Mittelpunkt des Thaleskreises gleich dem Fußpunkt der Höhe ist, folgt, dass die Höhe gleich dem Radius des Thaleskreises sein muss, also halb so lang wie die Grundseite, also x/2.)
- Damit ist der Flächeninhalt des Dreiecks gleich $\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x^2$

Damit ist insgesamt: $G(x) = x\cdot y + \frac{1}{4}x^2$.

Der Flächeninhalt soll (nur) in Abhängigkeit von x angegeben werden; y müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht, dass der gesamte Umfang des Fensters 6 betragen soll. Der Umfang besteht aus zwei Seiten der Länge y, einer Seite der Länge x und den beiden Schenkeln des Dreiecks; nennen wir diese mal a. Also ist $y + y + x + a + a = 6 \Rightarrow 2y + x + 2a = 6$.

Bevor wir weiterkommen, müssen wir also a berechnen.

- Das Dreieck ist ein halbes Quadrat, x ist eine Diagonale darin.
- Zwischen der Seitenlänge a eines Quadrates und der Länge seiner Diagonalen x besteht aber immer der Zusammenhang $x = \sqrt{2}a$. Es folgt: $a = \frac{x}{\sqrt{2}}$.
- (Alternativ: Das Dreieck ist rechtwinklig mit den Katheten a und a und der Hypotenuse x, also gilt mit dem Satz des Pythagoras: $a^2 + a^2 = x^2 \Rightarrow 2a^2 = x^2 \Rightarrow a^2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a = \frac{x}{\sqrt{2}}$.)
- Das könnte man so stehen lassen; üblich ist es aber, die Wurzel aus dem Nenner weg zu bekommen („Nenner rational machen“). Dafür erweitert man den Bruch noch mit $\sqrt{2}$: $a = \frac{x\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{x\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

Das setzen wir oben in die Bedingung für den Umfang ein:

$2y + x + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x = 6 \Rightarrow 2y + x + \sqrt{2}x = 6 \Rightarrow 2y = 6 - x - \sqrt{2}x \Rightarrow y = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}x$ *(Vorsicht: Auf der rechten Seite muss man* ***alle*** *Terme durch 2 teilen, wenn man links durch 2 teilt!)*

Das Ergebnis setzen wir nun in die Formel für G ein:

$$G(x) = x\cdot(3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}x) + \frac{1}{4}x^2$$ *(Klammern setzen!)*

$$= 3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2$$ *(Klammer ausmultiplizieren)*

$$= 3x - \frac{1}{2}\sqrt{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2$$ *(minus ein halbes x^2 plus ein viertel x^2 ist minus ein viertel x^2)*

$$= 3x - (\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4})x^2$$ *(das Minus nach vorne, das x^2 nach hinten ausklammern; in der Klammer die VZ umdrehen!)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten: $x > 0$ und $3 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}x > 0$

In der zweiten Ungleichung muss man das $-\frac{1}{2}$ und das x ausklammern:

$$x > 0 \quad \text{und} \quad 3 - \frac{1}{2}x \cdot (1 + \sqrt{2}) > 0$$

Multipliziert man mit 2 und teilt durch $(1 + \sqrt{2})$, folgt schließlich:

$$x > 0 \quad \text{und} \quad x < \frac{6}{1+\sqrt{2}},$$

deshalb ist $D_G =]0; \frac{6}{1+\sqrt{2}}[$.

Den größten Flächeninhalt erhält man hier für $x_S = -\frac{3}{2\cdot\left(-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\right)\right)} = \frac{6}{2\sqrt{2}+1} \approx 1{,}57$ (m), nämlich

$A\left(\frac{6}{2\sqrt{2}+1}\right) = \cdots = \frac{9}{2\sqrt{2}+1} \approx 2{,}35$ (m²).