Extremwertaufgaben

(und einige andere Anwendungsaufgaben)

Die Prüfungsaufgaben kann man im Wesentlichen in acht Kategorien einteilen (es gibt auch ein paar Sonderfälle; die werden am Schluss in Kapitel 9 besprochen). Außerdem gibt es auch oft Aufgaben, in denen es um die größte oder kleinste Steigung oder das größte oder kleinste Gefälle oder die größte oder kleinste Änderungsrate geht; das sind nicht im eigentlichen Sinne Extremwertaufgaben, solche Beispiele werden hier also nicht besprochen.

Im Folgenden sind die Kategorien teils nach der Schwierigkeit geordnet, teilweise aber auch danach, wie häufig sie vorkommen. Grundlage sind die Prüfungen und viele der Nachtermine aus den Jahren 1999 bis 2024.

Prinzipiell gilt eigentlich immer:

- Der erste Aufgabenteil mag schwierig sein – der zweite ist aber praktisch immer einfach! Es geht ja nur darum, ein Maximum oder Minimum einer gegebenen Funktion zu finden (und diese Funktion ist ja praktisch immer als Zwischenergebnis angegeben), also letztlich einen Hochpunkt oder Tiefpunkt! Das ist nicht nur eine Standardrechnung, sondern es steht sogar in der Merkhilfe, wie das geht: erste Ableitung gleich Null setzen; Gleichung lösen; Ergebnisse in die zweite Ableitung einsetzen, um zu prüfen, ob es ein Hoch- oder Tiefpunkt ist (oder Monotonie verwenden). Im Folgenden wird deshalb auch immer nur der erste Aufgabenteil näher besprochen.
- Randwerte nicht vergessen! Es kommt zwar nur sehr selten vor (z.B. Prüfung 2003-AI/3), dass der gesuchte Extremwert am Rand der Definitionsmenge liegt, dennoch muss das immer überprüft werden! (Alternativ kann man manchmal auch anders argumentieren, dass ein gefundener relativer Extremwert sogar ein absoluter Extremwert ist – ist die Funktion z. B. quadratisch, so ist der Extrempunkt ja automatisch der Scheitelpunkt und damit ein absoluter Extrempunkt. Vorsicht: Das klappt aber nur, wenn der x-Wert des Scheitels in der Definitionsmenge liegt!) Falls man die Definitionsmenge nicht bestimmt hat, sollte man sich dafür notfalls irgendwelche Werte aus den Fingern saugen, die halbwegs plausibel aussehen – mit etwas Glück bekommt man noch einen Folgefehler darauf!
- Im (sehr seltenen!) Fall, dass ein „Rand“ der Definitionsmenge ∞ oder $-\infty$ ist, muss man den entsprechenden Grenzwert der Funktion betrachten.
- Die Definitionsmenge kann man z. B. so bestimmen:
  - bei den meisten geometrischen Aufgaben: Ansetzen, dass alle Streckenlängen größer als Null sein müssen; aus diesen Ungleichungen erhält man die Definitionsmenge. Deshalb ist die Definitionsmenge hier ein Intervall, das praktisch immer bei Null anfängt. Ob man die Null ein- oder ausschließt, ist meist Geschmackssache – steht in der Rechnung die Variable aber irgendwo im Nenner eines Bruchs, so ***muss*** man die Null ausschließen.
  - Bei vielen (aber nicht allen!) geometrischen Aufgaben kann man auch die Nullstellen der gegebenen Funktion als Ränder der Definitionsmenge benutzen.
  - Bei Aufgaben, wo ein Punkt auf einem Funktionsgraph liegen soll, wo der Abstand zweier Graphen gefragt ist oder ähnliches, kann man die Definitionsmenge meist direkt aus der Skizze oder aus den gegebenen Definitionsmengen ablesen.

1. Abstände zwischen Graphen

Dies wurde in der Prüfung 2005-AII/2.3-4 und im Nachtermin 2008/4 gefragt – und ist eindeutig der einfachste Aufgabentyp.

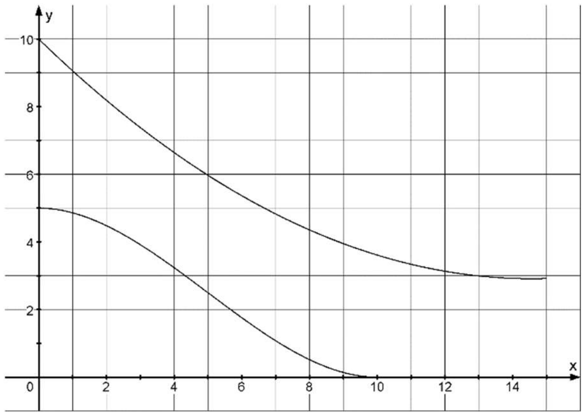
Hier bildet man einfach die Differenz der beiden Funktionsterme (oberer minus unterer!). Die sich ergebende neue Funktion nennt man z. B. d (in beiden Prüfungsaufgaben war das sogar so vorgegeben). Von dieser Funktion d bestimmt man dann den Hochpunkt bzw. Tiefpunkt – je nachdem, ob der größte oder der kleinste Abstand gesucht ist. (in beiden Prüfungsaufgaben war der kleinste gefragt)

2005-AII

Nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt einer überdachten Wasserrutsche. Der Graph G_w stellt die Wasserrutsche, der Graph G_b stellt die Bedachung dar, die über die Rutsche hinaus verlängert ist. Die Funktionen w und b sind gegeben durch

$w: x \mapsto \frac{1}{100}(x^3 - 15x^2 + 500)$ mit $D_w = [0;10]$

und $b: x \mapsto \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10$ mit $D_b = [0;15]$.



2.3 Die Funktion $d: x \mapsto d(x)$ mit $D_d = [0;10]$ beschreibt den in y-Richtung gemessenen Abstand zwischen Wasserrutsche und Dach. Zeigen Sie, dass sich d(x) auch in der Form $d(x) = -\frac{1}{100}x^3 + \frac{11}{60}x^2 - \frac{35}{36}x + 5$ schreiben lässt. (2 BE)

2.4 Aus Sicherheitsgründen wird ein in y-Richtung gemessener Mindestabstand zwischen Wasserrutsche und Dach von 3,30 (LE) vorgegeben. Untersuchen Sie rechnerisch, ob dieser Mindestabstand an jeder Stelle eingehalten wird. (8 BE)

Lösung (zu 2.3):

Oben ist das Dach (beschrieben durch die Funktion b), unten ist die Wasserrutsche (beschrieben durch die Funktion w). Also ist:

$d(x) = b(x) - w(x) = \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10 - \frac{1}{100}(x^3 - 15x^2 + 500)$

$= \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10 - \frac{1}{100}x^3 + \frac{15}{100}x^2 - 5 \quad = -\frac{1}{100}x^3 + (\frac{1}{30} + \frac{15}{100})x^2 - \frac{35}{36}x + 10 - 5$

$= -\frac{1}{100}x^3 + \frac{11}{60}x^2 - \frac{35}{36}x + 5$ *(die beiden Brüche addieren kann man mit dem TR machen!)*

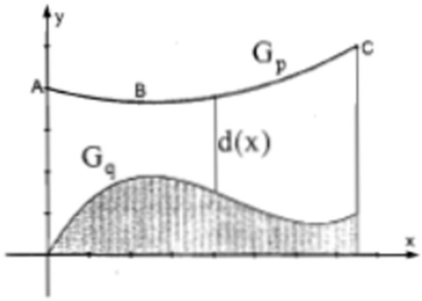
Die Definitionsmenge ist hier schon in der Aufgabe angegeben: $D_d = [0;10]$. Am Schluss von 2.4 ist also noch zu prüfen, ob d(0) oder d(10) kleiner sind als der berechnete (relativ) kleinste Wert.

Nachtermin 2008/4

4.0 Nebenstehende Skizze zeigt das Modell eines Hochseilgartens. Zwischen den Punkten $A(0|2)$ und $C(15|2{,}5)$ ist ein Seil gespannt. Der Querschnitt des unter dem Seil liegenden Geländes wird durch die Funktion

$$q: x \mapsto q(x) = \frac{1}{450}x^3 - \frac{3}{50}x^2 + \frac{13}{30}x$$

mit $D_q = [0;15]$ beschrieben.



4.2 Der senkrechte Abstand zwischen Boden und Seil wird mit $d(x)$ bezeichnet (s. Skizze). Bestimmen Sie x so, dass dieser Abstand den absolut kleinsten Wert annimmt. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. (7 BE)

Lösung (zum Anfang von 4.2):

Oben ist das Seil (beschrieben durch die Funktion p), unten ist der Boden (beschrieben durch die Funktion q). Also ist:

$d(x) = p(x) - q(x) = \frac{1}{60}x^2 - \frac{13}{60}x + 2 - (\frac{1}{450}x^3 - \frac{3}{50}x^2 + \frac{13}{30}x)$ *(Klammern setzen nicht vergessen !!!)*

$= \frac{1}{60}x^2 - \frac{13}{60}x + 2 - \frac{1}{450}x^3 + \frac{3}{50}x^2 - \frac{13}{30}x \quad = -\frac{1}{450}x^3 + (\frac{1}{60} + \frac{3}{50})x^2 - (\frac{13}{60} + \frac{13}{30})x + 2$

$= -\frac{1}{450}x^3 + \frac{23}{300}x^2 - \frac{13}{20}x + 2$ *(die Brüche addieren kann man jeweils mit dem TR machen!)*

Für die Definitionsmenge gilt: $D_d = D_p = D_q = [0;15]$. Am Schluss ist also noch zu prüfen, ob d(0) oder d(15) kleiner sind als der berechnete (relativ) kleinste Wert.

<u>2. Streckenlängen gegeben, (Flächeninhalt oder) Volumen gesucht (oft: Schachteln)</u>
Dies wurde in folgenden Prüfungen gefragt:
Flächeninhalt: 2004-AII/2.2
Volumen: Nachtermine 2004/4, 2005/4, 2006-AI/3 (keine eigentliche Extremwertaufgabe!), Nachtermin 2007/3, 2013-AI/3, 2024-AII

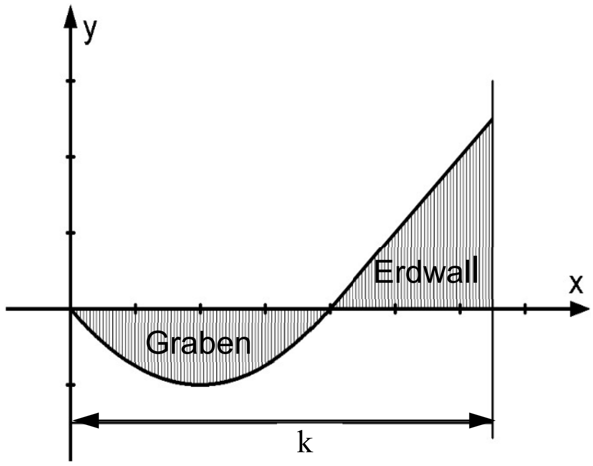
Hier sucht man sich zunächst (eine) passende Formel(n) für den gesuchten Flächeninhalt / das gesuchte Volumen aus der Formelsammlung heraus. Die nötigen Streckenlängen für die Formel übernimmt man direkt aus der Skizze oder aus dem Text (manchmal sind noch kleine Rechnungen nötig) und setzt sie einfach ein (Klammern setzen nicht vergessen!). Dann löst man die Klammern auf.

<u>2004-AII</u> *(Dies ist streng genommen keine Extremwertaufgabe! Für den Aufgabenteil 2.3 braucht man die Integralrechnung; 2.2 geht auch damit.)*

2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt durch einen ausgehobenen Graben und einen aufgeschütteten Erdwall. Der Graph G_g ist der Graph der abschnittsweise definierten Funktion

$$g: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - x & \text{für } 0 \le x \le 4 \\ x - 4 & \text{für } 4 < x \le k \end{cases}$$

mit $k \in \mathbb{R} \wedge k > 4$.



2.2 Stellen Sie die Maßzahl der Querschnittsfläche A(k) des Erdwalls in Abhängigkeit von k dar.
(Mögliches Ergebnis: $A(k) = \frac{1}{2}k^2 - 4k + 8$) (3 BE)

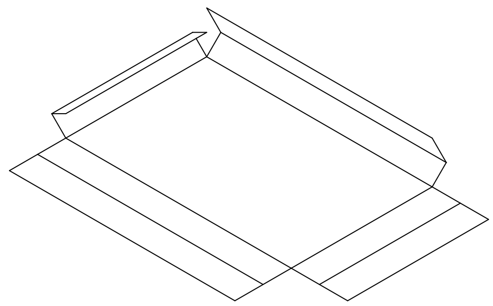
Lösung:
Der Erdwall hat die Querschnittsfläche eines Dreiecks. Für den gesuchten Flächeninhalt gilt also:
$A = \frac{1}{2} gh$ mit der Grundseite g und der Höhe h (die senkrecht auf g steht)
Aus der Skizze und der Definition der Funktion g kann man ablesen, dass sich der Erdwall von $x = 4$ bis $x = k$ erstreckt. Damit ist $g = k - 4$.
Die Höhe erhält man dagegen aus dem y-Wert am rechten Rand: $h = y = g(k) = k - 4$.
Damit ist $A(k) = \frac{1}{2}(k-4) \cdot (k-4) = \frac{1}{2}(k-4)^2 = \frac{1}{2}(k^2 - 8k + 16) = \frac{1}{2}k^2 - 4k + 8$

Alternativ für Leute, die schon Integrale kennen:
$$A(k) = \int_4^k (x-4)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - 4x\right]_4^k = (\tfrac{1}{2}k^2 - 4k) - (\tfrac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4) = \tfrac{1}{2}k^2 - 4k + 8$$

Die Definitionsmenge ist in der Aufgabe im Prinzip schon vorgegeben: Dort steht ja $k \in \mathbb{R}$ und $k > 4$. Also ist $D =]4; \infty[$. Am Schluss muss man deshalb noch den Randwert A(4) und den Grenzwert von A(k) für $k \to \infty$ prüfen, ob sich dafür evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert. (Alternativ kann man hier auch argumentieren, dass A eine quadratische Funktion ist und deshalb der berechnete relativ größte Wert am Scheitel liegt und deshalb auch der absolut größte Wert ist.)
(Anmerkung: Diese Aufgabe könnte man auch in der Kategorie 7 einordnen, da ja der rechte obere Punkt des Erdwalls auf dem Graph von g liegen muss.)

Nachtermin 2004

4.0 Um Obstkisten aus Pappe herzustellen, werden aus rechteckigen Kartonplatten an den 4 Ecken jeweils Quadrate abgeschnitten. Anschließend werden die Seitenteile so gefalzt, dass doppelwandige Seiten mit der Höhe x entstehen:

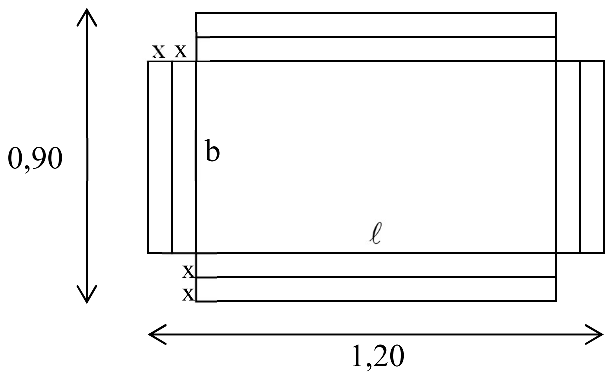


Die Kartonplatten haben zu Beginn eine Länge von 1,20 m und eine Breite von 0,90 m.

4.1 Stellen Sie die Maßzahl des Volumens V(x) einer solchen Obstkiste in Abhängigkeit von der Höhe x dar. Geben Sie zudem eine sinnvolle Definitionsmenge D_V an.

(Mögliches Teilergebnis: $V(x) = 16x^3 - 8{,}4x^2 + 1{,}08x$) (4 BE)

Lösung:
Auch wenn's nicht verlangt ist – eine zusätzliche Skizze kann hier hilfreich sein:



Die Obstkiste ist ein Quader, ihr Volumen ist also Länge ℓ mal Breite b mal Höhe x (laut Aufgabentext). Da die Obstkiste doppelwandig sein soll, taucht die Höhe x auf jeder Seite jeweils zweimal auf, an jedem der beiden Rechtecke, die zusammengefaltet werden, je einmal (siehe Skizze oben). Deshalb gilt für Länge und Breite:

$$\ell = 1{,}20 - 4x \quad \text{und} \quad b = 0{,}90 - 4x$$

Für das Volumen folgt:

$V(x) = (1{,}20 - 4x) \cdot (0{,}90 - 4x) \cdot x$ *(Klammern setzen nicht vergessen!)*

$= (1{,}08 - 4{,}80x - 3{,}60x + 16x^2) \cdot x = (16x^2 - 8{,}40x + 1{,}08) \cdot x$

$= 16x^3 - 8{,}4x^2 + 1{,}08x$

Für die Definitionsmenge sollte man beachten, dass alle Streckenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$1{,}20 - 4x > 0 \quad \text{und} \quad 0{,}90 - 4x > 0 \quad \text{und} \quad x > 0$$

Ungleichungen lösen:

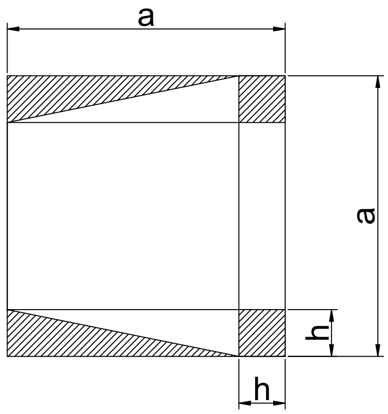
$$x < 0{,}30 \quad \text{und} \quad x < 0{,}225 \quad \text{und} \quad x > 0$$

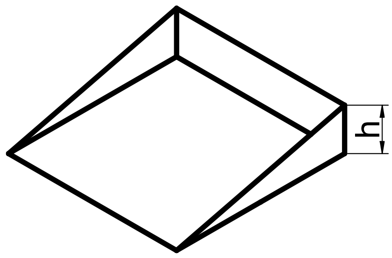
Alle drei Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < x < 0{,}225$; deshalb ist $D =]0;0{,}225[$. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(0,225) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größeres Volumen ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.

Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Das kann man umständlich machen ($16x^3 - 8{,}4x^2 + 1{,}08x = 0$; x ausklammern; quadratische Gleichung mit Mitternachtsformel lösen) oder elegant ($(1{,}20 - 4x) \cdot (0{,}90 - 4x) \cdot x = 0$; Lösungen aus den drei Faktoren ablesen). Es ergibt sich $x_1 = 0{,}30$; $x_2 = 0{,}225$; $x_3 = 0$. Damit hat man dann auch $D =]0;0{,}225[$.

Nachtermin 2005/4

4.0 Aus einem quadratischen Stück Blech mit der Seitenlänge $a = 100$ cm soll durch Abschneiden von zwei Dreiecken und zwei Quadraten (siehe Skizze links) und anschließendes Aufbiegen der Seitenteile eine Schaufel gefertigt werden (siehe Skizze rechts).





4.1 Stellen Sie die Maßzahl des Volumens V(h) der Schaufel („halbierter Quader“) in Abhängigkeit von der Höhe h dar. Geben Sie zudem eine sinnvolle Definitionsmenge D_V an.
[Mögliches Teilergebnis: $V(h) = h^3 - 150h^2 + 5000h$] (5 BE)

Lösung:

In der Aufgabe steht bereits, dass die Schaufel ein halber Quader ist. Deshalb ist ihr Volumen $\frac{1}{2}$ mal Länge ℓ mal Breite b mal Höhe h.

Aus der Skizze links liest man ab, dass $\ell = a - h = 100 - a$ und $b = a - 2h = 100 - 2h$ ist (weil laut Aufgabe $a = 100$ ist). Damit folgt für das Volumen:

$V(h) = \frac{1}{2} \cdot (100 - h) \cdot (100 - 2h) \cdot h$ *(Klammern setzen!)*

$= \frac{1}{2} \cdot (10\,000 - 200h - 100h + 2h^2) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (2h^2 - 300h + 10\,000) \cdot h$

$= h^3 - 150h^2 + 5000h$

Für die Definitionsmenge sollte man beachten, dass alle Streckenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$100 - h > 0 \quad \text{und} \quad 100 - 2h > 0 \quad \text{und} \quad h > 0$$

Ungleichungen lösen:

$$h < 100 \quad \text{und} \quad h < 50 \quad \text{und} \quad h > 0$$

Alle drei Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < h < 50$; deshalb ist $D_V =]0;50[$. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(50) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größeres Volumen ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.

Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Das kann man umständlich machen ($h^3 - 150h^2 + 5000h = 0$; h ausklammern; quadratische Gleichung mit Mitternachtsformel lösen) oder elegant ($(100 - h) \cdot (100 - 2h) \cdot h = 0$; Lösungen aus den drei Faktoren ablesen). Es ergibt sich $h_1 = 100$; $h_2 = 50$; $h_3 = 0$. Damit hat man dann auch $D_V =]0;50[$.

2006-AI/3

3.0 Gegenüber einem Würfel der Kantenlänge x sind die Kanten der Bodenfläche eines Quaders um 3 LE größer, seine Höhe um 3 LE geringer.

3.1 Bestimmen Sie das Volumen V(x) des Quaders in Abhängigkeit von x und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V an. (3 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $V(x) = (x^2 - 9)(x + 3)$]

3.2 Berechnen Sie die Kantenlänge x des Würfels so, dass Quader und Würfel gleiches Volumen haben. (3 BE)

Lösung:

Das Volumen des Quaders ergibt sich aus Länge mal Breite mal Höhe. Laut Aufgabe sind Länge und Breite jeweils um 3 LE größer als die des Würfels. Der Würfel hat laut Aufgabe die Kantenlänge x. Deshalb sind Länge und Breite des Quaders gleich x + 3. Ebenso folgt, dass die Höhe des Quaders gleich x – 3 ist. Also ist das Volumen des Quaders:

$V(x) = (x + 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$ *(Klammern setzen!)*

$= (x + 3) \cdot (x^2 - 9)$ *(dritte binomische Formel)*

$= x^3 - 9x + 3x^2 - 27$ *(Klammern ausmultiplizieren)*

$= x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ *(Reihenfolge umstellen)*

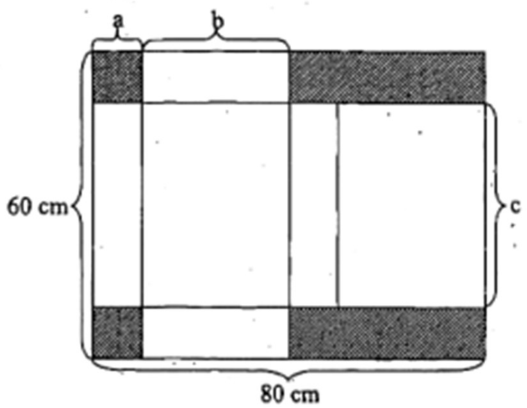
Im Gegensatz zu praktisch allen anderen Aufgaben empfiehlt es sich hier nicht, V(x) so stehen zu lassen, wie es als „mögliches Teilergebnis“ in der Aufgabe gegeben ist!

Die Definitionsmenge erhält man hier aus den Bedingungen, dass alle Seitenlängen des Quaders positiv sein müssen. Es muss also x + 3 > 0 und x – 3 > 0 gelten. Zusammengefasst ergibt sich daraus x > 3, und damit ist $D_V =]3;\infty[$.

Der Quader soll nun das gleiche Volumen haben wie der Würfel. Das Volumen des Würfels ist x^3. Also soll gelten: $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = x^3$. Zieht man auf beiden Seiten x^3 ab, so bleibt $3x^2 - 9x - 27 = 0$, also eine quadratische Gleichung. Diese sollte jeder lösen können... Randwerte müssen hier keine überprüft werden, da es sich hier gar nicht um eine Extremwertaufgabe handelt!

Nachtermin 2007/3

3.0 Auf einen rechteckigen Papierbogen soll das Netz eines Quaders mit den Seitenlängen a, b und c eingezeichnet werden (siehe Skizze). Die Maße des Bogens können der Zeichnung entnommen werden. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



3.1 Stellen Sie die Maßzahl V(a) des Quadervolumens in Abhängigkeit von a dar und bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V: a \mapsto V(a)$. (6 BE)

[Teilergebnis: $V(a) = 2a^3 - 140a^2 + 2400a$]

Lösung:
Das Volumen des Quaders ist Länge mal Breite mal Höhe, mit den Angaben hier also $V = a \cdot b \cdot c$.
Aus der Skizze kann man ablesen, dass $c + 2a = 60$ und $2a + 2b = 80$ gilt. Daraus folgt: $c = 60 - 2a$ und $b = 40 - a$. Das setzt man ein:
$V(a) = a \cdot (40 - a) \cdot (60 - 2a)$ *(Klammern setzen!)*
$= a \cdot (2400 - 80a - 60a + 2a^2) = a \cdot (2a^2 - 140a + 2400) = 2a^3 - 140a^2 + 2400a$

Für die Definitionsmenge sollte man beachten, dass alle Streckenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad 40 - a > 0 \quad \text{und} \quad 60 - 2a > 0$$

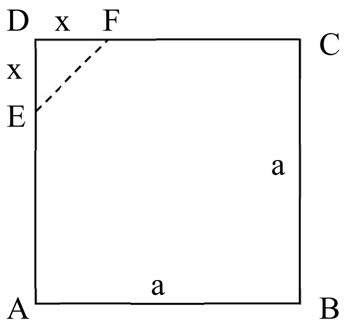
Ungleichungen lösen:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad a < 40 \quad \text{und} \quad a < 30$$

Alle drei Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < a < 30$; deshalb ist $D_V =]0;30[$. Also müssen am Schluss die Randwerte $V(0)$ und $V(30)$ überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größeres Volumen ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.

Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Das kann man umständlich machen ($2a^3 - 140a^2 + 2400a = 0$; 2a ausklammern; quadratische Gleichung mit Mitternachtsformel lösen) oder elegant ($a \cdot (40 - a) \cdot (60 - 2a) = 0$; Lösungen aus den drei Faktoren ablesen). Es ergibt sich $a_1 = 0$; $a_2 = 40$; $a_3 = 30$. Damit hat man dann auch $D_V =]0;30[$.

2013-AI/3
Hier sollte man sich nicht vom Text verwirren lassen – die Aufgabe ist viel einfacher, als sie zunächst klingt! Zunächst macht man die in 3.1 verlangte Skizze; hier folgt man dem, was im Text steht (es geht hier also mehr um Textverständnis, weniger um Mathematik!):

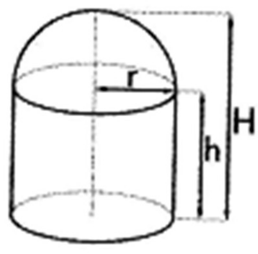


Für 3.2 sucht man sich zunächst die passende Formel heraus: Das Volumen einer Pyramide ist $V = \frac{1}{3}Gh$ mit der Grundfläche G und der Höhe h.
Die Höhe h ist in der Aufgabe schon angegeben: $h = \frac{\sqrt{2}}{2}x$.
Die Grundfläche ist ein Fünfeck – das sieht zunächst mal schwierig zu berechnen aus. Aber dieses Fünfeck entsteht ja dadurch, dass von dem ursprünglichen Quadrat ein Dreieck hochgebogen wird. Also ist G = Quadratfläche minus Dreiecksfläche $= a^2 - \frac{1}{2}x^2$. Damit ergibt sich für das Volumen:

$V_a(x) = \frac{1}{3} \cdot (a^2 - \frac{1}{2}x^2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}x$ *(Klammern setzen nicht vergessen!)*
$= \frac{\sqrt{2}}{6}x \cdot (a^2 - \frac{1}{2}x^2)$ *(Reihenfolge geändert und Brüche multipliziert)*
$= \frac{\sqrt{2}}{12}x \cdot (2a^2 - x^2)$ *(Faktor $\frac{1}{2}$ ausgeklammert)*
$= \frac{\sqrt{2}}{12}(2a^2x - x^3)$ *(x in die Klammer reinmultipliziert)*

Die Definitionsmenge ist zwar nicht gefragt, aber in der Aufgabe eigentlich sowieso schon angegeben: Dort steht ja $0 < x < a$. Also ist $D_V =]0;a[$. Deshalb sind am Schluss noch die Randwerte $V(0)$ und $V(a)$ zu überprüfen, ob sich dafür evtl. ein größeres Volumen ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.

3.0 Ein Hersteller von Tauchflaschen plant ein neues Tauchflaschenmodell. Die Wandstärke des Materials wird vernachlässigt. Die Tauchflasche hat vereinfacht die Form eines geraden Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel (siehe Abbildung). Die Firma gibt für die Zylinderhöhe h (in dm) die Bedingung $h(r) = \frac{4}{r} - \frac{3r}{2}$ vor. Bei den Berechnungen wird auf das Mitführen von Einheiten verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.



3 **3.1** Zeigen Sie, dass die Maßzahl des Volumens (in dm^3) der Tauchflasche in Abhängigkeit vom Zylinderradius r (in dm) durch die Funktion V mit der Funktionsgleichung $V(r) = -\frac{5}{6}r^3\pi + 4r\pi$ beschrieben werden kann.

Lösung:
Die Aufgabe sieht auf den ersten Blick schwierig aus, aber eigentlich ist nicht viel zu tun, da im Text schon viel vorgegeben ist.

Für das Volumen eines Zylinders gilt allgemein: $V_Z = \pi r^2 h$, für das Volumen einer Kugel gilt allgemein: $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$. Die gesamte Tauchflasche hat also das Volumen $V = V_Z + \frac{1}{2} V_K = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$. Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von r angegeben werden; h müssen wir also eigentlich noch bestimmen – das steht ja aber schon in der Aufgabe, $h = \frac{4}{r} - \frac{3r}{2}$! Das müssen wir nur noch einsetzen:

$V(r) = \pi r^2 \cdot \left(\frac{4}{r} - \frac{3r}{2}\right) + \frac{2}{3}\pi r^3$ *(Klammern setzen nicht vergessen!)*

$= \frac{4\pi r^2}{r} - \frac{3\pi r^3}{2} + \frac{2}{3}\pi r^3$ *(Klammer auflösen)*

$= 4\pi r + \left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right)\pi r^3$ *(vorne kürzen, hinten ausklammern)*

$= -\frac{5}{6}\pi r^3 + 4\pi r$ *(Brüche zusammenfassen, Reihenfolge umstellen)*

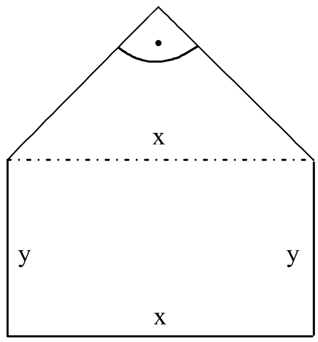
Die Definitionsmenge ist hier gar nicht gefragt. (Die wird dann in 3.2 vorgegeben.)

3. Summe von Längen gegeben, Flächeninhalt oder Volumen gesucht
Dies wurde in folgenden Prüfungen gefragt:
Flächeninhalt: Nachtermin 2000, 2001-AI/2, 2005-AI/4, 2008-AII/4, 2014-AI/4
Volumen: 2003-AII/3.2, 2008-AI/4, 2009-AII/4, 2011-AI/5, 2016-AI/4, 2018-AI/3, T2022-AII/2, 2023-AII/3

Wieder sucht man sich zunächst (eine) passende Formel(n) für den gesuchten Flächeninhalt / das gesuchte Volumen aus der Formelsammlung heraus. Die nötigen Streckenlängen kann man hier leider nicht direkt ablesen. Man schreibt sich die zusätzliche gegebene Bedingung (manchmal steht direkt dran, welche Summe was ergibt; manchmal ist auch die Rede vom Umfang, oder die Gesamtlänge der Kanten) hin und löst nach der zusätzlichen unbekannten Variablen auf (wenn man also z. B. ein Volumen in Abhängigkeit von a darstellen soll, in der Formel aber ein a und ein h stehen hat, dann löst man die zusätzliche Bedingung nach h auf – nicht nach a!!!). Das Ergebnis setzt man dann in die Formel für den Flächeninhalt / das Volumen ein. Bei Aufgaben zum Flächeninhalt ergeben sich hier meistens Funktionen mit Termen der Form $f(x) = ax^2 + bx$ mit $a < 0$, $b > 0$ (die Graphen sind also nach unten geöffnete Parabeln, und für die Ermittlung des Hochpunks braucht man eigentlich gar keine Ableitung!), bei Aufgaben zum Volumen meistens Funktionen mit Termen der Form $f(x) = ax^3 + bx^2$ mit $a < 0$, $b > 0$ (bei der Ableitung ergibt sich als eine Lösung dann immer $x_1 = 0$; diese Lösung ergibt praktisch immer keinen Sinn, also muss man sich nur die zweite Lösung anschauen, die hier immer positiv ist und auch immer zur Definitionsmenge gehört – außer, diese ist im Aufgabentext noch irgendwie besonders eingeschränkt).

Nachtermin 2000 *(Man braucht recht viel Geometrie-Grundwissen! Oder den Satz des Pythagoras – aber auf ungewöhnliche Weise... Die Aufgabe würde ich als „schwer“ einstufen.)*

2.0



Herr K. plant den Einbau eines Dachfensters. Dieses soll die Form eines Rechtecks mit darübergesetztem gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck haben (siehe Skizze!). Der Umfang U des gesamten Fensters beträgt 6 m.

2.1 Stellen Sie zunächst die Maßzahl $G(x)$ der Gesamtfläche des Fensters in Abhängigkeit von der Rechtecksbreite x dar. Ermitteln Sie auch die Definitionsmenge D_G der Funktion $G: x \mapsto G(x)$.
(Ergebnisse: $G(x) = 3x - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot x^2$; $D_G = \left]0; \frac{6}{1+\sqrt{2}}\right[$.) (6 BE)

Lösung:
Das Fenster besteht laut Aufgabentext und Zeichnung aus einem Rechteck und einem gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck.

- Der Flächeninhalt des Rechtecks ist Länge mal Breite, mit den Bezeichnungen in der Aufgabe also $x \cdot y$.
- Der Flächeninhalt des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ist die Hälfte seiner Grundlinie mal seiner Höhe. Die Grundlinie ist x, die Höhe ist nicht direkt gegeben.
- Das Dreieck ist aber ein halbes Quadrat. x ist eine Diagonale, die Höhe ist die Hälfte der anderen Diagonale. Da die beiden Diagonalen gleich lang sind, muss die Höhe also gleich x/2 sein.
- (Alternativ: Da die Spitze des Dreiecks aber auf dem Thaleskreis um die Grundlinie liegen muss (weil das Dreieck ja rechtwinklig ist) und weil der Mittelpunkt des Thaleskreises gleich dem Fußpunkt der Höhe ist, folgt, dass die Höhe gleich dem Radius des Thaleskreises sein muss, also halb so lang wie die Grundseite, also x/2.)

- Damit ist der Flächeninhalt des Dreiecks gleich $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2} x = \frac{1}{4} x^2$

Damit ist insgesamt: $G(x) = x \cdot y + \frac{1}{4} x^2$.

Der Flächeninhalt soll (nur) in Abhängigkeit von x angegeben werden; y müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht, dass der gesamte Umfang des Fensters 6 betragen soll. Der Umfang besteht aus zwei Seiten der Länge y, einer Seite der Länge x und den beiden Schenkeln des Dreiecks; nennen wir diese mal a. Also ist $y + y + x + a + a = 6 \Rightarrow 2y + x + 2a = 6$.
Bevor wir weiterkommen, müssen wir also a berechnen.

- Das Dreieck ist ein halbes Quadrat, x ist eine Diagonale darin.
- Zwischen der Seitenlänge a eines Quadrat und der Länge seiner Diagonalen x besteht aber immer der Zusammenhang $x = \sqrt{2}\, a$. Es folgt: $a = \frac{x}{\sqrt{2}}$.
- (Alternativ: Das Dreieck ist rechtwinklig mit den Katheten a und a und der Hypotenuse x, also gilt mit dem Satz des Pythagoras: $a^2 + a^2 = x^2 \Rightarrow 2a^2 = x^2 \Rightarrow a^2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a = \frac{x}{\sqrt{2}}$.)
- Das könnte man so stehen lassen; üblich ist es aber, die Wurzel aus dem Nenner weg zu bekommen („Nenner rational machen“). Dafür erweitert man den Bruch noch mit $\sqrt{2}$: $a = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} x$.

Das setzen wir oben in die Bedingung für den Umfang ein:

$2y + x + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} x = 6 \Rightarrow 2y + x + \sqrt{2}\, x = 6 \Rightarrow 2y = 6 - x - \sqrt{2}\, x \Rightarrow y = 3 - \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} x$ *(Vorsicht: Auf der rechten Seite muss man* ***alle*** *Terme durch 2 teilen, wenn man links durch 2 teilt!)*

Das Ergebnis setzen wir nun in die Formel für G ein:

$G(x) = x \cdot (3 - \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} x) + \frac{1}{4} x^2$ *(Klammern setzen!)*

$= 3x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^2$ *(Klammer ausmultiplizieren)*

$= 3x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, x^2 - \frac{1}{4} x^2$ *(minus ein halbes x^2 plus ein viertel x^2 ist minus ein viertel x^2)*

$= 3x - (\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4})x^2$ *(das Minus nach vorne, das x^2 nach hinten ausklammern; in der Klammer die VZ umdrehen!)*

(Uff. Hatte ich schon erwähnt, dass die Aufgabe schwierig ist...?)

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten: $x > 0$ und $3 - \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} x > 0$

In der zweiten Ungleichung muss man das $-\frac{1}{2}$ und das x ausklammern:

$$x > 0 \quad \text{und} \quad 3 - \tfrac{1}{2} x \cdot (1 + \sqrt{2}) > 0$$

Multipliziert man mit 2 und teilt durch $(1 + \sqrt{2})$, folgt schließlich:

$$x > 0 \quad \text{und} \quad x < \frac{6}{1+\sqrt{2}},$$

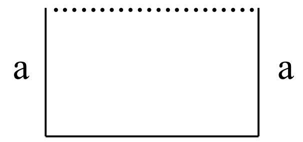
deshalb ist $D_G =]0; \frac{6}{1+\sqrt{2}}[$. Also müssen am Schluss die Randwerte G(0) und $G(\frac{6}{1+\sqrt{2}})$ überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.

Vorsicht: Die alternative Methode, die Definitionsmenge aus den Nullstellen der Funktion G zu bestimmen, funktioniert hier nicht! Die Nullstellen von G sind $x_1 = 0$ und $x_2 = \dfrac{3}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{4}} = \dfrac{6}{2\sqrt{2}+1}$, also würde man hier $D_G = \left]0; \dfrac{6}{2\sqrt{2}+1}\right[$ heraus bekommen – was offensichtlich nicht dasselbe ist wie das (richtige) Ergebnis oben!

Übrigens: Wenn man in 2.2 dann ableitet, sollte man sich von dem $(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{4})$ nicht verwirren lassen – das ist einfach ein konstanter Faktor, bleibt beim Ableiten also einfach vor der Klammer stehen! Man könnte es auch näherungsweise berechnen (in 2.2 steht ja, dass man auf drei Nachkommastellen runden soll), also $(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{4}) \approx 0{,}957$; besser ist es aber, wenn man den Faktor erst mal stehen lässt und erst das Endergebnis dann rundet.

2001-AI *(Diese Aufgabe ist so ziemlich die einfachste Extremwertaufgabe, die ich kenne!)*

2.0 Im Geometrie-Unterricht der 5.Klasse findet ein „Wettbewerb" statt. Jedes der Kinder erhält ein Stück Draht der Länge 15 cm. Durch rechtwinkliges Aufbiegen je eines Stückes der Länge a an beiden Enden soll daraus ein U-förmiges Gebilde entstehen. Denkt man sich nun die beiden Drahtenden durch eine unsichtbare Linie verbunden, so erhält man ein Rechteck (siehe Skizze). Sieger des Wettbewerbs ist dasjenige Kind, dessen Rechteck den größten Flächeninhalt hat.



2.1 Stellen Sie die Maßzahl A(a) der Rechtecksfläche in Abhängigkeit von a dar; bestimmen Sie die Definitionsmenge D_A der Funktion A sinnvoll.
(Teilergebnis: $A(a) = 15a - 2a^2$) (4 BE)

Lösung:
Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist Länge mal Breite (welche der Seiten man die Länge und welche die Breite nennt, ist natürlich wurscht!). In der Aufgabe und der Skizze steht schon, dass die eine Seitenlänge a ist; die andere nennen wir mal b (wir könnten sie auch Hans nennen... auch das ist wurscht!). Also ist erst mal $A = a \cdot b$.
Der Flächeninhalt soll (nur) in Abhängigkeit von a angegeben werden; b müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht aber auch, dass der Draht insgesamt 15 (cm) lang ist. Also muss gelten: $a + b + a = 15$
$\Rightarrow 2a + b = 15 \Rightarrow b = 15 - 2a$
Das setzen wir nun ein: $A = a \cdot (15 - 2a)$ *(Klammern setzen!)*
$= 15a - 2a^2$
Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad 15 - 2a > 0$$

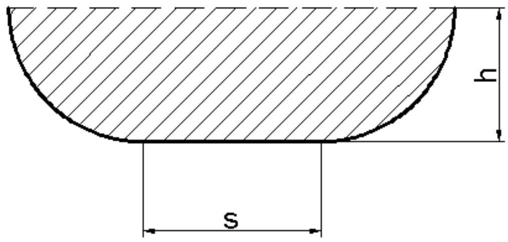
Ungleichungen lösen:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad a < 7{,}5$$

Beide Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < a < 7{,}5$; deshalb ist $D_A =]0;7{,}5[$. Also müssen am Schluss die Randwerte A(0) und A(7,5) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.
Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion A bestimmen. Das kann man umständlich machen ($15a - 2a^2 = 0$; 2a ausklammern; Lösungen ablesen – oder noch komplizierter mit der Mitternachtsformel!) oder elegant ($a \cdot (15 - 2a) = 0$; Lösungen aus den beiden Faktoren ablesen). Es ergibt sich $a_1 = 0$; $a_2 = 7{,}5$. Damit hat man dann auch $D_A =]0;7{,}5[$.

2005-AI

4.0 Der Querschnitt des abgebildeten, oben offenen Kanals ist begrenzt durch zwei Viertelkreisbögen und durch eine Strecke der Länge $s \geq 0$. Die Höhe des Kanals ist h. *(Skizze: nächste Seite)*



4.1 Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche A(h) in Abhängigkeit von der Höhe h, wenn der „Umfang" (2 Viertelkreisbögen und Strecke s) 5 LE beträgt.
Ermitteln Sie die größtmögliche geometrisch sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $A: h \mapsto A(h)$.
[Mögliches Teilergebnis: $A(h) = 5h - \frac{1}{2}h^2\pi$] (7 BE)

Lösung:
Der Querschnitt des Kanals besteht aus zwei Viertelkreisen und einem Rechteck. Nach der Skizze haben die Viertelkreise den Radius h, das Rechteck hat die beiden Seitenlängen h und s. Also ist der Flächeninhalt: $A = 2 \cdot A_{\text{Viertelkreis}} + A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2} \cdot A_{\text{Kreis}} + A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2}\pi h^2 + h \cdot s$.
Der Flächeninhalt soll (nur) in Abhängigkeit von h angegeben werden; s müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht, dass die beiden Viertelkreisbögen und die Strecke s zusammen 5 LE haben. Also: 2·Viertelkreisbogen + s = 5 ➔ $\frac{1}{2}$·Kreisumfang + s = 5 ➔ $\frac{1}{2} \cdot 2\pi h + s = 5$ ➔ $\pi h + s = 5$
➔ $s = 5 - \pi h$.
Das setzen wir nun ein: $A = \frac{1}{2}\pi h^2 + h \cdot (5 - \pi h)$ *(Klammern setzen!)*
$= \frac{1}{2}\pi h^2 + 5h - \pi h^2$ *(Klammer auflösen)*
$= 5h - \frac{1}{2}\pi h^2$ *(ein halbes πh^2 minus ein ganzes πh^2 ist minus ein halbes πh^2)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$h > 0 \quad \text{und} \quad 5 - \pi h > 0$$

Ungleichungen lösen:

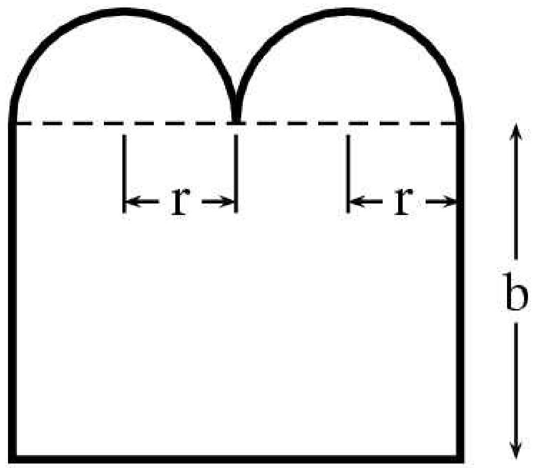
$$h > 0 \quad \text{und} \quad h < 5/\pi$$

Beide Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < h < 5/\pi$; deshalb ist $D_A =]0;5/\pi[$. Also müssen am Schluss die Randwerte A(0) und A(5/π) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert. *(Ja, ich weiß, die meisten rechnen nicht gerne mit π und tippen das lieber in den Taschenrechner ein (oder benutzen einfach gleich 3,14) – aber in der Aufgabe steht nichts von Runden! Um ein Gefühl für den Wert zu bekommen, kann man sich gerne mal mit dem Taschenrechner ausrechnen, dass 5/π etwa 1,59 ist; trotzdem sollte man das* ***exakte*** *Ergebnis angeben!)*

Vorsicht: Die alternative Methode, die Definitionsmenge aus den Nullstellen der Funktion A zu bestimmen, funktioniert hier nicht! Die Nullstellen von A sind (bekommt man z.B. durch Ausklammern von $\frac{1}{2}\pi h$, oder umständlicher mit der Mitternachtsformel) $h_1 = 0$ und $h_2 = 10/\pi$, also würde man hier $D_A =]0;10/\pi[$ heraus bekommen – was offensichtlich nicht dasselbe ist wie das (richtige) Ergebnis oben!

2008-AII *(von den Extremwertaufgaben mit Flächen fand ich diese am schwersten!)*

4.0 Ein Doppelrundbogenfenster (siehe Zeichnung) wird von drei Seiten eines Rechtecks sowie von zwei Halbkreisen (jeweils Radius r) begrenzt.
Der Umfang des Fensters beträgt 10 m. (Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet!)



4.1 Stellen Sie den Flächeninhalt A(r) des Fensters in Abhängigkeit vom Radius r der Halbkreise dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A an. (7 BE)
[Teilergebnis: $A(r) = 20r - (3\pi + 8) \cdot r^2$]

Lösung:

Das Fenster besteht aus zwei Halbkreisen und einem Rechteck. Nach der Skizze haben die Halbkreise den Radius r, das Rechteck hat die beiden Seitenlängen b und 4r. Also ist der Flächeninhalt: $A = 2 \cdot A_{Halbkreis} + A_{Rechteck} = A_{Kreis} + A_{Rechteck} = \pi r^2 + b \cdot 4r$.

Der Flächeninhalt soll (nur) in Abhängigkeit von r angegeben werden; b müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht, dass der gesamte Umfang 10 (m) sein soll. Der Umfang besteht aus zwei Halbkreisbögen, den beiden Seiten der Länge b und der Strecke unten mit Länge 4r. Also gilt: 2·Halbkreisbogen + b + b + 4r = 10 ➔ Kreisumfang + 2b + 4r = 10 ➔ $2\pi r + 2b + 4r = 10$
➔ $2b = 10 - 2\pi r - 4r$ ➔ $b = 5 - \pi r - 2r$ *(Vorsicht: Auf der rechten Seite muss man **alle** Terme durch 2 teilen, wenn man links durch 2 teilt!)*

Das setzen wir nun ein: $A = \pi r^2 + (5 - \pi r - 2r) \cdot 4r$ *(Klammern setzen!)*
$= \pi r^2 + 20r - 4\pi r^2 - 8r^2$ *(Klammer auflösen)*
$= 20r - 3\pi h^2 - 8r^2$ *(ein πr^2 minus ein $4\pi r^2$ sind minus $3\pi r^2$)*
$= 20r - (3\pi + 8)\, r^2$ *(r^2 nach hinten, das Minus nach vorne ausklammern, in der Klammer die VZ umdrehen!)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$r > 0 \quad \text{und} \quad 5 - \pi r - 2r > 0$$

Bei der zweiten Ungleichung sollte man das r und das Minus ausklammern (auf VZ achten!):

$$r > 0 \quad \text{und} \quad 5 - (\pi + 2) > 0$$

Jetzt kann man die zweite Ungleichung auch lösen:

$$r > 0 \quad \text{und} \quad r < \frac{5}{\pi + 2}$$

Beide Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < r < \frac{5}{\pi + 2}$; deshalb ist $D_A =]0; \frac{5}{\pi + 2}[$. Also müssen am Schluss die Randwerte A(0) und $A(\frac{5}{\pi + 2})$ überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert. *(Hier steht zwar noch nichts von Runden, im Aufgabenteil 4.2 soll man dann aber r auf drei Nachkommastellen angeben – also wäre es hier* *wohl in Ordnung, wenn man auch in der Definitionsmenge (und dann auch beim zweiten Randwert) schon rundet:* D_A =]0;0,972[. *Trotzdem ist es natürlich besser, (auch) das* ***exakte*** *Ergebnis anzugeben!)*

Vorsicht: Die alternative Methode, die Definitionsmenge aus den Nullstellen der Funktion A zu bestimmen, funktioniert hier nicht! Die Nullstellen von A sind (bekommt man z.B. durch Ausklammern von $(3\pi+8)r$, oder umständlicher mit der Mitternachtsformel) $r_1 = 0$ und $r_2 = \frac{20}{3\pi+8}$, also würde man hier D_A =]0; $\frac{20}{3\pi+8}$[bzw. gerundet]0;1,148[heraus bekommen – was offensichtlich nicht dasselbe ist wie das (richtige) Ergebnis oben!

2003-AII *(Diese Aufgabe ist zwar etwas seltsam, aber trotzdem nicht schwierig.)*

3.1 Eine natürliche Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Beispiel: 6 ist vollkommen, da 6 = 1 + 2 + 3. Zeigen Sie, dass auch 28 eine vollkommene Zahl ist. (2 BE)

3.2.0 Eine Fachoberschule beschließt, ein Denkmal zu errichten. Es soll die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche haben. Sie wird in der Hinsicht vollkommen sein, dass die Summe aus dem Umfang der Grundfläche und der Pyramidenhöhe 28 dm ergibt.

3.2.1 Bestimmen Sie das Volumen V(s) der Pyramide in Abhängigkeit von der Länge s einer Quadratseite und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V an. (4 BE)

(Teilergebnis: $V(s) = -\frac{4}{3}(s^3 - 7s^2)$)

Lösung:

Der Aufgabenteil 3.1 ist zwar keine Extremwertaufgabe, aber ungewöhnlich genug, dass ich wohl lieber auch noch was dazu schreibe. (Diese Aufgabe gehört übrigens zum mathematischen Gebiet der „Zahlentheorie“, das man in der Schule kaum behandelt – so ziemlich das einzige, was man dazu macht, sind die Primzahlen.)

Laut Aufgabe ist eine Zahl vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Ein Teiler einer natürlichen Zahl ist dabei eine natürliche Zahl, durch die man ohne Rest teilen kann (das sollte man eigentlich wissen); echte Teiler einer Zahl sind alle Teiler außer der Zahl selbst.

Hier sollen wir zeigen, dass 28 vollkommen ist. Wir müssen also zeigen, dass 28 die Summe ihrer echten Teiler ist. Suchen wir uns also alle natürlichen Zahlen heraus, durch die 28 ohne Rest teilbar ist: 1, 2, 4, 7, 14, 28. Die 28 selbst brauchen wir aber nicht, weil wir ja nur die echten Teiler haben wollen. Die echten Teiler addieren wir nun alle: 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28. Die Summe der echten Teiler von 28 ergibt also wieder 28. Damit ist 28 eine vollkommene Zahl – passt.

Jetzt zur eigentlichen Extremwertaufgabe (ab 3.2). Eine Pyramide hat allgemein das Volumen $V = \frac{1}{3}Gh$ mit der Grundfläche G und der Höhe h. Laut Aufgabe ist die Grundfläche hier ein Quadrat mit Seitenlänge s, also ist $G = s^2$ und damit $V = \frac{1}{3}s^2 h$.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von s angegeben werden; h müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht, dass die Summe aus dem Umfang der Grundfläche und der Höhe 28 (dm) sein soll. Die Grundfläche ist ein Quadrat der Seitenlänge s, hat also den Umfang 4s. Also gilt: 4s + h = 28

➔ h = 28 – 4s

Das setzen wir nun ein: $V = \frac{1}{3}s^2 \cdot (28 - 4s)$ *(Klammern setzen!)*

$= -\frac{4}{3}s^2(-7 + s)$ *(–4 ausklammern, VZ in Klammer umdrehen)*

$= -\frac{4}{3}(s^3 - 7s^2)$ *(s^2 in die Klammer rein multiplizieren, Reihenfolge ändern)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$s > 0 \quad \text{und} \quad 28 - 4s > 0$$

Ungleichungen lösen:

$$s > 0 \quad \text{und} \quad s < 7$$

Beide Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < s < 7$; deshalb ist $D_V =]0;7[$. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(7) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.
Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Das kann man umständlich machen ($-\frac{4}{3}(s^3 - 7s^2) = 0$; s^2 ausklammern; Lösungen ablesen) oder elegant ($\frac{1}{3}s^2 \cdot (28 - 4s) = 0$; Lösungen aus den beiden Faktoren ablesen). Es ergibt sich $s_{1,2} = 0$; $s_3 = 7$. Damit hat man dann auch $D_V =]0;7[$.

2008-AI/4 *(Von den Extremwertaufgaben zum Volumen ist das die einfachste, die ich kenne.)*

4.0 Aus einem Stück Draht der Länge 72 [cm] sollen die Kanten eines Quaders geformt werden, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a bzw. 2a ist.

4.2 Berechnen Sie zunächst das Volumen V(a) des Quaders in Abhängigkeit von der Länge a. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge an.
[Teilergebnis: $V(a) = 36a^2 - 6a^3$.] (6 BE)

Lösung:
Das Volumen eines Quaders ist allgemein Länge mal Breite mal Höhe. Länge und Breite sind in der Aufgabe schon angegeben (die „Grundfläche [ist] ein Rechteck mit den Seitenlängen a und 2a“), zur Höhe ist nichts gesagt – nennen wir die einfach mal h (oder meinetwegen auch x oder H oder Hans oder sonst wie). Also ist $V = a \cdot 2a \cdot h = 2a^2h$
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von a angegeben werden; h müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht, dass der Draht, aus dem die Kanten geformt werden, die Länge 72 (cm) hat. Der Quader hat 4 Kanten der Länge a, 4 Kanten der Länge 2a und 4 Kanten der Länge h (wer’s nicht glaubt, macht sich eine Skizze!). Also gilt: $4 \cdot a + 4 \cdot 2a + 4 \cdot h = 72$ ➔ $12a + 4h = 72$ ➔ $4h = 72 - 12a$
➔ $h = 18 - 3a$ (*Vorsicht: auf der rechten Seite muss man **beide** Terme durch 4 teilen, wenn man links durch 4 teilt!)*
Das setzen wir nun ein: $V = 2a^2 \cdot (18 - 3a)$ *(Klammern setzen!)*
$= 36a^2 - 6a^3$ *(Klammer ausmultiplizieren)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad 18 - 3a > 0$$

Ungleichungen lösen:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad a < 6$$

Beide Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < a < 6$; deshalb ist $D_V =]0;6[$. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(6) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.
Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Das kann man umständlich machen ($36a^2 - 6a^3 = 0$; a^2 ausklammern; Lösungen ablesen) oder elegant ($2a^2 \cdot (18 - 3a) = 0$; Lösungen aus den beiden Faktoren ablesen). Es ergibt sich $a_{1,2} = 0$; $a_3 = 6$. Damit hat man dann auch $D_V =]0;6[$.

2009-AII

4.0 Die Gebührenordnung des Paketdienstes „Paket Ahoi“ enthält folgende Klausel: „Bei Päckchen in Zylinderform darf die Summe aus der Höhe h des Zylinders und dem Durchmesser d des Grundkreises 100 cm nicht überschreiten.“ Auf Einheiten wird im Folgenden verzichtet!

4.1 Berechnen Sie das Volumen V(d) eines solchen Päckchens, wenn die in der Gebührenordnung erwähnte Summe genau 100 cm beträgt. Geben Sie auch eine geeignete Definitionsmenge an. (5 BE)
[Mögliches Teilergebnis: $V(d) = \pi \cdot \left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3\right)$]

Lösung:
Das Volumen eines Zylinders ist $V = \pi r^2 h$ mit dem Radius r und der Höhe h.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von d angegeben werden; hier müssen wir also noch r und h bestimmen. Für r ist das einfach: Der Radius ist ja immer die Hälfte des Durchmessers, also ist r = $\frac{d}{2}$. Damit fehlt noch h. In der Aufgabe steht, dass die „Summe genau 100 cm beträgt"; weiter oben steht, welche Summe gemeint ist: „die Summe aus der Höhe h des Zylinders und dem Durchmesser d des Grundkreises". Also gilt: h + d = 100 ➔ h = 100 – d

Beides setzen wir nun ein: $V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot (100 - d)$ *(bei beiden Faktoren Klammern setzen!!)*

$= \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot (100 - d)$ *(vordere Klammer auflösen)*

$= \pi \cdot \left(\frac{100d^2}{4} - \frac{d^3}{4}\right)$ *($\frac{d^2}{4}$ in die Klammer rein multiplizieren)*

$= \pi \cdot \left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3\right)$ *(ein wenig elementares Bruchrechnen anwenden)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$d > 0 \quad \text{und} \quad 100 - d > 0$$

Ungleichungen lösen:

$$d > 0 \quad \text{und} \quad d < 100$$

Beide Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für 0 < d < 100; deshalb ist D_V =]0;100[. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(100) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größeres Volumen ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.

Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Das kann man umständlich machen ($\pi \cdot \left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3\right) = 0$; d^2 ausklammern; Lösungen ablesen) oder elegant ($\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot (100 - d) = 0$; Lösungen aus den beiden Faktoren ablesen). Es ergibt sich $d_{1,2} = 0$; $d_3 = 100$. Damit hat man dann auch D_V =]0;100[.

Übrigens: Wenn man in Teil 4.2 dann ableitet, sollte man sich von dem π nicht verwirren lassen – das ist einfach ein konstanter Faktor, bleibt beim Ableiten also einfach vor der Klammer stehen! Wenn man dann die erste Ableitung gleich Null setzt, kann man durch das π teilen – und weg ist es, es stört also nicht beim Lösen der Gleichung!

2011-AI/5 *(Diese Aufgabe ist ziemlich schwierig – aber wenn man systematisch vorgeht, dann klappt das schon irgendwie!)*

Lösung:

Zunächst muss man darauf kommen, dass die Praline ein Prisma ist (die Zeichnung ist hier nicht ganz klar – rechts sieht es so aus, als ob in der Stirnfläche ein Knick wäre; es ist aber so gemeint, dass die Stirnfläche flach ist!). Das Volumen eines Prismas ist das Produkt aus der Grundfläche G und der Höhe. ***Vorsicht:*** Die Höhe des Prismas ist *nicht* das h aus der Skizze, sondern das x! (Die Höhe des Prismas ist immer der Abstand der beiden parallelen Flächen!) Die Grundfläche muss man noch berechnen. Laut Zeichnung besteht die Grundfläche aus einem Trapez mit Grundseite x, Oberseite 0,5x und Höhe $\frac{1}{4}$ h und aus einem (gleichschenkligen) Dreieck mit Grundseite 0,5x und Höhe $\frac{3}{4}$ h. (***Vorsicht***: Auch wenn es in der Zeichnung so aussieht – das Dreieck ist *nicht* gleichseitig!)

Also ist $G = \frac{x + 0{,}5x}{2} \cdot \frac{1}{4}h + \frac{1}{2} \cdot 0{,}5x \cdot \frac{3}{4}h = \frac{1{,}5x}{2} \cdot \frac{1}{4}h + \frac{1}{4}x \cdot \frac{3}{4}h = \frac{3}{4}x \cdot \frac{1}{4}h + \frac{1}{4}x \cdot \frac{3}{4}h$

$= \frac{3}{16}xh + \frac{3}{16}xh = \frac{6}{16}xh = \frac{3}{8}xh$ *(wer Bruchrechnen kann, ist hier klar im Vorteil...!)*

Damit ist das Volumen: $V = \frac{3}{8}xh \cdot x = \frac{3}{8}x^2h$.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von x angegeben werden; h müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht, dass die „Summe aus Höhe h, Breite und Länge 8 cm“ beträgt. Aus der Zeichnung sieht man, dass Breite und Länge jeweils gleich x sind. Also gilt: $h + x + x = 8 \Rightarrow h = 8 - 2x$

Das setzen wir nun ein: $V = \frac{3}{8}x^2 \cdot (8 - 2x)$ *(Klammern setzen!)*

$= \frac{3}{8}x^2 \cdot 8 - \frac{3}{8}x^2 \cdot 2x$ *(Klammer auflösen)*

$= 3x^2 - \frac{3}{4}x^3 = -0{,}75x^3 + 3x^2$ *(noch mal: Bruchrechnen!)*

(Uff – fertig! Die Aufgabe ist wirklich umständlich...)

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$x > 0 \quad \text{und} \quad 8 - 2x > 0$$

Ungleichungen lösen:

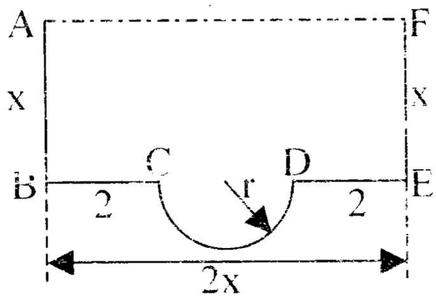
$$x > 0 \quad \text{und} \quad x < 4$$

Beide Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < x < 4$; deshalb ist $D_V =]0;4[$. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(4) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.

Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Das kann man umständlich machen ($-0{,}75x^3 + 3x^2 = 0$; $-0{,}75x^2$ ausklammern; Lösungen ablesen) oder elegant ($\frac{3}{8}x^2 \cdot (8 - 2x) = 0$; Lösungen aus den beiden Faktoren ablesen). Es ergibt sich $x_{1,2} = 0$; $x_3 = 4$. Damit hat man dann auch $D_V =]0;4[$.

2014-AI/4 *(die Aufgabe ist viel einfacher, als sie aussieht!)*

4.0 Der Querschnitt eines Abflusskanals ist begrenzt durch ein Rechteck und einen Halbkreis mit Radius r. Alle Angaben sind in Meter. Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet.



4.1 Zeigen Sie, dass sich die Maßzahl A(x) der Querschnittsfläche des Kanals in Abhängigkeit von x durch $A(x) = (2 + 0{,}5\pi)x^2 - 2\pi x + 2\pi$ darstellen lässt. (5 BE)

4.2 Die Strecken [AB], [BC], [DE] und [EF] besitzen in der Summe höchstens eine Länge von 12 m. Weisen Sie nach, dass dann für die sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A der Funktion $A: x \mapsto A(x)$ gilt: $D_A =]2;4]$. (3 BE)

4.4 Nun sei x = 4. Der Kanal ist bis 1 m unter der Oberkante gefüllt. Berechnen Sie, wie viel Prozent der Querschnittsfläche des Kanals ausgelastet sind. (3 BE)

Lösung:

4.1 Gesucht ist der Flächeninhalt; laut Angabe besteht dieser aus einem Rechteck und einem Halbkreis. Das Rechteck hat laut Skizze die Seitenlängen x und 2x, der Halbkreis den Radius r. Also ist erst mal:

$$A = A_{Rechteck} + 0{,}5 \cdot A_{Kreis} = x \cdot 2x + 0{,}5\pi r^2$$

Laut Aufgabe soll man den Flächeninhalt nur in Abhängigkeit von x schreiben; r müssen wir also noch rausbekommen. Dazu schauen wir nochmal in die Skizze, insbesondere die untere Seite des Rechtecks. Dann sehen wir, dass

$$2 + 2r + 2 = 2x$$

gilt. Also: $4 + 2r = 2x \mid -4 \Rightarrow 2r = 2x - 4 \mid :42 \Rightarrow r = x - 2$ (*auf der rechten Seite beides teilen!)*
Das setzen wir jetzt ein:

$$\begin{aligned} A(x) &= x \cdot 2x + 0{,}5\pi \cdot (x-2)^2 && \textit{(Klammern setzen!)} \\ &= 2x^2 + 0{,}5\pi \cdot (x^2 - 4x + 4) && \textit{(vorne zusammenfassen, hinten 2. bin Formel)} \\ &= 2x^2 + 0{,}5\pi x^2 - 2\pi x + 2\pi && \textit{(Klammer auflösen)} \\ &= (2 + 0{,}5\pi)x^2 - 2\pi x + 2\pi && \textit{(bei den ersten beiden Summanden } x^2 \textit{ ausklammern)} \end{aligned}$$

4.2 Benutzen wir erst mal das, was in der Aufgabe steht. Die Strecken [AB] und [EF] haben laut Skizze jeweils die Längen x, die Strecken [BD] und [DE] die Längen 2. Also muss gelten:

$$x + 2 + 2 + x \leq 12 \Rightarrow 2x + 4 \leq 12 \mid -4 \Rightarrow 2x \leq 8 \mid :2 \Rightarrow x \leq 4$$

Außerdem muss man wie üblich beachten, dass alle Längen positiv sein müssen, also $x > 0$ und $r > 0$. Die zweite Ungleichung ergibt, wenn wir das r von oben einsetzen:

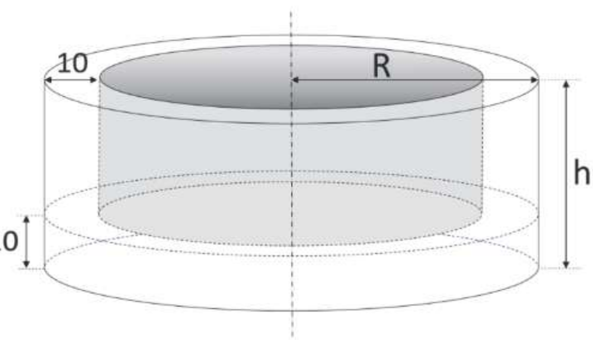
$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Alles zusammengenommen führt auf $2 < x \leq 4$, also ist die Definitionsmenge, wie in der Aufgabe angegeben, tatsächlich $D_A =]2;4]$. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(4) überprüft werden.
Übrigens:
1) Die Funktion A hat gar keine Nullstellen, also kann man die Definitionsmenge hier nicht aus den Nullstellen ermitteln!
2) Die relative Minimalstelle, die man in 4.3 ausrechnet, liegt gar nicht in der Definitionsmenge – also **muss** der Extremwert hier an einem der Ränder liegen!

4.4 Zunächst berechnet man mal, wie groß die Querschnittsfläche für x = 4 überhaupt ist:
$A(4) = (2 + 0{,}5\pi) \cdot 4^2 - 2\pi \cdot 4 + 2\pi = 32 + 2\pi \; (\approx 38{,}28)$
Der Kanal ist aber nur bis 1 m unter der Oberkante gefüllt; von dieser berechneten Fläche müssen wir also einen Teil abziehen. Oben fehlt ein Rechteck mit Höhe 1 (m) und Breite $2x = 2 \cdot 4 = 8$, also mit dem Flächeninhalt $1 \cdot 8 = 8$. Damit ist insgesamt nur die Fläche $A(4) - 8 = 24 + 2\pi \; (\approx 30{,}28)$ ausgefüllt.
Der Rest der Aufgabe ist simple Prozentrechnung. Man kann z. B. so rechnen (alternativ: Dreisatz!):
$(A(4) - 8)/(A(4)) = (24 + 2\pi)/(32 + 2\pi) \approx 30{,}28/38{,}28 \approx 0{,}791 = 79{,}1\%$
Beachte: Diesen Aufgabenteil kann man auch lösen, wenn man Teil 4.3 nicht gelöst hat!

2016-AI/4 *eine eher umständliche Aufgabe…*

4.0 Ein Planschbecken soll entsprechend folgender Skizze hergestellt werden, wobei der Boden und die Wand luftgefüllte Hohlkammern mit einer Dicke von 10 cm sind. Die Summe aus Radius R und Höhe h soll konstant 90 cm betragen.



4.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, welche die Maßzahl des Volumens des mit Luft gefüllten Teils des Planschbeckens in Abhängigkeit von R beschreibt. (6 BE)
[Mögliches Ergebnis: $V(R) = \pi(-10R^2 + 1700R - 8000)$]

Lösung:
Vorsicht, Aufgabe sorgfältig lesen! Gefragt ist hier nicht das Volumen des mit Wasser gefüllten Bereichs (also das, was grau schraffiert ist), sondern das Volumen des mit Luft gefüllten Bereichs (also das Weiße)!

Diesen Bereich kann man sich als Summe des Zylinders unten und des Zylinderrings oben ausrechnen oder (meiner Ansicht nach etwas einfacher) als Differenz aus dem gesamten Zylinder und dem grau schraffierten Zylinder.

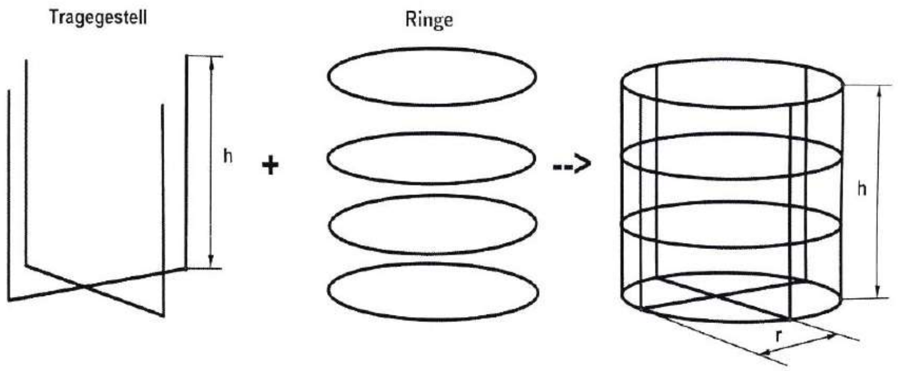
Laut Merkhilfe ist das Volumen eines Zylinders: $V = \pi r^2 h$. Der gesamte Zylinder hat den Radius R und die Höhe H, also das Volumen $V_{ges} = \pi R^2 h$. Beim grau schraffierten Zylinder kann man aus Text und Skizze entnehmen, dass sein Radius gleich R – 10 ist und seine Höhe h – 10; also ist sein Volumen $V_{grau} = \pi(R-10)^2(h-10)$ *(Klammern setzen!)*.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von R angegeben werden; wir müssen also noch H bestimmen. Im Aufgabentext steht dazu, dass die Summe aus Radius R und Höhe h gleich 90 sein soll, also R + h = 90 ➔ h = 90 – R. Setzen wir das erst mal oben ein:
$V_{ges} = \pi R^2(90-R)$ und $V_{grau} = \pi(R-10)^2\big((90-R)-10\big) = \pi(R-10)^2(80-R)$
(Die meisten Klammern sind hier nötig, nur die um 90 – R in V_{grau} nicht!)

Der Rest ist nun „nur“ noch Algebra (Klammern ausmultiplizieren, u.a. mit binomischer Formel) – relativ aufwendig, aber nicht eigentlich schwierig… Es empfiehlt sich in allen Rechnungen sehr, das π außerhalb der Klammern stehen zu lassen, nicht mit rein zu multiplizieren! (Steht ja auch im gegebenen Teilergebnis außerhalb der Klammer.)
$V_{ges} = \pi R^2(90-R) = \pi(-R^3+90R^2)$
$V_{grau} = \pi(R^2-20R+100)(80-R) = \pi(80R^2-R^3-1600R+20R^2+8000-100R$
$\quad = \pi(-R^3+100R^2-1700R+8000)$
Damit folgt dann für das gesuchte Volumen:
$V(R) = V_{ges} - V_{grau} = \pi(-R^3+90R^2) - \pi(-R^3+100R^2-1700R+8000)$
$\quad = \pi(-R^3+90R^2+R^3-100R^2+1700R-8000) = \pi(-10R^2+1700R-8000)$
(Eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge ist hier gar nicht gefragt, die wird in 4.2 dann vorgegeben.)
Übrigens: Wenn man in 4.3 dann ableitet, sollte man sich von dem π nicht verwirren lassen. Beim Ableiten bleibt es einfach stehen, bei der Gleichung kann man dadurch teilen und es damit loswerden.

2018-AI

3.0 Ein Bastler möchte sich mithilfe folgender Bauanleitung das Grundgerüst für einen zylinderförmigen Abfallkorb mit Höhe h und Radius r (alle Längen in Meter gemessen) aus Draht bauen (siehe Skizze).



Für das Vorhaben kauft er sich Draht mit der Länge 6 m. Die Einzelteile werden selbst hergestellt und zusammengelötet. Die Dicke des Drahts ist zu vernachlässigen. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

3.1 Bestimmen Sie die Maßzahl $V(r)$ des Volumens des Abfallkorbs in Abhängigkeit von r.

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = \pi\left(\frac{3}{2}r^2 - r^3 - 2\pi r^3\right)$] (5 BE)

Lösung:
Das Volumen eines Zylinders ist $V = \pi r^2 h$ mit dem Radius r und der Höhe h.
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von r angegeben werden; wir müssen also noch h bestimmen. In der Aufgabe ist vorgegeben, dass insgesamt 6 m Draht zur Verfügung steht. Daraus werden die vier senkrechten Stäbe mit jeweils Länge h hergestellt, außerdem am Boden zwei Stäbe mit jeweils Länge 2r (Durchmesser) und vier Kreise mit jeweils Radius r. Also gilt insgesamt: $6 = 4h + 4r + 4\cdot 2\pi r \mid :4$

➔ $1{,}5 = h + r + 2\pi r$ ➔ $h = 1{,}5 - r - 2\pi r$.

Das setzen wir nun ein: $V = \pi \cdot r^2 \cdot (1{,}5 - r - 2\pi r)$ *(Klammern setzen!)*

$= \pi \left(\frac{3}{2} r^2 - r^3 - 2\pi r^3\right)$ *(r^2 in die Klammer rein multiplizieren)*

(Eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge ist hier gar nicht gefragt, die wird in 3.2 dann vorgegeben.)

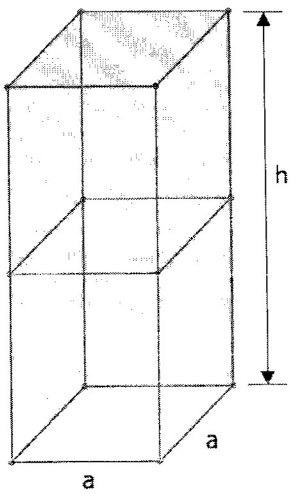
Mal wieder: Wenn man in Teil 3.2 dann ableitet, sollte man sich von dem π nicht verwirren lassen – das ist einfach ein konstanter Faktor, bleibt beim Ableiten also einfach vor der Klammer stehen! Wenn man dann die erste Ableitung gleich Null setzt, kann man durch das π teilen – und weg ist es, es stört also nicht beim Lösen der Gleichung!

T2022-AII

2.0 Lydia möchte ein quaderförmiges Gewächshaus für Tomaten mit quadratischer Grundfläche bauen.
Sie verwendet für den Rahmen Holzlatten, die 1,20 Euro pro Meter kosten. Ein grober Bauplan ist in der nebenstehenden, nicht maßstabsgetreuen Skizze gezeigt.

Lydia will für den Rahmen Holzlatten kaufen und dafür genau 30 Euro ausgeben.

Die Breite der Latten wird bei den Berechnungen vernachlässigt. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse gegebenenfalls sinnvoll.



5 **2.1** Lydia möchte wissen, wie das Volumen des Gewächshauses von der Seitenlänge a abhängt. Stellen Sie eine Funktionsgleichung für das Volumen V des Gewächshauses in Abhängigkeit von der Seitenlänge a auf und geben Sie eine im Sachzusammenhang möglichst große Definitionsmenge an.
[mögliches Teilergebnis: $V(a) = \frac{25}{4}a^2 - 3a^3$]

3 **2.3** Lydia entscheidet sich für eine Seitenlänge von $a = 1{,}4$ Meter und kauft für 30 Euro Holzlatten in der passenden Länge. Nach dem Bau des Gewächshauses möchte Lydia die Deckfläche und die Seitenflächen mit Folie bespannen und kauft deswegen eine Folie mit der Breite 1,4 Meter. Bestimmen Sie die Mindestlänge der Folie, die zur Verhüllung des Gewächshauses gekauft werden muss, wenn die Folie nur in ganzen Metern erhältlich ist.

Lösung:
2.1 Das Volumen eines Quaders ist V = G h mit der Grundfläche G und der Höhe h. Hier soll die Grundfläche quadratisch sein mit Seitenlänge a, also ist $G = a^2$ und damit $V = a^2 h$.
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von a angegeben werden; wir müssen also noch h bestimmen. In der Aufgabe ist vorgegeben, dass insgesamt 30 € zur Verfügung stehen und 1 Meter Latten jeweils 1,20 € kostet. Wir haben also 30 € / 1,2 €/m = 25 m Latten zur Verfügung. Daraus werden die vier senkrechten Stäbe mit jeweils Länge h hergestellt, außerdem am Boden, in der Mitte und oben jeweils vier Stäbe mit jeweils Länge a. Also gilt insgesamt: $25 = 4h + 12a \mid :4$ ➔ $25/4 = h + 3a$ ➔ $h = 25/4 - 3a$

Das setzen wir nun ein: $V = a^2 \cdot (25/4 - 3a)$ *(Klammern setzen!)*
$= 25/4\, a^2 - 3a^3$ *(Klammer ausmultiplizieren)*
Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad 25/4 - 3a > 0$$

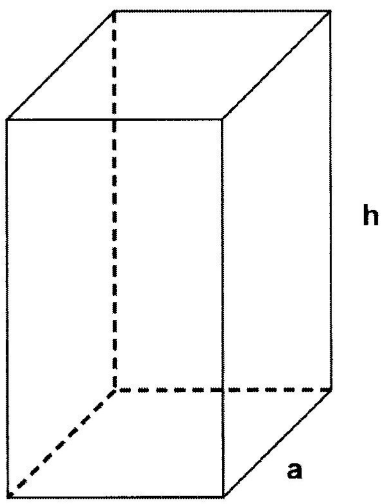
Ungleichungen lösen:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad a < 25/12$$

Beide Ungleichungen gleichzeitig sind nur erfüllt für $0 < a < 25/12$; deshalb ist $D_V =]0;25/12[$. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(25/12) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größeres Volumen ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.
Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Das kann man umständlich machen ($25/4\, a^2 - 3a^3 = 0$; $3a^2$ ausklammern; Lösungen ablesen) oder elegant ($a^2 \cdot (25/4 - 3r) = 0$; Lösungen aus den beiden Faktoren ablesen). Es ergibt sich $a_{1,2} = 0$; $a_3 = 25/12$. Damit hat man dann auch $D_V =]0;25/12[$.
2.3 Zunächst müssen wir uns die Höhe ausrechnen mit der Formel aus 2.1: $h = 25/4 - 3 \cdot 1{,}4 = 2{,}05$. Dann überlegen wir uns, wo wir überall Folie brauchen: an den vier senkrechten Seiten (die haben jeweils die Breite 1,4 m und die Höhe h = 2,05 m; insgesamt brauchen wir da also 4 · 2,05 m = 8,2 m) und auf der Deckfläche (die hat die Breite 1,4 m und die Länge 1,4 m). Da die Folie, die gekauft wird, schon die richtige Breite hat, müssen wir nur die Längen addieren: 8,2 m + 1,4 m = 9,6 m. Und weil die Folie nur in ganzen Metern erhältlich ist, muss Lydia also mindestens 10 m kaufen.

2023-AII/3

3.0 Die Firma FACTUS soll für einen Süßwarenhersteller quaderförmige Verpackungen für Schokoladenbonbons produzieren. Der Auftraggeber verlangt, dass die Verpackung eine quadratische Grundfläche aufweist und dass die Summe aus Länge, Breite und Höhe 45 cm beträgt, damit der Verpackungsautomat die gefalteten Verpackungen verarbeiten und befüllen kann. Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche wird mit a bezeichnet.
Die Werte der Funktion $V: a \mapsto V(a)$ geben jeweils das Volumen der Verpackung in cm³ an. Damit die Verpackung handlich bleibt, soll die Seitenlänge a der Grundfläche mindestens 10 cm und höchstens 20 cm betragen.



Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden.

3 **3.1** Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Funktion V.
[Mögliches Ergebnis: $V(a) = 45a^2 - 2a^3$]

Diese Aufgabe ist ähnlich wie T2022-AI, aber *weit* einfacher – ich würde sogar sagen, das ist eine der einfachsten Extremwertaufgaben, die ich kenne.
Lösung:
Das Volumen eines Quaders ist V = G h mit der Grundfläche G und der Höhe h. Hier soll die Grundfläche quadratisch sein mit Seitenlänge a, also ist $G = a^2$ und damit $V = a^2h$.
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von a angegeben werden; wir müssen also noch h bestimmen. In der Aufgabe ist vorgegeben, dass die Summe aus Länge, Breite und Höhe 45 beträgt. Länge und Breite sind jeweils gleich a (weil ja die Grundfläche quadratisch ist), die Höhe heißt h. Also gilt insgesamt:

$$45 = 2a + h \Rightarrow h = 45 - 2a$$

Das setzen wir nun ein: $V = a^2 \cdot (45 - 2a)$ *(Klammern setzen!)*

$= 45a^2 - 2a^3$ *(Klammer ausmultiplizieren)*

Die Definitionsmenge muss hier nicht bestimmt werden, ist aber im Text eigentlich schon angegeben: Da steht ja, dass die Seitenlänge a der Grundseite mindestens 10 cm und höchstens 20 cm betragen soll. Also ist $D_V = [10;20]$. *(Die Grenzen sollten wegen der Formulierungen „mindestens" und „höchstens" hier beide mit eingeschlossen werden.)*

4. Satz von Pythagoras
Dies wurde in folgenden Prüfungen gefragt:
1999-AII/3, 2000-AI/2, 2002-AII/4, Nachtermin 2006/3, 2010-AII/3, 2016-AII/3, 2017-AI/3, -AII/3, 2021-AI/3, -AII/3.

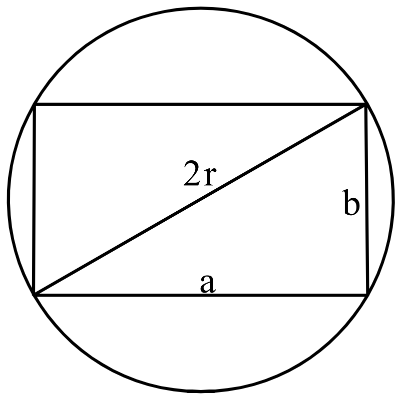
Dieser Fall ist sehr ähnlich wie die 3. Kategorie. Hier ist aber nicht eine Summe von Seitenlängen gegeben, sondern die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, also letztlich die Summe von Seitenlängen zum Quadrat.

Die Vorgehensweise ist ähnlich wie oben: Man schreibt sich die zusätzliche gegebene Bedingung hin und löst nach der zusätzlichen unbekannten Variable auf. Das Ergebnis setzt man dann in die Formel für den Flächeninhalt / das Volumen ein. Hier ist vor allem darauf zu achten, dass es oft genügt, nicht nach der unbekannten Variable selbst aufzulösen, sondern nach ihrem Quadrat (also z. B. nur nach r^2 auflösen, nicht nach r). Zieht man doch mal die Wurzel, so ist darauf zu achten, dass die Wurzel aus einer Summe bzw. Differenz nicht dasselbe ist wie die Summe bzw. Differenz der Wurzeln! (z. B. ist $\sqrt{9-r^2}$ ***nicht*** dasselbe wie $\sqrt{9}-\sqrt{r^2} = 3 - r$ ***!!!***) Hier ergeben sich meistens Funktionen mit Termen der Form $f(x) = ax^3 + bx$ mit $a < 0$, $b > 0$; beim Nullsetzen der Ableitung erhält man dann eine negative und eine positive Lösung, von denen natürlich nur die positive Lösung sinnvoll ist (und diese gehört auch immer zur Definitionsmenge, außer, diese ist im Aufgabentext noch irgendwie eingeschränkt).

Bei der Definitionsmenge ist meist nur zu beachten, dass die beiden Katheten nicht länger sein können als die Hypotenuse; außerdem müssen sie natürlich positiv sein.

1999-AII

3 Aus einer kreisförmigen Rasenfläche mit dem Radius r = 5 (L.E.) soll für ein Blumenbeet eine rechteckige Fläche mit den Seiten a und b so ausgestochen werden, dass dieses Rechteck dem Kreis einbeschrieben ist (siehe Skizze). Die von a abhängige Maßzahl des Flächeninhalts des Rechtecks wird mit A(a) bezeichnet.
Berechnen Sie, wie lang die Seite a sein muss, damit die Größe $g(a) = (A(a))^2$ (und damit auch $A(a)$) den absolut größten Wert annimmt und ermitteln Sie auch die absolut größte Flächenmaßzahl. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.
(Teilergebnis: $g(a) = 100a^2 - a^4$)

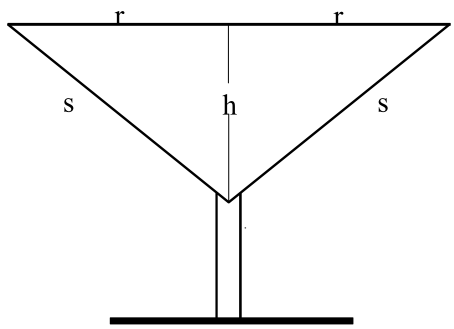


Lösung:
Gesucht ist der Flächeninhalt des Rechtecks, quadriert. Der Flächeninhalt ist Länge mal Breite, mit den hier gegebenen Variablen also $A = a \cdot b$. Damit ist $g(a) = (A(a))^2 = (a \cdot b)^2$.
g soll (nur) in Abhängigkeit von a angegeben werden; b müssen wir also noch bestimmen. In der Aufgabe steht, dass das Rechteck dem Kreis einbeschrieben ist, und in der Zeichnung erkennt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse 2r = 10. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras: $a^2 + b^2 = 10^2$ ➔ $a^2 + b^2 = 100$ ➔ $b^2 = 100 - a^2$ *(Beachte: Es genügt, nach b^2 aufzulösen, b selbst müssen wir gar nicht berechnen! Falls das doch jemand macht: $b = \sqrt{100-a^2}$; das ist **nicht** dasselbe wie 10 – a!!! Aus den Gliedern einer Differenz kann man nicht einzeln die Wurzel ziehen!)*
Das setzen wir nun ein: $g(a) = a^2 \cdot (100 - a^2)$ *(Klammern setzen!)*
$= 100a^2 - a^4$ *(Klammer auflösen)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass die Katheten nicht länger sein können als die Hypotenuse, und dass sie positiv sind. Also muss a > 0 und a < 10 gelten; deshalb ist D_g =]0;10[. Also müssen am Schluss die Randwerte g(0) und g(10) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert. *(Die Definitionsmenge ist hier nicht explizit gefragt, für die Randwerte braucht man sie aber!)*
Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion g bestimmen. Das kann man umständlich machen ($100a^2 - a^4 = 0$; a^2 ausklammern; $100 - a^2 = 0$ setzen; Lösungen berechnen) oder elegant ($a^2 \cdot (100 - a^2) = 0$; Lösungen aus den beiden Faktoren berechnen). Es ergibt sich $a_{1,2} = 0$; $a_{3,4} = \pm 10$. Weil a > 0 sein muss, hat man damit dann auch D_g =]0;10[.

2000-AI

2 Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels erhalten (siehe Skizze des Achsenschnittes; die Dicke der Glaswand werde vernachlässigt). Die Längenmaßzahl der Mantellinie s des Kegels beträgt 12.



Stellen Sie die Volumenmaßzahl V(h) des Kegels in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h dar und geben Sie die Definitionsmenge D_V der Funktion V: $h \mapsto V(h)$ an.
Weisen Sie nach, dass die Volumenmaßzahl V(h) für $h_1 = 4\sqrt{3}$ ihren absolut größten Wert annimmt. Zeigen Sie außerdem, dass in diesem Fall die Längenmaßzahlen von Radius r_1 und Höhe h_1 des Kegels im Verhältnis $\sqrt{2}$: 1 stehen.
(Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \pi(-\frac{h^3}{3} + 48h)$) (11 BE)

Lösung (zum ersten Teil der Aufgabe):
Für das Volumen eines Kegels gilt allgemein: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von h angegeben werden; r müssen wir also noch bestimmen. In der Zeichnung erkennt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten r und h und der Hypotenuse s = 12. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras: $r^2 + h^2 = 12^2$ ➔ $r^2 + h^2 = 144$ ➔ $r^2 = 144 - h^2$ *(Beachte: Es genügt, nach r^2 aufzulösen, r selbst müssen wir gar nicht berechnen! Falls das doch jemand macht: r = $\sqrt{144 - h^2}$; das ist **nicht** dasselbe wie 12 – h!!! Aus den Gliedern einer Differenz kann man nicht einzeln die Wurzel ziehen!)*
Das setzen wir nun ein: $V(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (144 - h^2) \cdot h$ *(Klammern setzen!)*

$$= \pi \cdot (\tfrac{144}{3} h - \frac{h^3}{3}) \quad \textit{(}\tfrac{1}{3}\textit{ und h in die Klammer rein multipliziert)}$$

$$= \pi \cdot (-\frac{h^3}{3} + 48h) \quad \textit{(gekürzt und Reihenfolge umgedreht)}$$

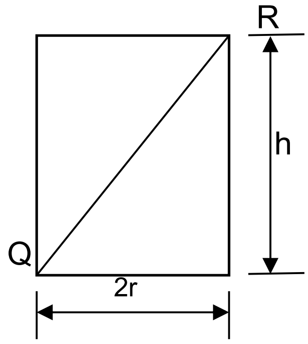
Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass die Katheten nicht länger sein können als die Hypotenuse, und dass sie positiv sind. Also muss h > 0 und h < 12 gelten; deshalb ist D_V =]0;12[. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(12) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größeres Volumen ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.

Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Wie man das umständlich machen kann oder elegant, sollte allmählich klar geworden sein. ;-) Es ergibt sich $h_1 = 0$; $h_{2,3} = \pm 12$. Weil $h > 0$ sein muss, hat man damit dann auch $D_V =]0;12[$.

Übrigens: Wenn man dann ableitet, sollte man sich von dem π nicht verwirren lassen – das ist einfach ein konstanter Faktor, bleibt beim Ableiten also einfach vor der Klammer stehen! Wenn man dann die erste Ableitung gleich Null setzt, kann man durch das π teilen – und weg ist es, es stört also nicht beim Lösen der Gleichung!

2002-AII

4.0 Bei zylinderförmigen Behältern mit Höhe h und Radius r (Seitenansicht s. nebenstehende Skizze) ist $\overline{QR} = 12$ dm konstant. (Einheiten bleiben unberücksichtigt.)



4.1 Stellen Sie die Maßzahl des Volumens V(h) des Behälters in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der zugehörigen Funktion V an.

(Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \pi \cdot (-\frac{h^3}{4} + 36h)$.) (4 BE)

Lösung:

Für das Volumen eines Zylinders gilt allgemein: $V = \pi r^2 h$.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von h angegeben werden; r müssen wir also noch bestimmen. In der Zeichnung erkennt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 2r und h und der Hypotenuse $\overline{QR} = 12$. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras: $(2r)^2 + h^2 = 12^2$ *(Klammern setzen! Wir wollen hier ja $c \cdot c = 2r \cdot 2r$ haben, und das ist $(2r)^2$! Dagegen wäre $2r^2 = 2 \cdot r \cdot r$, das wäre also falsch!)* ➔ $4r^2 + h^2 = 144$ ➔ $4r^2 = 144 - h^2$ ➔ $r^2 = 36 - \frac{1}{4}h^2$ *(Beachte: 1) Wenn man links durch 4 teilt, dann muss man rechts **beide** Terme durch 4 teilen! 2) Es genügt, nach r^2 aufzulösen, r selbst müssen wir gar nicht berechnen! Falls das doch jemand macht: $r = \sqrt{36 - \frac{1}{4}h^2}$; das ist **nicht** dasselbe wie $6 - \frac{1}{2}h$!!! Aus den Gliedern einer Differenz kann man nicht einzeln die Wurzel ziehen!)*

Das setzen wir nun ein: $V(h) = \pi \cdot (36 - \frac{1}{4}h^2) \cdot h$ *(Klammern setzen!)*

$= \pi \cdot (36h - \frac{1}{4}h^3)$ *(h in die Klammer rein multipliziert)*

$= \pi \cdot (-\frac{h^3}{4} + 36h)$ *(ein wenig Bruchrechnen und Reihenfolge umgedreht)*

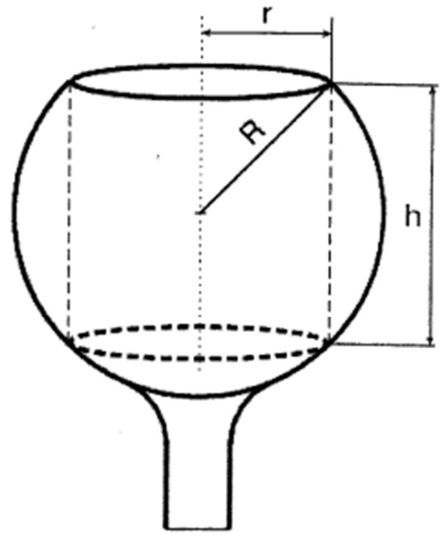
Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass die Katheten nicht länger sein können als die Hypotenuse, und dass sie positiv sind. Also muss $h > 0$ und $h < 12$ gelten; deshalb ist $D_V =]0;12[$. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(12) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größeres Volumen ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.

Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Es ergibt sich $h_1 = 0$; $h_{2,3} = \pm 12$. Weil $h > 0$ sein muss, hat man damit dann auch $D_V =]0;12[$.

Übrigens: Wenn man in 4.2 dann ableitet, sollte man sich von dem π nicht verwirren lassen – das ist einfach ein konstanter Faktor, bleibt beim Ableiten also einfach vor der Klammer stehen! Wenn man dann die erste Ableitung gleich Null setzt, kann man durch das π teilen – und weg ist es, es stört also nicht beim Lösen der Gleichung!

Nachtermin 2006

3.0 Ein kugelförmiges Windlicht mit dem Kugelradius R = 7 cm besitzt eine kreisförmige Öffnung für das Einführen einer zylindrischen Kerze mit Radius r und Höhe h (siehe Skizze).



3.1 Stellen Sie die Volumenmaßzahl V(h) der Kerze in Abhängigkeit von der Höhe h dar und bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V: h \mapsto V(h)$. (4 BE)
[Mögliches Teilergebnis:

$V(h) = \frac{h\pi}{4}(196 - h^2)$]

Lösung:
Auch wenn man's auf den ersten Blick nicht sieht – die Rechnung ist genau dieselbe wie in der vorherigen Aufgabe aus der Prüfung 2002-AII!

Für das Volumen eines Zylinders gilt allgemein: $V = \pi r^2 h$.
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von h angegeben werden; r müssen wir also noch bestimmen. Im Gegensatz zu 2002-AII ist in der Zeichnung das rechtwinklige Dreieck diesmal leider nicht mit eingetragen, es sieht aber prinzipiell genauso aus: Die Katheten haben die Längen 2r und h, die Hypotenuse hat die Länge 2R = 14. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras: $(2r)^2 + h^2 = 14^2$ *(Klammern setzen! Wir wollen hier ja $c \cdot c = 2r \cdot 2r$ haben, und das ist $(2r)^2$! Dagegen wäre $2r^2 = 2 \cdot r \cdot r$, das wäre also falsch!)* ➔ $4r^2 + h^2 = 196$ ➔ $4r^2 = 196 - h^2$ ➔ $r^2 = 49 - \frac{1}{4}h^2$ *(Beachte: 1) Wenn man links durch 4 teilt, dann muss man rechts **beide** Terme durch 4 teilen! 2) Es genügt, nach r^2 aufzulösen, r selbst müssen wir gar nicht berechnen! Falls das doch jemand macht: $r = \sqrt{49 - \frac{1}{4}h^2}$; das ist **nicht** dasselbe wie $7 - \frac{1}{2}h$!!! Aus den Gliedern einer Differenz kann man nicht einzeln die Wurzel ziehen!)*
Das setzen wir nun ein: $V(h) = \pi \cdot (49 - \frac{1}{4}h^2) \cdot h$ *(Klammern setzen!)*

$= \pi \cdot (196 - h^2) \cdot \frac{1}{4} \cdot h$ *($\frac{1}{4}$ nach hinten ausklammern)*

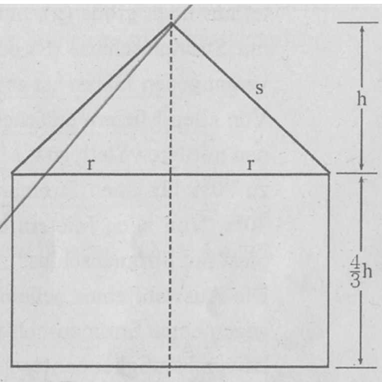
$= \frac{h\pi}{4} \cdot (196 - h^2)$ *(ein wenig Bruchrechnen und Reihenfolge umgedreht)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass die Katheten nicht länger sein können als die Hypotenuse, und dass sie positiv sind. Also muss h > 0 und h < 14 gelten; deshalb ist $D_V =]0;14[$. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(14) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größeres Volumen ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.
Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Es ergibt sich $h_1 = 0$; $h_{2,3} = \pm 14$. Weil h > 0 sein muss, hat man damit dann auch $D_V =]0;14[$.

Wieder gilt: Wenn man in 4.2 dann ableitet, sollte man sich von dem $\frac{\pi}{4}$ nicht verwirren lassen. Beim Ableiten bleibt es einfach stehen, bei der Gleichung kann man dadurch teilen und es damit loswerden. ***Vorsicht:*** Das h muss man aber erst mal in die Klammer rein multiplizieren, ***bevor*** man ableitet – das ist ja kein konstanter Faktor!

2010-AII *(Die Aufgabe ist wieder etwas schwieriger – aber wirklich nur etwas.)*

3.0 Eine Biogasanlage besteht aus einem zylinderförmigen, oben offenen Grundkörper, das Dach der Höhe h ist kegelförmig (siehe nebenstehende Skizze des Querschnitts). Die Mantellänge s des Kegels beträgt 15 m. Die folgenden Rechnungen werden ohne Einheiten durchgeführt.



3.1 Stellen Sie die Maßzahl V des Volumens der gesamten Biogasanlage in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine im gegebenen Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ an. (6 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right) \cdot \pi$]

Lösung:

Die Biogasanlage besteht laut Aufgabentext und Zeichnung aus einem Zylinder und einem Kegel obendrauf. Das Volumen eines Zylinders ist π mal Radius zum Quadrat mal Höhe, das Volumen eines Kegels ist $\frac{1}{3}\pi$ mal Radius zum Quadrat mal Höhe. Laut Zeichnung heißt die Höhe des Kegels h, die Höhe des Zylinders ist $\frac{4}{3}$ h. Also ist: $V = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{4}{3}h + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{4}{3}\pi r^2 h + + \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{5}{3}\pi r^2 h$.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von h angegeben werden; r müssen wir also noch bestimmen. In der Zeichnung erkennt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten r und h und der Hypotenuse s = 15. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras: $r^2 + h^2 = 15^2 \Rightarrow r^2 + h^2 = 225 \Rightarrow r^2 = 225 - h^2$ *(Inzwischen ist hoffentlich jedem klar, dass $r = \sqrt{225 - h^2}$ ist, und dass das ist **nicht** dasselbe wie 15 – h ist?!?)*

Das setzen wir nun ein: $V(h) = \frac{5}{3}\pi \cdot (225 - h^2) \cdot h$ *(Klammern setzen!)*

$= \left(\frac{5}{3} \cdot 225 \cdot h - \frac{5}{3}h^3\right) \cdot \pi$ *(π nach hinten; $\frac{5}{3}$ und h in die Klammer multiplizieren)*

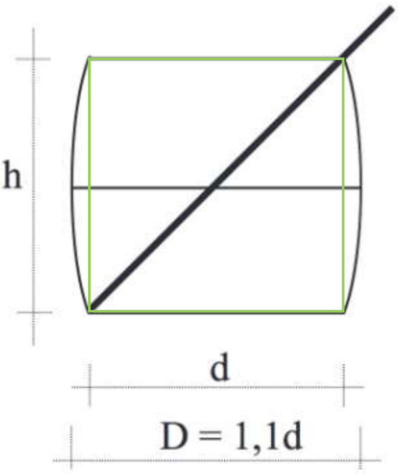
$= \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right) \cdot \pi$

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass die Katheten nicht länger sein können als die Hypotenuse, und dass sie positiv sind. Also muss h > 0 und h < 15 gelten; deshalb ist $D_V =]0;15[$. (Dasselbe erhält man auch wieder aus den Nullstellen der Funktion V.) Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V(15) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größeres Volumen ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.

Wieder gilt: Wenn man in 4.2 dann ableitet, sollte man sich von dem π nicht verwirren lassen. Beim Ableiten bleibt es einfach stehen, bei der Gleichung kann man dadurch teilen und es damit loswerden.

2016-AII *Eine eher schwierige Aufgabe…*

3.0 Ein symmetrischer Trinkjoghurtbecher in der Form eines Fasses besitzt das Volumen $V=\frac{1}{12}\pi\cdot h\cdot(2D^2+d^2)$.
Hierbei ist d jeweils der Durchmesser des Deckels und des Bodens und D der maximale Durchmesser des Bechers auf halber Höhe (alle Längen in cm gemessen). Weiterhin soll D 10% größer sein als d. Der Becher soll so konstruiert sein, dass ein 13 cm langer Strohhalm genau um 3 cm aus dem Becher herausragt, wenn er diagonal im Becher liegt (siehe Abbildung).



3.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, die die Maßzahl des Bechervolumens in Abhängigkeit von der Höhe h beschreibt. (4 BE)

[Mögliches Ergebnis: $V(h)=\frac{57}{200}\pi\cdot(-h^3+100h)$]

Lösung:

Zumindest die Volumenformel ist hier schon vorgegeben: $V=\frac{1}{12}\pi\cdot h\cdot(2D^2+d^2)$. (Das Volumen eines Fasses findet man sowieso nicht in der Merkhilfe…)

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von h angegeben werden; D und d müssen wir also noch bestimmen. Der Strohhalm liegt auf der Diagonale eines Rechtecks mit den Seitenlängen d und h (das Rechteck ist in der Originalaufgabe nicht eingezeichnet, ich habe es oben in grün eingetragen.) Da der Strohhalm 13 cm lang ist und 3 cm herausragt, muss die Diagonale also 10 cm lang sein. In der rechten unteren Ecke des Rechtecks ist ein rechter Winkel (deshalb heißt es ja Rechteck…), also haben wir hier ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Längen d und h und einer Hypotenuse der Länge 10 cm. Der Satz von Pythagoras sagt uns hier also: $d^2+h^2=10^2$ ➔ $d^2 = 100 - h^2$ *(Beachte: Es genügt, nach d^2 aufzulösen, d selbst müssen wir gar nicht berechnen! Falls das doch jemand macht: $d=\sqrt{100-h^2}$; das ist **nicht** dasselbe wie 10 – h!!! Aus den Gliedern einer Differenz kann man nicht einzeln die Wurzel ziehen!)*

Außerdem steht noch in der Aufgabe, dass D um 10% größer sein soll als d, also ist D gleich 110% von d, als Formel: D = 1,1d. Wir brauchen für die Volumenformel ja aber D^2, das ist dann also gleich $(1{,}1d)^2$, also: $D^2 = 1{,}21d^2 = 1{,}21\,(100 - h^2) = 121 - 1{,}21h^2$. *(Mal wieder: Klammern setzen ist hier wichtig, nicht nur d muss quadriert werden, sondern auch die 1,1!)*

Das setzen wir nun alles ein: $V(h)=\frac{1}{12}\pi\cdot h\cdot(2\cdot(121-1{,}21h^2)+100-h^2)$ *(Klammern setzen!)*

$=\frac{1}{12}\pi\cdot h\cdot(342-3{,}42h^2)$ *(innere Klammer auflösen, zusammenfassen)*

$=\frac{3{,}42}{12}\pi\cdot(100h-h^3)$ *(3,42 ausklammern; h in die Klammer multiplizieren)*

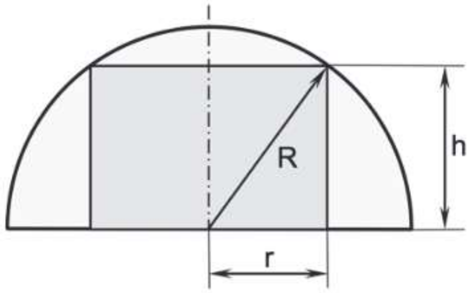
$=\frac{57}{200}\pi\cdot(-h^3+100h)$ *(den Bruch mit 6 kürzen, dann mit 100 erweitern)*

(Eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge ist hier gar nicht gefragt, die wird in 3.2 dann vorgegeben.)

Wieder gilt: Wenn man in 3.2 dann ableitet, sollte man sich von dem komplizierten Vorfaktor $\frac{57}{200}\pi$ nicht verwirren lassen. Beim Ableiten bleibt es einfach stehen, bei der Gleichung kann man dadurch teilen und es damit loswerden.

2017-AI *vergleiche im aktuellen Schulbuch S. 45 (NT) bzw. S. 47 (T) / Nr. 6!*

3.0 Einer Halbkugel mit Radius $R = 10\,\text{cm}$ soll ein Zylinder mit Radius r und Höhe h einbeschrieben werden (siehe Skizze). Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.



3.1 Ermitteln Sie die Maßzahl V(h) des Volumens des Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe h und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion $V: h \mapsto V(h)$ an, wenn die Höhe h mindestens 6 cm betragen soll. (4 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $V(h) = h\pi(100 - h^2)$]

Lösung:

Für das Volumen eines Zylinders gilt allgemein: $V = \pi r^2 h$.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von h angegeben werden; r müssen wir also noch bestimmen (Vorsicht: Nicht mit R = 10 cm verwechseln; das ist der Radius der Halbkugel, nicht der des Zylinders!). In der Zeichnung erkennt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten r und h und der Hypotenuse R = 10. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras: $r^2 + h^2 = 10^2 \Rightarrow r^2 = 100 - h^2$ *(Beachte: Es genügt, nach r^2 aufzulösen, r selbst müssen wir gar nicht berechnen! Falls das doch jemand macht: $r = \sqrt{100 - h^2}$; das ist **nicht** dasselbe wie 10 – h!!! Aus den Gliedern einer Differenz kann man nicht einzeln die Wurzel ziehen!)*

Das setzen wir nun ein: $V(h) = \pi \cdot (100 - h^2) \cdot h$ *(Klammern setzen!)*

Damit sind wir eigentlich schon beim möglichen Teilergebnis angekommen (man muss nur noch die Reihenfolge des Produkts umdrehen); damit man die Funktion ableiten kann, ist es aber noch sinnvoll, das h in die Klammer rein zu multiplizieren und dort die Reihenfolge der Summe umzudrehen:

$$V(h) = \pi \cdot (-h^3 + 100h)$$

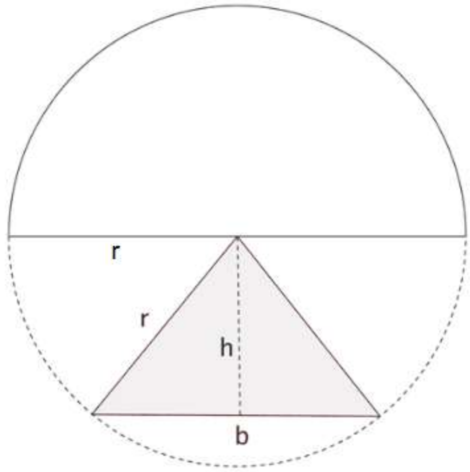
(Das π sollte man außen stehen lassen! Beim Ableiten bleibt das dann einfach stehen (konstanter Faktor); wenn man die Ableitung gleich null setzt, kann man dadurch teilen – dann ist es weg, stört also nicht beim Lösen der Gleichung!)

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass die Katheten nicht länger sein können als die Hypotenuse – also muss h < R und damit h < 10 gelten. Außerdem steht in der Aufgabe, dass die Höhe mindestens 6 cm betragen soll; deshalb ist $D_V = [6;10[$. *(Ob man die 10 auch noch mit dazu nimmt, ist Geschmackssache.)*

Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Wie man das umständlich machen kann oder elegant, sollte allmählich klar geworden sein. ;-) Es ergibt sich $h_1 = 0$; $h_{2,3} = \pm 10$. Weil außerdem h mindestens 6 cm sein muss, hat man damit dann auch $D_V = [6;10[$.

2017-AII

3.0 Ein Designstudio hat eine Nachttischleuchte entworfen. Diese besteht aus einem halbkugelförmigen Schirm mit Radius $r = 12\,\text{cm}$ und einem Leuchtenfuß in der Form eines geraden Kreiskegels mit der Höhe h und dem Durchmesser b in der Grundfläche (siehe nebenstehende Skizze). Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.



3.1 Bestimmen Sie die Maßzahl V(h) des Volumens des Fußes der Leuchte in Abhängigkeit von h. (3 BE)

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = \frac{\pi}{3}(-h^3 + 144h)$]

Lösung:

Für das Volumen eines Kegels gilt allgemein: $V = \frac{1}{3}\pi r_{Zyl}^2 h$.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von h angegeben werden; r_{Zyl} müssen wir also noch bestimmen (Vorsicht: Nicht mit r = 12 cm verwechseln; das ist der Radius der Kugel, nicht der des Kegels! r_{Zyl} ist in der Zeichnung nicht direkt angegeben, ist aber natürlich die Hälfte des Durchmessers b.) In der Zeichnung erkennt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten r_{Zyl} und h und der Hypotenuse r = 12. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras: $r_{Zyl}^2 + h^2 = 12^2 \Rightarrow r_{Zyl}^2 = 144 - h^2$ *(Beachte: Es genügt, nach r_{Zyl}^2 aufzulösen, r_{Zyl} selbst müssen wir gar nicht berechnen! Falls das doch jemand macht: $r_{Zyl} = \sqrt{144 - h^2}$; das ist **nicht** dasselbe wie 12 – h!!! Aus den Gliedern einer Differenz kann man nicht einzeln die Wurzel ziehen!)*

Das setzen wir nun ein: $V(h) = \frac{1}{3}\pi(144 - h^2)h$ *(Klammern setzen!)*

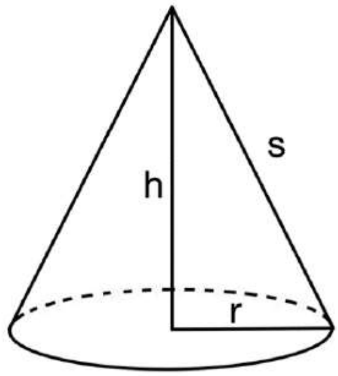
$= \frac{\pi}{3}(-h^3 + 144h)$ *(h in die Klammer multiplizieren, Reihenfolge ändern)*

(Das $\pi/3$ sollte man außen stehen lassen! Beim Ableiten bleibt das dann einfach stehen (konstanter Faktor); wenn man die Ableitung gleich null setzt, kann man dadurch teilen – dann ist es weg, stört also nicht beim Lösen der Gleichung!)

Hier muss man keine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge bestimmen, die wird dann in 3.2 vorgegeben.

2021-AI *vgl. im aktuellen Schulbuch S. 44 (NT) bzw. S. 46 (T) / Nr. 3*

3.0 Ein Tipi Zelt in einem Skigebiet hat die Form eines geraden Kreiskegels, dessen Mantellinie die Länge $s = 8\,m$ hat (siehe Zeichnung). Das Zelt besitzt ein Innenvolumen, das bei gleichbleibender Länge der Mantellinie von der Höhe h des Zeltes abhängt. Der jeweilige Funktionswert der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ beschreibt dieses Innenvolumen.



Aus optischen Gründen soll dabei die Höhe h des Tipi Zeltes mindestens $4\,m$ und maximal $6\,m$ betragen. Dabei steht h für die Höhe des Zelts in m und $V(h)$ für das Volumen des Zelts in m^3.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

3.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf.

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{64}{3}\pi h$]

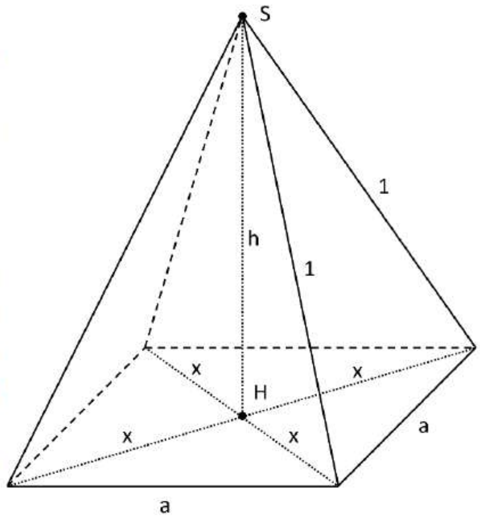
Für das Volumen eines Kegels gilt allgemein: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von h angegeben werden; r müssen wir also noch bestimmen. In der Zeichnung erkennt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten r und h und der Hypotenuse s = 8. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras: $r^2 + h^2 = 8^2$ ➔ $r^2 = 64 - h^2$ *(Beachte: Es genügt, nach r^2 aufzulösen, r selbst müssen wir gar nicht berechnen! Falls das doch jemand macht: r = $\sqrt{64 - h^2}$; das ist **nicht** dasselbe wie 8 – h!!! Aus den Gliedern einer Differenz kann man nicht einzeln die Wurzel ziehen!)*
Das setzen wir nun ein: V(h) = $\frac{1}{3}\pi(64 - h^2)h$ *(Klammern setzen!)*

$= -\frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{64}{3}\pi h$ *(Klammer ausmultiplizieren, Reihenfolge ändern)*

Die Definitionsmenge ist im Text schon vorgegeben: Die Höhe soll mindestens 4 m und maximal 6 m sein. Also ist $D_V = [4;6]$.

2021-AII *vgl. im aktuellen Schulbuch S. 44 (NT) bzw. S. 46 (T) / Nr. 4*

2.0 Als Teilnehmer eines Auswahlverfahrens zur Einstellung von Werkstudenten bei einer großen Molkerei wird Ihnen folgende Aufgabe gestellt: Ein Schokodrink soll in einem Tetra Pak abgefüllt werden, welcher die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat. Die vier Seitenkanten der Pyramide sollen aus verpackungstechnischen Gründen jeweils eine feste Länge von $1\,dm$ haben. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt H, in dem sich die Diagonalen der Grundfläche im rechten Winkel schneiden.
Aus verkaufstechnischen Gründen soll die Höhe des Tetra Paks mindestens $0{,}4\,dm$ und höchstens $0{,}6\,dm$ betragen.



Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

2.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ auf. Dabei steht h für die Höhe der Pyramide in dm und $V(h)$ für das Volumen der Pyramide in dm^3.

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h$]

Lösung:

Für das Volumen einer Pyramide gilt allgemein: V = $\frac{1}{3}Gh$; da die Grundfläche G hier ein Quadrat mit Seitenlänge a ist, folgt V = $\frac{1}{3}a^2h$.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von h angegeben werden; a müssen wir also noch bestimmen. In der Zeichnung findet man leider nicht direkt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a, h und s = 1; man muss hier einen Umweg machen: Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten x und x und der Hypotenuse a und ein zweites rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten x, h und s = 1. Also braucht man hier den Satz des Pythagoras gleich zweimal! (Außer, man weiß auswendig, dass die Diagonale in einem Quadrat der Seitenlänge a die Länge $\sqrt{2}$a hat…)

$$(1)\ x^2 + x^2 = a^2; \quad (2)\ x^2 + h^2 = 1^2$$

Aus (1) erhält man zunächst $x^2 = \frac{1}{2}a^2$; das kann man in (2) einsetzen: $\frac{1}{2}a^2 + h^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 2 - 2h^2$.

*(Beachte: Es genügt, nach a^2 aufzulösen, a selbst müssen wir gar nicht berechnen! Falls das doch jemand macht: a = $\sqrt{2-2h^2}$; das ist **nicht** dasselbe wie $\sqrt{2} - \sqrt{2}h$!!! Aus den Gliedern einer Differenz kann man nicht einzeln die Wurzel ziehen! Und es ist erst recht nicht dasselbe wie 1,4 – 1,4h oder so, man darf hier **NICHT** runden!)*

Das setzen wir nun ein: V(h) = $\frac{1}{3}(2 - 2h^2)h$ *(Klammern setzen!)*

$= -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h$ *(Klammer ausmultiplizieren, Reihenfolge ändern)*

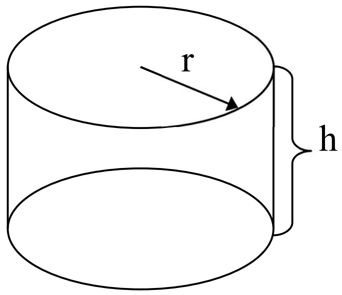
Die Definitionsmenge ist im Text schon vorgegeben: Die Höhe soll mindestens 0,4 dm und maximal 0,6 dm sein. Also ist $D_V = [0{,}4;0{,}6]$.

5. Oberfläche gegeben, Volumen gesucht
Dies wurde in folgenden Prüfungen gefragt:
2009-AI/5, 2010-AI/4, Nachtermin 2011, 2013-AII/5, 2022-AI/3. T2023-AI/1.4, 2023-AI/2

Auch hier geht man ähnlich vor wie bei den vorherigen Kategorien: Man sucht sich wieder zunächst (eine) passende Formel(n) für das gesuchte Volumen aus der Formelsammlung heraus. Dann sucht man sich noch (eine) passende Formel(n) für die Oberfläche des Körpers heraus und setzt diese gleich dem in der Aufgabe gegebenen Wert. Dann löst man nach der zusätzlichen unbekannten Variable auf und setzt das Ergebnis schließlich in die Formel für das Volumen ein. Hier ergeben sich meistens Funktionen mit Termen der Form $f(x) = ax^3 + bx$ mit $a < 0$, $b > 0$; beim Nullsetzen der Ableitung erhält man dann eine negative und eine positive Lösung, von denen natürlich nur die positive Lösung sinnvoll ist (und diese gehört auch immer zur Definitionsmenge, außer, diese ist im Aufgabentext noch irgendwie eingeschränkt).

2009-AI

5.0 Eine zylinderförmige Trommel (siehe Skizze) besitzt die Gesamtoberfläche $2400 \cdot \pi\ \text{cm}^2$. Der Klang der Trommel hängt auch von der Oberfläche und dem Volumen ab. Die Boden- und Deckfläche der Trommel sind mit Fell bespannt. Durch die erhältlichen Fellgrößen ergibt sich, dass ein Radius r von 12 cm bis 30 cm möglich ist. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



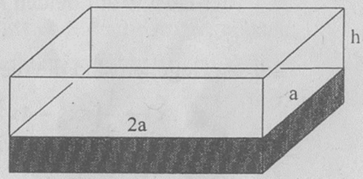
5.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(r)$ der Trommel in Abhängigkeit von r auf.
[Ergebnis: $V(r) = \pi \cdot (1200r - r^3)$] (4 BE)

Lösung:
Für das Volumen eines Zylinders gilt allgemein: $V = \pi r^2 h$.
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von r angegeben werden; h müssen wir also noch bestimmen. Laut Aufgabe soll die gesamte Oberfläche des Zylinders 2400π sein. In der Formelsammlung steht die Mantelfläche eines Zylinders: $M = 2\pi rh$. Dazu kommen noch Grund- und Deckfläche, also Kreise, jeweils mit Flächeninhalt πr^2. Also gilt insgesamt: $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2400\pi$. Bevor wir irgendetwas anderes machen: Teilen wir erst mal durch das störende π – und am besten auch noch durch 2! *(Links natürlich beide Terme dadurch teilen!)* Es bleibt: $rh + r^2 = 1200$; sieht doch schon deutlich einfacher aus! Weiter: $rh = 1200 - r^2$. Jetzt noch durch r teilen (und berücksichtigen, dass rechts beide Terme geteilt werden müssen!): $h = \frac{1200}{r} - r$.
Das setzen wir nun ein: $V(h) = \pi \cdot r^2 \cdot (\frac{1200}{r} - r)$ *(Klammern setzen!)*
$= \pi \cdot (\frac{1200r^2}{r} - r^3)$ *(r^2 in die Klammer rein multiplizieren)*
$= \pi \cdot (1200r - r^3)$ *(kürzen!)*
Über die Definitionsmenge muss man sich bei dieser Aufgabe keine Gedanken machen – man muss nur den Text lesen! („Durch die erhältlichen Fellgrößen ergibt sich, dass ein Radius r von 12 cm bis 30 cm möglich ist.“) Also ist $D_V = [12;30]$. *(die beiden Zahlen sollte man hier wohl mit einschließen)*

Wieder gilt beim Ableiten (in 5.2): Nicht vom π verwirren lassen! Beim Ableiten bleibt es stehen; wenn man die Ableitung gleich Null setzt, kann man es loswerden.

2010-AI

4.0 Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Länge 2a, der Breite a und der Höhe h. Dieses wird auf ein geeignetes Fundament gesetzt.



Die lichtdurchlässige Oberfläche soll 4 m^2 betragen.
Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.

4.1 Bestimmen Sie das Volumen V(a) des Daches in Abhängigkeit von a.
[Mögliches Ergebnis: $V(a)=\frac{4}{3}a-\frac{2}{3}a^3$]. (4 BE)

4.2 Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V: a \mapsto V(a)$ für den in 4.0 gegebenen Sachzusammenhang. (5 BE)

Lösung:
Das Volumen eines Quaders ist Länge mal Breite mal Höhe, mit den Angaben in Aufgabentext und Zeichnung also: $V = 2a \cdot a \cdot h = 2a^2h$
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von a angegeben werden; h müssen wir also noch bestimmen. Laut Aufgabe soll die lichtdurchlässige Oberfläche 4 sein. Die lichtdurchlässige Oberfläche besteht aus der Deckfläche (Rechteck mit Seitenlängen 2a und a), den Flächen vorne und hinten (beides Rechtecke mit den Seitenlängen 2a und h) und den Flächen links und rechts (beides Rechtecke mit den Seitenlängen a und h). (*Vorsicht:* Das Glasdach hat keine Grundfläche, sondern ist unten offen!) Also gilt insgesamt: $2a \cdot a + 2 \cdot 2a \cdot h + 2 \cdot a \cdot h = 4$ ➔ $2a^2 + 6ah = 4$ ➔ $6ah = 4 - 2a^2$. Jetzt noch durch 6a teilen (und berücksichtigen, dass rechts beide Terme geteilt werden müssen!): $h = \frac{4}{6a} - \frac{2a^2}{6a} = \frac{2}{3a} - \frac{1}{3}a$ *(kürzen!)*
Das setzen wir nun ein: $V(h) = 2a^2 \cdot (\frac{2}{3a} - \frac{1}{3}a)$ *(Klammern setzen!)*

$= \frac{4a^2}{3a} - \frac{2}{3}a^3$ *(Klammer ausmultiplzieren)*

$= \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$ *(kürzen!)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad \frac{2}{3a} - \frac{1}{3}a > 0$$

Das Lösen der zweiten Ungleichung ist leider eine größere Rechnung (deshalb gibt es hier auch 5 BE!). Zunächst multiplizieren wir sie mal mit 3a, um die Brüche loszuwerden. (Weil $a > 0$ ist, ist auch $3a > 0$; deshalb ändert sich die Richtung der Ungleichung beim Multiplizieren mit 3a nicht!)

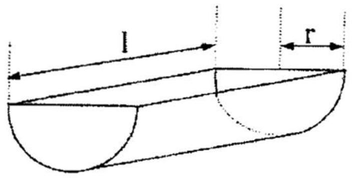
$$a > 0 \quad \text{und} \quad 2 - a^2 > 0$$

Sieht schon deutlich einfacher aus! Es bleibt eine quadratische Ungleichung zu lösen. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten; am einfachsten ist es meistens, erst die Gleichung zu lösen, dann den Graph zu skizzieren (hier: eine nach unten geöffnete Parabel) und daraus dann die Lösungen abzulesen. Macht man alles richtig, so erhält man aus der zweiten Ungleichung $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$. Nimmt man noch die erste Ungleichung dazu, so ergibt sich insgesamt $0 < a < \sqrt{2}$. (Alternativ könnte man z. B. auch so rechnen: $2 - a^2 > 0$ ➔ $a^2 < 2$; dann die Wurzel ziehen – aber dabei beachten, dass $\sqrt{a^2} = |a|$ ist, nicht einfach = a! Es bleibt also: $|a| < \sqrt{2}$. Weil laut der ersten Ungleichung aber $a > 0$ ist, kann man die Betragsstriche weglassen, und es bleibt wieder insgesamt $0 < a < \sqrt{2}$.)
Deshalb ist $D_V =]0; \sqrt{2}[$. Also müssen am Schluss die Randwerte V(0) und V($\sqrt{2}$) überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert.

Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Es ergibt sich $a_1 = 0$; $a_{2,3} = \pm\sqrt{2}$. Damit hat man dann auch $D_V =]0; \sqrt{2}[$. *(Ja, ich weiß, die meisten rechnen nicht gerne mit Wurzeln und tippen das lieber in den Taschenrechner ein – aber in der Aufgabe steht nichts von Runden! Um ein Gefühl für den Wert zu bekommen, kann man sich gerne mal mit dem Taschenrechner ausrechnen, dass das etwa 1,41 ist; trotzdem sollte man das* ***exakte*** *Ergebnis angeben!)*

Nachtermin 2011/4

4.0 Ein oben offener Wassertrog, der die Form eines halben Zylinders mit Länge l und Radius r hat, besitzt die Oberfläche 200 dm².



4.1 Stellen Sie eine Gleichung für die Volumenmaßzahl V(r) des Troges in Abhängigkeit von r auf und bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge.

[mögliches Teilergebnis: $V(r) = -\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^3 + 100\cdot r$] (8 BE)

Lösung:

Für das Volumen eines Zylinders gilt allgemein: $V = \pi r^2 h$, für den halben Zylinder hier also $V = \frac{1}{2}\pi r^2 l$.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von r angegeben werden; l müssen wir also noch bestimmen.

Laut Aufgabe soll die gesamte Oberfläche des Wassertrogs 200 (dm²) sein. Die gesamte Oberfläche besteht aus der Hälfte eines Zylindermantels (mit Formelsammlung also: $\frac{1}{2}\cdot 2\pi rl = \pi rl$), dem Halbkreis vorne und dem Halbkreis hinten (also zusammen ein Kreis, laut Formelsammlung: $A = \pi r^2$). Also gilt insgesamt: $\pi rl + \pi r^2 = 200$. Bevor wir irgendetwas anderes machen: Teilen wir erst mal durch das störende π! *(Links natürlich beide Terme dadurch teilen!)* Es bleibt: $rl + r^2 = \frac{200}{\pi}$. Weiter: $rl = \frac{200}{\pi} - r^2$. Jetzt noch durch r teilen (und berücksichtigen, dass rechts beide Terme geteilt werden müssen!): $l = \frac{200}{\pi r} - r$.

Das setzen wir nun ein: $V(r) = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot \left(\frac{200}{\pi r} - r\right)$ *(Klammern setzen!)*

$= \frac{200\pi r^2}{2\pi r} - \frac{1}{2}\pi r^3$ *(Klammer ausmultiplizieren, Bruchrechnen!)*

$= -\frac{1}{2}\pi r^3 + 100r$ *(kürzen und Reihenfolge umstellen)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass alle Seitenlängen positiv sein müssen. Also muss gelten: $r > 0$ und $\frac{200}{\pi r} - r > 0$

Das Lösen der zweiten Ungleichung ist leider wieder eine größere Rechnung. Zunächst multiplizieren wir sie mal mit r, um die Variable im Nenner loszuwerden. (Weil $r > 0$ ist, ändert sich die Richtung der Ungleichung beim Multiplizieren nicht!)

$$r > 0 \text{ und } \frac{200}{\pi} - r^2 > 0$$

Es bleibt eine quadratische Ungleichung zu lösen. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten; am einfachsten ist es meistens, erst die Gleichung zu lösen, dann den Graph zu skizzieren (hier: eine nach unten geöffnete Parabel) und daraus dann die Lösungen abzulesen. Macht man alles richtig, so erhält man aus der zweiten Ungleichung $-\sqrt{\frac{200}{\pi}} < r < \sqrt{\frac{200}{\pi}}$. Nimmt man noch die erste Ungleichung dazu, so ergibt sich insgesamt $0 < r < \sqrt{\frac{200}{\pi}}$.

(Alternativ könnte man z. B. auch so rechnen: $\frac{200}{\pi} - r^2 > 0 \Rightarrow r^2 < \frac{200}{\pi}$; dann die Wurzel ziehen – aber dabei beachten, dass $\sqrt{r^2} = |r|$ ist, nicht einfach $= r$! Es bleibt also: $|r| < \sqrt{\frac{200}{\pi}}$. Weil laut der ersten Ungleichung aber $r > 0$ ist, kann man die Betragsstriche weglassen, und es bleibt wieder $0 < r < \sqrt{\frac{200}{\pi}}$.)

Deshalb ist $D_V = \left]0; \sqrt{\frac{200}{\pi}}\right[$. Also müssen am Schluss die Randwerte $V(0)$ und $V\left(\sqrt{\frac{200}{\pi}}\right)$ überprüft werden, ob sich dafür nicht evtl. ein größerer Flächeninhalt ergibt als der berechnete (relativ) größte Wert. Alternativ könnte man für die Definitionsmenge auch die Nullstellen der Funktion V bestimmen. Es ergibt sich $r_1 = 0$; $r_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{200}{\pi}}$. Damit hat man dann auch $D_V = \left]0; \sqrt{\frac{200}{\pi}}\right[$. *(Auch hier gilt wieder: In der Aufgabe 4.1 steht nichts von Runden, also gibt man gefälligst das exakte Ergebnis an, auch wenn's nicht hübsch aussieht! Erst in Aufgabe 4.2 darf man auf zwei Nachkommastellen runden; man darf da dann also auch einfach V(7,98) ausrechnen statt* $V\left(\sqrt{\frac{200}{\pi}}\right)$*).*

<u>2013-AII</u>

5.0 Eine Schule veranstaltet eine Projektwoche zum Thema „Work-Life-Balance". Zum Abschluss erhalten alle Teilnehmer je einen Relax-Ball, der in einer zylinderförmigen Schachtel verpackt ist. Von dieser ist bekannt, dass sie eine Oberfläche von 180 cm² besitzt. Bei der Rechnung wird auf Einheiten verzichtet.

5.1 Zeigen Sie, dass für das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit vom Zylinderradius r gilt: $V(r) = -\pi \cdot r^3 + 90r$ (4 BE)

Lösung:
Das ist praktisch dieselbe Aufgabe wie 2009-AI, nur mit anderen Zahlen!
Für das Volumen eines Zylinders gilt allgemein: $V = \pi r^2 h$.
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von r angegeben werden; h müssen wir also noch bestimmen. Laut Aufgabe soll die gesamte Oberfläche des Zylinders 180 sein. In der Formelsammlung steht die Mantelfläche eines Zylinders: $M = 2\pi rh$. Dazu kommen noch Grund- und Deckfläche, also Kreise, jeweils mit Flächeninhalt πr^2. Also gilt insgesamt: $2\pi rh + 2\pi r^2 = 180$. Bevor wir irgendetwas anderes machen: Teilen wir erst mal durch das störende π – und am besten auch noch durch 2! *(Links natürlich beide Terme dadurch teilen!)* Es bleibt: $rh + r^2 = \frac{180}{2\pi} = \frac{90}{\pi}$; sieht doch schon einfacher aus! Weiter: $rh = \frac{90}{\pi} - r^2$. Jetzt noch durch r teilen (und berücksichtigen, dass rechts beide Terme geteilt werden müssen!): $h = \frac{90}{\pi r} - r$.

Das setzen wir nun ein: $V(h) = \pi \cdot r^2 \cdot (\frac{90}{\pi\, r} - r)$ *(Klammern setzen!)*

$$= \frac{90\pi\, r^2}{\pi\, r} - \pi\, r^3 \quad \textit{(Klammer ausmultiplizieren)}$$

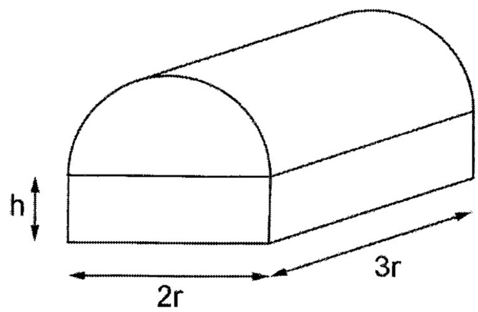
$$= -\pi\, r^3 + 90r \quad \textit{(kürzen und Reihenfolge umstellen)}$$

*(Ja, ich weiß, die meisten rechnen nicht gerne mit π und tippen das lieber in den Taschenrechner ein (oder benutzen einfach gleich 3,14) – aber in der Aufgabe steht nichts von Runden! Und im Endergebnis soll ja auch π stehen und nicht 3,14! Also rechnet man gefälligst auch in allen Zwischenschritten mit den **exakten** Werten, nicht mit gerundeten, lässt das π also immer stehen!)*

Hier ist nicht verlangt, die Definitionsmenge anzugeben. Es ist ja auch gar keine Extremwertaufgabe (es ist nirgends nach dem größtmöglichen Volumen gefragt!), also braucht man die Randwerte nicht zu berechnen – deshalb ist die Definitionsmenge hier unnötig. (Und es wäre übrigens auch nicht gerade einfach, sie auszurechnen – sogar noch etwas schwieriger als in 2010-AI/4, weil hier auch noch das π stört.)

2022-AI

3.0 Ein Tiergarten plant den Bau eines Tropenhauses, in dem ein künstliches Ökosystem mit Lebensbedingungen für tropische Pflanzen- und Tierarten geschaffen werden soll. Das Tropenhaus soll die Form eines Quaders mit aufgesetztem Halbzylinder bekommen. Der Radius des Halbzylinders wird mit r bezeichnet. Der Quader hat die Breite 2r, die Länge 3r und die Höhe h (siehe Skizze).
Um möglichst ideale klimatische Bedingungen zu schaffen, sollen die Außenwände des Tropenhauses und das Dach aus Glas bestehen. Hierfür sind $1000\,m^2$ Glas vorgesehen.
Die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses in Abhängigkeit vom Radius r des Halbzylinders lässt sich durch die Funktionswerte der Funktion $V: r \mapsto V(r)$ beschreiben.
Aus den Baurichtlinien geht hervor, dass der Radius r des Halbzylinders maximal $8{,}5\,m$ betragen darf. Der Tiergartenbetreiber fordert hierfür mindestens $4\,m$.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



6 **3.1** Stellen Sie eine Gleichung der in 3.0 eingeführten Funktion V auf. Bestimmen Sie dazu vorab die Maßzahl A des Flächeninhalts der insgesamt zu verglasenden Oberfläche des Tropenhauses in Abhängigkeit des Radius des Halbzylinders und der Höhe des Quaders.

[Mögliche Ergebnisse: $A(r,h) = 10rh + 4\pi r^2$ und $V(r) = 600r - 0{,}9\pi r^3$]

Lösung:

Für das Volumen eines Zylinders gilt allgemein: $V = \pi r^2 h$, ein halber Zylinder hat also das Volumen $\pi r^2 h/2$. Aber Vorsicht: Das h in der Formel hier entspricht *nicht* dem h in der Aufgabe bzw. Zeichnung hier! Es geht um die Höhe des Halbzylinders, also den Abstand von Grund- und Deckfläche (die beiden Halbkreise); und dieser Abstand ist laut Text und Zeichnung gleich 3r! Also ist hier: $V_{Halbzyl} = \pi \cdot r^2 \cdot 3r/2 = 1{,}5\pi r^3$. Dazu kommt noch das Volumen des Quaders unten. Das Volumen eines Quaders ist Länge mal Breite mal

Höhe, mit den Angaben aus Text und Zeichnung also: $V_{Quader} = 3r \cdot 2r \cdot h = 6r^2h$. Das gesamte Volumen ist also erst mal $V = 6r^2h + 1{,}5\pi r^3$.
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von r angegeben werden; h müssen wir also noch bestimmen. Laut Aufgabe soll die gesamte Oberfläche des Gewächshauses 1000 (m^2) sein. In der Formelsammlung steht die Mantelfläche eines Zylinders: $M = 2\pi rh$; der Halbzylinder hat also die Mantelfläche πrh. Wieder müssen wir aufpassen: Die Höhe ist hier gleich 3r! Also folgt erst mal: $M = \pi r \cdot 3r = 3\pi r^2$. Dazu kommen noch Grund- und Deckfläche, also Halbkreise, jeweils mit Flächeninhalt $\pi r^2/2$, insgesamt πr^2, und vier Rechtecke: zwei davon mit Länge 3r und Höhe h, also Flächeninhalten 3rh, die anderen zwei mit Länge 2r und Höhe h, also Flächeninhalten 2rh. Also gilt insgesamt:

$$A(r,h) = 3\pi r^2 + \pi r^2 + 2\cdot 3rh + 2\cdot 2rh = 10rh + 4\pi r^2 = 1000 \quad | - 4\pi r^2$$

➔ $10rh = 1000 - 4\pi r^2 \;|:10r$ ➔ $h = \frac{100}{r} - 0{,}4\pi r$ *(rechts beide Summanden teilen!!!)*

Das setzen wir nun ein: $V(r) = 6r^2 \cdot \left(\frac{100}{r} - 0{,}4\pi r\right) + 1{,}5\pi r^3$ *(Klammern setzen!)*

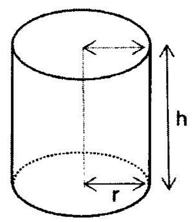
$= \frac{600r^2}{r} - 2{,}4\pi r^3 + 1{,}5\pi r^3$ *(Klammer ausmultiplizieren)*

$= 600r - 0{,}9\pi r^3$ *(kürzen und zusammenfassen)*

Hier ist nicht verlangt, die Definitionsmenge anzugeben. Sie ist ja auch direkt im Text eigentlich angegeben: Der Radius soll mindestens 4 m, darf aber höchstens 8,5 m sein. Also ist $D_V = [4; 8{,}5]$.

T2023-AI/1.4 (in der CAS-Version ist es 1.5!)

1.5.0 Damit das Teichwasser keimfrei bleibt, soll eine Chlormischung zugesetzt werden, die in zylinderförmigen Dosen aus Blech verkauft wird.
Der Hersteller dieser Dosen möchte pro Dose nicht mehr als 600 cm^2 Blech verbrauchen. Der Dosenradius soll dabei nicht kleiner als 1 cm und nicht größer als 9 cm sein.



4 **1.5.1** Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, welche das Dosenvolumen $V(r)$ in Abhängigkeit vom Dosenradius r angibt, wenn pro Dose inklusive Boden und Deckel genau 600 cm^2 Blech verwendet werden.
[mögliches Ergebnis: $V(r) = -\pi r^3 + 300r$]

Das ist praktisch dieselbe Aufgabe wie 2009-AI und 2013-AII, nur mit anderen Zahlen!

Lösung:

Für das Volumen eines Zylinders gilt allgemein: $V = \pi r^2 h$.
Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von r angegeben werden; h müssen wir also noch bestimmen. Laut Aufgabe soll die gesamte Oberfläche des Zylinders 600 sein. (Es ist ja die Rede davon, dass pro Dose 600 cm^2 Blech verwendet werden.) In der Formelsammlung steht die Mantelfläche eines Zylinders: $M = 2\pi rh$. Dazu kommen noch Grund- und Deckfläche (siehe Aufgabentext: *einschließlich Boden und Deckel*!), also Kreise, jeweils mit Flächeninhalt πr^2. Also gilt insgesamt: $2\pi rh + 2\pi r^2 = 600$. Bevor wir irgendetwas anderes machen: Teilen wir erst mal durch das störende π – und am besten auch noch durch 2! *(Links natürlich beide Terme dadurch teilen!)* Es bleibt: $rh + r^2 = \frac{600}{2\pi} = \frac{300}{\pi}$; sieht doch schon einfacher aus! Weiter: $rh = \frac{300}{\pi} - r^2$. Jetzt noch durch r teilen (und berücksichtigen, dass rechts beide Terme geteilt werden müssen!): $h = \frac{300}{\pi r} - r$.

Das setzen wir nun ein: $V(h) = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{300}{\pi r} - r\right)$ *(Klammern setzen!)*

$= \frac{300\pi r^2}{\pi r} - \pi r^3$ *(Klammer ausmultiplizieren)*

$= -\pi r^3 + 300r$ *(kürzen und Reihenfolge umstellen)*

(Ja, ich weiß, die meisten rechnen nicht gerne mit π und tippen das lieber in den Taschenrechner ein (oder benutzen einfach gleich 3,14) – aber in der Aufgabe steht nichts von Runden! Und im Endergebnis soll ja

auch π stehen und nicht 3,14! Also rechnet man gefälligst auch in allen Zwischenschritten mit den ***exakten*** *Werten, nicht mit gerundeten, lässt das π also immer stehen!)*

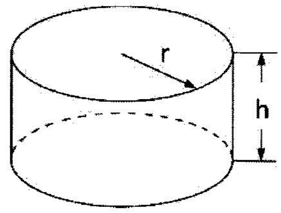
Hier ist nicht verlangt, die Definitionsmenge anzugeben – sie steht aber ja schon praktisch direkt im Aufgabentext! Der Dosenradius soll nicht kleiner als 1 cm und nicht größer als 9 cm sein, also ist

$$D_V = [1; 9].$$

Wegen der Formulierung „nicht kleiner als‘‘ und „nicht größer als‘‘ müssen die Ränder hier mit dazu genommen werden!

2023-AI/2

2.0 An einem Küstenabschnitt stranden immer wieder Delfine. Diese werden in einer Auffangstation gesund gepflegt, bis sie wieder in freier Natur überleben können. Um die Kapazität der Auffangstation zu erhöhen, soll ein zusätzliches Becken aus Edelstahl angefertigt werden, welches die Form eines geraden Kreiszylinders hat und nach oben offen ist.



Dazu steht ein begrenzter Vorrat an Edelstahlblechen zur Verfügung. Diese haben modellhaft insgesamt eine Fläche von $180\pi\,\mathrm{m}^2$. Aus Platzgründen kann das Becken nur einen maximalen Durchmesser von $20\,\mathrm{m}$ haben.

Die Funktion $V: r \mapsto V(r)$ beschreibt die Maßzahl des Volumens des Beckens in Kubikmetern in Abhängigkeit vom Radius r in Metern.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle.

5 **2.1** Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf. Begründen Sie, dass für die mathematisch maximale Definitionsmenge der Funktion V gilt: $D_V =]0; 10]$

[**Mögliches Ergebnis:** $V(r) = -\frac{1}{2}\pi r^3 + 90\pi r$]

Diese Aufgabe ist sehr ähnlich zu 2009-AI, 2013-AII und T2023-AI.

Lösung:

Für das Volumen eines Zylinders gilt allgemein: $V = \pi r^2 h$.

Das Volumen soll (nur) in Abhängigkeit von r angegeben werden; h müssen wir also noch bestimmen. Laut Aufgabe soll die gesamte Oberfläche des Beckens 180π sein. (Es ist ja die Rede davon, dass man einen Vorrat von $180\pi\ \mathrm{m}^2$ an Blechen hat.) In der Formelsammlung steht die Mantelfläche eines Zylinders: $M = 2\pi rh$. Dazu kommen noch die Grundfläche (siehe Aufgabentext: das Becken soll oben natürlich offen sein, hat aber ebenso natürlich einen Boden!), also ein Kreis – der hat den Flächeninhalt πr^2. Also gilt insgesamt: $2\pi rh + \pi r^2 = 180\pi$. Bevor wir irgendetwas anderes machen: Teilen wir erst mal durch das störende π! *(Links natürlich beide Terme dadurch teilen!)* Es bleibt: $2rh + r^2 = 180$; sieht doch schon einfacher aus! Weiter: $2rh = 180 - r^2$. Jetzt noch durch 2r teilen (und berücksichtigen, dass rechts beide Terme geteilt werden müssen!): $h = \frac{90}{r} - \frac{r}{2}$.

Das setzen wir nun ein: $V(h) = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{90}{r} - \frac{r}{2}\right)$ *(Klammern setzen!)*

$= \frac{90\,\pi\, r^2}{r} - \frac{\pi r^3}{2}$ *(Klammer ausmultiplizieren)*

$= -\frac{1}{2}\pi r^3 + 90\pi r$ *(kürzen und Reihenfolge umstellen)*

(Ja, ich weiß, die meisten rechnen nicht gerne mit π und tippen das lieber in den Taschenrechner ein (oder benutzen einfach gleich 3,14) – aber in der Aufgabe steht nichts von Runden – erst bei den Endergebnissen! Und im Ergebnis für die Funktion soll ja auch π stehen und nicht 3,14! Also rechnet man gefälligst auch in allen Zwischenschritten mit den ***exakten*** *Werten, nicht mit gerundeten, lässt das π also immer stehen!)*

Die Definitionsmenge steht schon da, man muss sie nur noch begründen. Dass der Radius positiv sein muss, sollte klar sein, also gilt r > 0. Außerdem steht im Text noch, dass der Durchmesser maximal 20 m sein kann. Der Radius ist bekanntlich die Hälfte des Durchmessers, also kann der Radius höchstens 10 m sein. Damit hat man, wie behauptet, $D_V =]0; 10]$. *(Der Wert 0 muss hier für r ausgeschlossen werden, weil man bei der Berechnung von h ja durch r teilt; der Wert 10 sollte eingeschlossen werden wegen der Formulierung „maximal" im Aufgabentext.)*

6. Punkt auf Graph

Dies wurde in den folgenden Prüfungen gefragt:
Nachtermin 2001/2, Nachtermin 2002/3, 2003-AI/3, 2004-AI/2, 2007-AII/4, 2011-AII/5, Nachtermin 2013/3, 2014-AII/4, 2015-AI/3, 2015-AII/4, 2018-AII/4, T2021-AI, T2024-AII

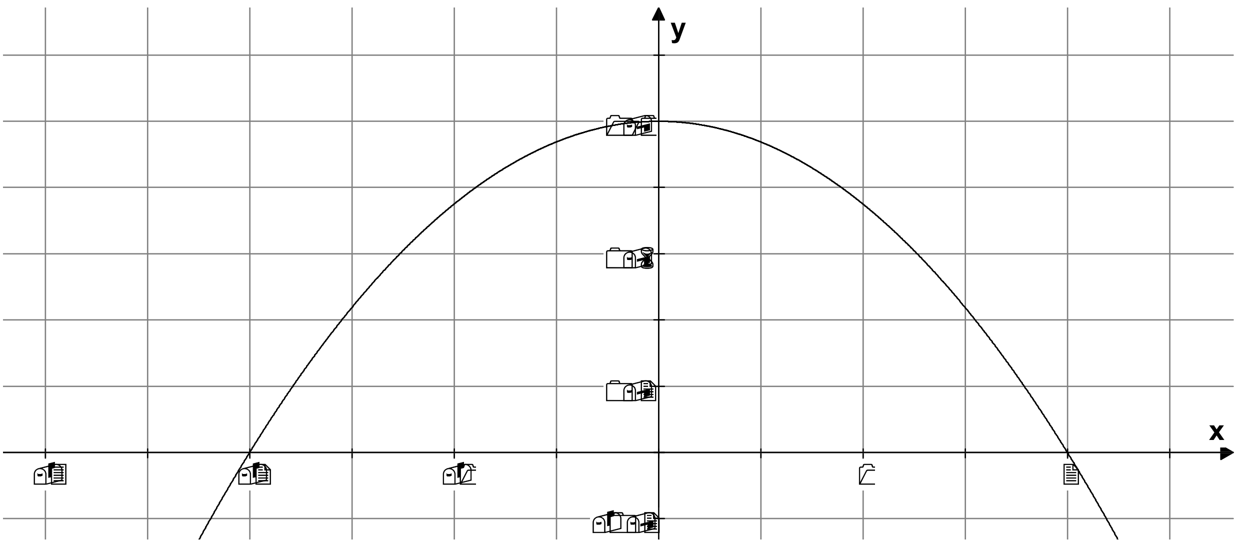
Hier ist praktisch immer ein Flächeninhalt gefragt (Volumen bisher nur in 2015-AII). Wieder sucht man sich zunächst (eine) passende Formel(n) für den gesuchten Flächeninhalt aus der Formelsammlung heraus. Eine Seitenlänge der Figur kann man meist direkt aus der Skizze ablesen; die andere nötige Seitenlänge hängt im Allgemeinen von der y-Koordinate des Punktes ab, der auf dem Graph liegen soll. ***Vorsicht:*** Man muss immer darauf achten, welche Längen fest sind (bei diesen kann der Zahlenwert direkt abgelesen werden) und welche von der Variablen abhängen!

Wenn der Funktionsterm vorgegeben ist, dann setzt man die x-Koordinate des Punkts einfach ein und hat damit die benötigte y-Koordinate (die man dann wiederum in die Formel für den Flächeninhalt einsetzt). Manchmal muss man den Funktionsterm aber auch erst bestimmen – in den Prüfungsaufgaben 2004-AI/2 und 2007-AII/4 musste man z. B. erst mal die Gleichung der Geraden aufstellen, auf welcher der Punkt liegen soll. (Beide Aufgaben hätte man übrigens stattdessen auch mit dem Strahlensatz lösen können!)

Sollen mehrere Punkte auf verschiedenen Graphen liegen, so braucht man im Allgemeinen die Differenz ihrer y-Koordinaten.

Nachtermin 2001 *(leicht gehobener Anspruch wegen Trapezformel)*

2 Unten stehende Abbildung zeigt den Querschnitt eines „auf dem Kopf stehenden“ Schiffsrumpfes. Er soll durch ein Trapez aus Balken stabilisiert werden. Der genannte Querschnitt wird durch den Graphen der Funktion h mit $h(x) = -0{,}25x^2 + 1$; $D_h = [-2; 2]$ sehr gut beschrieben.



Berechnen Sie die Abszisse $u \in]0; 2[$ des Punktes $P(u; h(u))$ so, dass der Flächeninhalt des Trapezes sein absolutes Maximum annimmt. (9 BE)

(Mögliches Zwischenergebnis für den Flächeninhalt des Trapezes: $A(u) = -\frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u + 2$.)

Lösung (für den ersten Teil der Aufgabe):

Der Flächeninhalt eines Trapezes kann mit der Formel $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ berechnet werden, wobei a und c die Längen der beiden parallelen Seiten sind und h der Abstand dieser beiden Seiten ist. Aus der Zeichnung kann man entnehmen, dass die untere (längere) Seite die Länge 4 hat (unabhängig von u!). Die obere Seite erstreckt sich rechts bis zum Punkt P mit x-Wert u, links offensichtlich genauso weit. (Kann man auch begründen: das Trapez ist ja in die Parabel einbeschrieben, und am Funktionsterm von h kann man ablesen, dass diese Parabel symmetrisch zur y-Achse liegt.) Die obere (kürzere) Seite hat also die Länge 2u. Die Höhe geht von der x-Achse senkrecht bis zum Punkt P hinauf, also ist die Höhe die Differenz der beiden y-Werte: $h = y_P - 0$. In der Zeichnung steht aber schon, dass P die Koordinaten (u | h(u)) hat, das heißt es ist:

$$h = y_P = h(u) = -0{,}25u^2 + 1$$

(h(u) bedeutet einfach, dass man in den Funktionsterm überall, wo ein x steht, ein u einsetzt!)
Das setzen wir nun alles in die Flächeninhalts-Formel oben ein:

$A(u) = \frac{4+2u}{2} \cdot (-0{,}25u^2 + 1)$ *(Klammern setzen!)*

$= \frac{2(2+u)}{2} \cdot (-0{,}25u^2 + 1)$ *(im Zähler des Bruchs 2 ausklammern, damit man kürzen kann)*

$= (2 + u) \cdot (-0{,}25u^2 + 1)$ *(den Bruch kürzen; alternativ:* $\frac{4+2u}{2} = \frac{4}{2} + \frac{2u}{2} = 2 + u$*)*

$= -0{,}5u^2 + 2 - 0{,}25u^3 + u$ *(Klammern ausmultiplizieren)*

$= -\frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u + 2$ *(Reihenfolge umstellen und Dezimalzahlen als Brüche schreiben)*

Über die Definitionsmenge braucht man sich hier keine Gedanken zu machen – in der Aufgabe steht ja schon $u \in]0; 2[$.

Nachtermin 2002

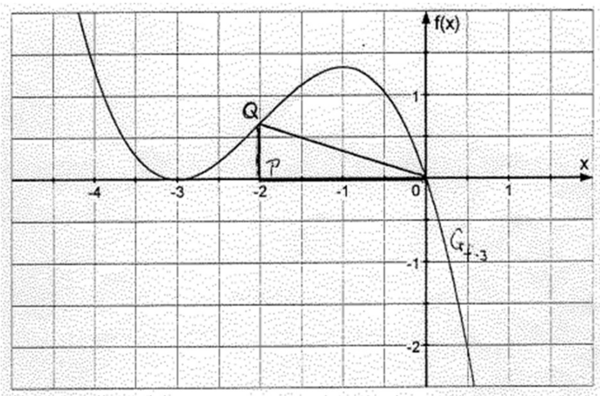
2.0 Für die folgenden Teilaufgaben wird die Funktion f_{-3} (also $k = -3$) mit $f_{-3}(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$ betrachtet.

3.0 Die Gerade mit der Gleichung $x = a$ mit $-3 < a < 0$ schneidet die x-Achse im Punkt P und den Graphen $G_{f_{-3}}$ im Punkt Q. Zusammen mit dem Koordinatenursprung O wird das Dreieck POQ gebildet.

3.1 Zeichnen Sie für den Sonderfall $a = -2$ das Dreieck POQ in das vorhandene Koordinatensystem ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts A des Dreiecks POQ in Abhängigkeit von a. (4 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $A(a) = \frac{1}{6}a^4 + a^3 + 1{,}5a^2$)

Lösung (zu 3.1):
Graph und Dreieck sehen so aus (aus der Musterlösung kopiert):



Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist allgemein $A = \frac{1}{2}gh$, wobei g die Grundseite ist und h die Höhe (die auf der Grundseite senkrecht steht und durch den gegenüberliegenden Punkt verläuft).

Hier bietet es sich an, die untere Seite als Grundseite zu nehmen (Welcher der Dreiecksseiten man als Grundsseite nimmt, ist wurscht – meist nimmt man die untere, aber jede andere normalerweise geht auch!), also g = $\overline{PO}$. Da beide Punkte auf der x-Achse liegen, ist also g = $x_O - x_P$ = 0 – a = –a (Vorsicht: Nur in der Zeichnung hier ist x_P = –2, im Allgemeinen hängt der x-Wert des Punktes P von a ab!). Die Höhe geht von der x-Achse senkrecht zum Punkt Q, also ist h = y_Q – 0. Da Q auf dem Graph liegt und die x-Koordinate a hat, ist h = y_Q = $f_{-3}(a)$ = $-\frac{1}{3}a^3 - 2a^2 - 3a$ (Einfach überall, wo ein x im Funktionsterm steht, das a einsetzen! Vorsicht: Wieder gilt, dass der y-Wert zwar in der Zeichnung etwa 0,7 ist, aber allgemein von a abhängt!).
Das setzen wir alles oben in die Flächeninhaltsformel ein:

$A(a) = \frac{1}{2}\,(-a) \cdot (-\frac{1}{3}a^3 - 2a^2 - 3a)$ *(Klammern setzen!)*

$= \frac{1}{6}a^4 + a^3 + 1{,}5a^2$ *(Klammern ausmultiplizieren, dabei etwas Bruchrechnen anwenden)*

Über die Definitionsmenge braucht man sich hier kaum Gedanken zu machen – in der Aufgabe steht ja schon –3 < a < 0, also ist D_A =]–3; 0[.

2003-AI

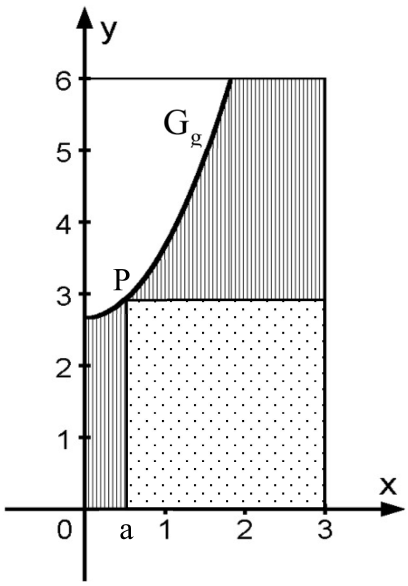
3.0 Die schraffierte Fläche in der nebenstehenden Skizze stellt den Rest einer längs eines Parabelstücks G_g zersprungenen ehemals rechteckigen Glasplatte dar. Der zu diesem Parabelstück gehörende Funktionsterm lautet:

$$g(x) = x^2 + \frac{8}{3} \text{ mit } D_g = \left[\ 0\ ;\ \sqrt{\frac{10}{3}}\ \right].$$

Aus dem Rest der Glasplatte soll eine achsen-parallele Scheibe (punktiert) so geschnitten werden, dass der Punkt P(a; g(a)) auf G_g liegt.

3.1 Stellen Sie die Maßzahl A(a) der „neuen" Rechtecksfläche in Abhängigkeit von der Abszisse a des Punktes P dar. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge D_A an. (Lage von P siehe Skizze!)

(Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -a^3 + 3a^2 - \frac{8}{3}a + 8$)



Lösung:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist allgemein Länge mal Breite; welche Seite man wie nennt, ist dabei wurscht. Nehmen wir in dieser Aufgabe mal die Seite auf der x-Achse als Breite b und die Seite parallel zur y-Achse als Länge ℓ (Vorsicht: Man sollte keine der beiden Seiten a nennen, weil a hier schon eine andere Bedeutung hat!) Die Breite geht auf der x-Achse von a bis 3, also ist b = 3 – a. Die Länge geht von der x-Achse senkrecht zum Punkt P, also ist ℓ = y_P – 0. Da P auf dem Graph liegt und die x-Koordinate a hat, ist ℓ = y_P = g(a) = $a^2 + \frac{8}{3}$ (Einfach überall, wo ein x im Funktionsterm steht, das a einsetzen!)
Vorsicht: Der y-Wert von P ist in der Zeichnung zwar etwa 3, aber allgemein hängt er von a ab!)
Das setzen wir alles in die Flächeninhaltsformel ein:

$A(a) = (3 - a) \cdot (a^2 + \frac{8}{3})$ *(Klammern setzen!)*

$= 3a^2 + 3 \cdot \frac{8}{3} - a^3 - \frac{8}{3}a$ *(Klammern ausmultiplizieren)*

$= -a^3 + 3a^2 - \frac{8}{3}a + 8$ *(Reihenfolge umstellen, etwas Bruchrechnen anwenden)*

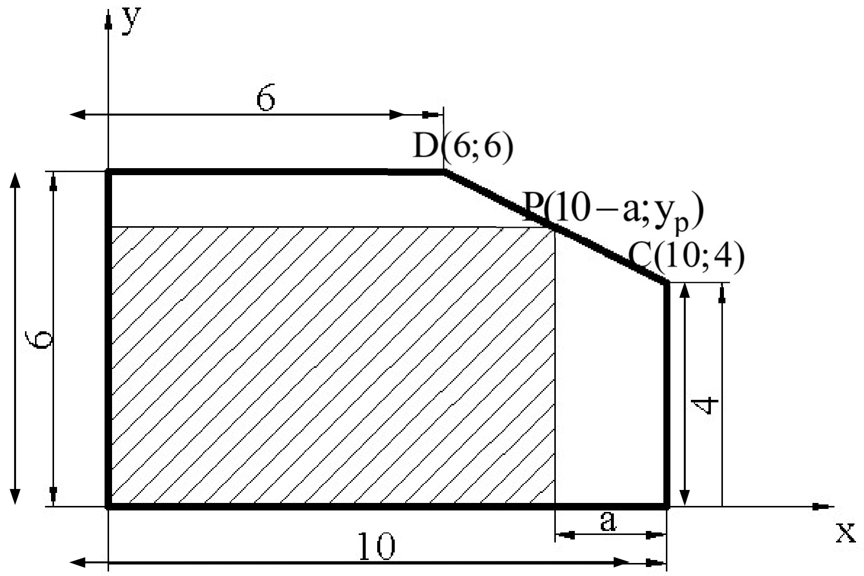
Die Definitionsmenge steht praktisch schon dran: P soll ja auf dem Graph von g liegen, also kann a nur die x-Werte annehmen, die zum Graph von g gehören, das heißt, es muss $a \in D_g$ gelten. Damit ist $D_A = D_g = \left[0; \sqrt{\frac{10}{3}}\right]$. *(Anmerkung:* Dies ist die einzige mir bekannte Extremwert-Prüfungsaufgabe, bei welcher das absolute Maximum tatsächlich mal am Rand der Definitionsmenge liegt!)

2004-AI *(Vorsicht – gehobener Anspruch!)*

2.0 Aus einem fünfeckigen Brett soll ein rechteckiges Stück herausgesägt werden (siehe Skizze unten). Dabei soll der Punkt P auf der Strecke [CD] liegen.

2.1 Stellen Sie die Flächenmaßzahl A(a) des Rechtecks in Abhängigkeit von der Streckenlänge a dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion A an.

(Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 2a - 80)$) (6 BE)



Lösung:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist allgemein Länge mal Breite. Nehmen wir die Seite auf der x-Achse als Breite b und die Seite parallel zur y-Achse als Länge ℓ (Vorsicht: Man sollte keine der beiden Seiten a nennen, weil a hier schon eine andere Bedeutung hat!) Das fünfeckige Brett hat die Breite 10, rechts vom Rechteck wird aber ein Streifen der Breite abgesägt, also ist b = 10 – a. Die Länge geht von der x-Achse senkrecht zum Punkt P, also ist $\ell = y_P - 0 = y_P$. Laut Aufgabe soll P auf der Strecke [CD] liegen; von dieser Strecke hat man aber die Gleichung leider nicht gegeben!

Also ein wenig Grundwissen heraussuchen: Wie stellt man die Gleichung einer Strecke (bzw. Gerade) auf, von der man zwei Punkt kennt? (1) Man berechnet zunächst die Steigung: $m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{6-4}{6-10} = -0{,}5$. (Welcher der beiden Punkte zuerst kommt, ist wurscht – wichtig ist nur, dass die Differenz der y-Koordinaten oben steht und die der x-Koordinate unten! Und dass die Koordinaten von Punkt D und von Punkt C jeweils übereinander stehen – die Reihenfolge oben und unten nicht unterschiedlich machen!) (2) Man schreibt sich die Gleichung der Geraden hin, zunächst noch mit unbekanntem y-Achsenabschnit: $y = -0{,}5x + t$ (Wie man den y-Achsenabschnitt nennt, ist ziemlich wurscht – üblich sind t, b, c, n und anderes.) (3) Man setzt einen der beiden Punkte ein (welchen, ist wurscht – nehmen wir mal D) und berechnet damit den Wert des y-Achsenabschnitts: $6 = -0{,}5 \cdot 6 + t \Rightarrow t = 9$. Also ist die Gleichung der Geraden durch CD: $y = -0{,}5x + 9$.

Weiter – nun können wir den x-Wert von P einsetzen, um damit seinen y-Wert auszurechnen:

$\ell = y_P = -0{,}5\,(10 - a) + 9 = -5 + 0{,}5a + 9 = 0{,}5a + 4$

(Vorsicht: Die y-Koordinate von P ist 10 – a, nicht a! Steht in der Zeichnung – also einfach ablesen, wenn man nicht selbst darauf kommt! Wieder mal gilt: In der Zeichnung hat x_P etwa den Wert 8 und y_P etwa den Wert 5 – im Allgemeinen hängt das aber von a ab!)

Das setzen wir alles in die Flächeninhaltsformel ein:

$A(a) = (10 - a) \cdot (0{,}5a + 4)$ *(Klammern setzen!)*

$= 5a + 40 - 0{,}5a^2 - 4a$ *(Klammern ausmultiplizieren)*

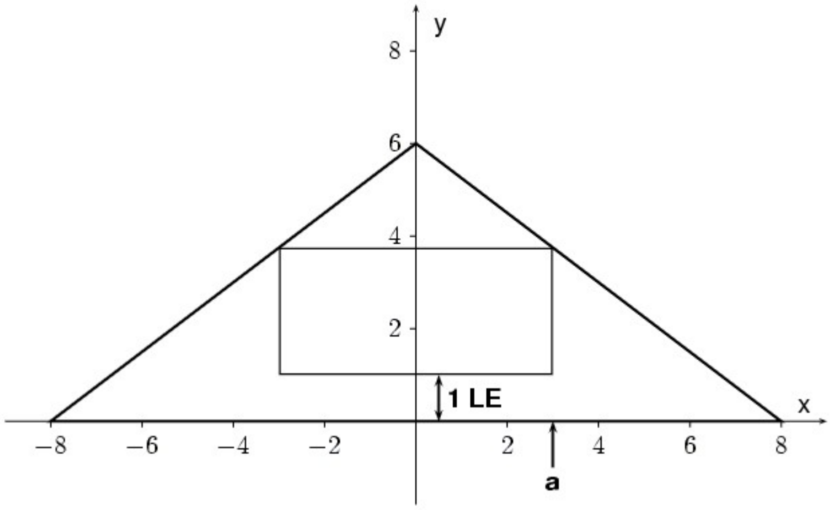
$= -\dfrac{1}{2}a^2 + a + 40$ *(Reihenfolge umstellen, zusammen fassen, die 0,5 als Bruch schreiben)*

$= -\dfrac{1}{2}(a^2 - 2a - 80)$ *(ausklammern; auf VZ achten!)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass P auf der Strecke [CD] liegen soll. Aus der Zeichnung kann man ablesen, dass dies nur für a-Werte zwischen 0 und 4 der Fall ist. Also ist $D_A = [0; 4]$ (die beiden Werte sollte man hier einschließen, weil ja auch P = C oder P = D sein könnte).
Alternativ könnte man auch so argumentieren: Die Strecke [CD] wird durch die Gleichung $y = -0{,}5x + 9$ beschrieben (siehe oben), wobei x zwischen 6 und 10 liegen muss. Da P den x-Wert 10 – a hat, muss also gelten: $6 \leq 10 - a \leq 10$. Löst man diese beiden Ungleichungen, so erhält man $0 \leq a \leq 4$ und damit wieder dieselbe Definitionsmenge.

2007-AII *(wieder: gehobener Anspruch! sogar noch ein wenig schwieriger als die vorherige...)*

4.0 In einen dreieckigen Dachgiebel soll symmetrisch zur Mittelachse (y-Achse) ein rechteckiges Fenster eingebaut werden. Das Fenster soll auf einem Sims der Höhe 1 LE aufsitzen (siehe Skizze):



4.1 Stellen Sie den Flächeninhalt A(a) des Fensters in Abhängigkeit von a (siehe Skizze) dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge der Funktion A an. [Mögliches Teilergebnis: $A(a) = 10a - 1{,}5a^2$] (7 BE)

Lösung:
Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist allgemein Länge mal Breite. Nehmen wir die Seite parallel zur x-Achse als Breite b und die Seite parallel zur y-Achse (also die Höhe des Fensters) als Länge ℓ (Vorsicht: Man sollte keine der beiden Seiten a nennen, weil a hier schon eine andere Bedeutung hat!). Das Fenster erstreckt sich laut Zeichnung rechts bis a. Laut Aufgabe ist es symmetrisch zur y-Achse, also geht es links bis –a. Damit ist b = 2a. Die Länge geht vom y-Wert 1 (Sims!) senkrecht hinauf bis zur Schräge; nennen wir den Punkt rechts oben P, dann ist also $\ell = y_P - 1$. Laut Aufgabe soll P liegt auf der schrägen Strecke; von dieser Strecke hat man aber die Gleichung leider nicht gegeben!

Die Gleichung dieser Strecke (bzw. Geraden) aufzustellen, geht ähnlich wie in 2004-AI/2 – nur einfacher. Den y-Achsenabschnitt kann man hier sofort ablesen: 6. Die Steigung berechnet man wie oben: $m = \frac{0-6}{8-0}$ $= -0{,}75$. (Welcher der beiden Punkte zuerst kommt, ist wieder wurscht – wichtig ist nur, dass die Differenz der y-Koordinaten oben steht und die der x-Koordinate unten! Und dass die Koordinaten der Punkte jeweils übereinander stehen – die Reihenfolge oben und unten nicht unterschiedlich machen!) Also ist die Gleichung der Geraden, auf der P liegt: $y = -0{,}75x + 6$.

Weiter – nun können wir den x-Wert von P einsetzen, um damit seinen y-Wert auszurechnen:

$\ell = y_P - 1 = (-0{,}75\,a + 6) - 1 = -0{,}75\,a + 5$ *(die Klammern hier sind nicht nötig, machen es aber übersichtlicher)*

(Wieder mal gilt: In der Zeichnung hat x_P etwa den Wert 3 und y_P etwa den Wert 3,8 – im Allgemeinen hängt das aber von a ab!)

Das setzen wir alles in die Flächeninhaltsformel ein:

$A(a) = 2a \cdot (-0{,}75a + 5)$ *(Klammern setzen!)*

$= -1{,}5a^2 + 10a$ *(Klammern ausmultiplizieren)*

$= 10a - 1{,}5a^2$ *(Reihenfolge umstellen)*

Für die Definitionsmenge muss man beachten, dass der Punkt rechts oben auf der schrägen Strecke liegen soll – und auch, dass der y-Wert größer als 1 sein muss bzw. die Länge (Höhe) des Fensters größer als 0! Aus der Zeichnung kann man ablesen, dass a größer als 0 sein muss; den zweiten Wert kann man nicht so einfach ablesen. Aber man kann ihn ausrechnen:

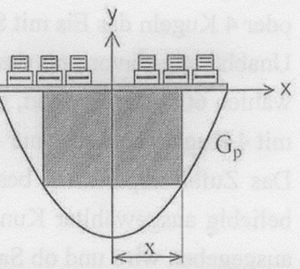
$$\ell > 0 \Rightarrow -0{,}75a + 5 > 0 \Rightarrow -0{,}75a > -5 \Rightarrow a < \frac{20}{3}$$

Also ist $D_A =]0; \tfrac{20}{3}[$.

Vorsicht: (1) Man teilt hier durch eine negative Zahl, also dreht sich die Richtung der Ungleichung um. (2) Nicht runden! Auch wenn der Taschenrechner hier 6,66666666 oder so anzeigt – man schreibt nicht 6,67 hin (oder gar 6,66), sondern gefälligst das exakte Ergebnis, also den Bruch oder meinetwegen auch die periodische Kommazahl $6{,}\overline{6}$!

2011-AII *(recht einfache Aufgabe)*

5.0 Der Gepäckraum eines Flugzeuges kann im Querschnitt mithilfe der Funktion $p: x \mapsto 0{,}5x^2 - 3{,}125$ beschrieben werden. Das Gepäck soll dabei in Containern mit rechteckiger Querschnittsfläche untergebracht werden (vgl. Abbildung).



Die Längeneinheit ist Meter und kann bei den Berechnungen weggelassen werden.

5.1 Stellen Sie eine Gleichung für die Querschnittsfläche A(x) der Container in Abhängigkeit von x auf und bestimmen Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge. (4 BE)
[Teilergebnis: $A(x) = -x^3 + 6{,}25x$]

Lösung:

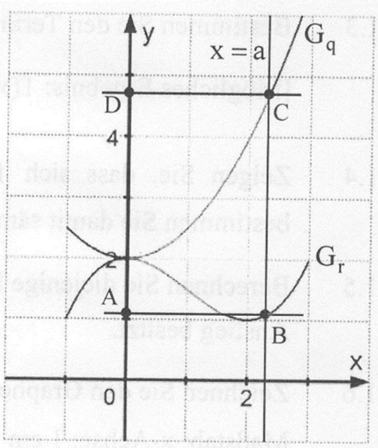
Nehmen wir wieder die Seite des Rechtecks auf der x-Achse als Breite b und die Seite parallel zur y-Achse als Länge ℓ. Der Container hat laut Zeichnung rechts die Breite x. Da er symmetrisch zur y-Achse ist (sieht man daran, dass die Parabel G_p symmetrisch zur y-Achse ist, was man wiederum an ihrem Funktionsterm p(x) sieht), geht er links bis –x. Damit ist b = 2x. Die Länge geht von der x-Achse senkrecht nach unten bis zur Parabel; nennen wir den Punkt unten rechts P, ist also $\ell = 0 - y_P = -y_P$. (Vorsicht: Oben minus unten, der größere Wert minus den kleineren Wert! Also nicht $\ell = y_P - 0$! Dann wäre die Länge nämlich negativ...) Da P auf dem Graph liegt, ist $\ell = -y_P = -p(x) = -0{,}5x^2 + 3{,}125$ (Vorsicht: Beide VZ umdrehen!).

Das setzen wir alles in die Flächeninhaltsformel ein:
$A(a) = 2x \cdot (-0{,}5x^2 + 3{,}125)$ *(Klammern setzen!)*
$= -x^3 + 6{,}25x$ *(Klammern ausmultiplizieren)*

Die Definitionsmenge bekommt man wieder recht einfach heraus. Offensichtlich muss $x > 0$ gelten. Andererseits kann der rechte untere Punkt nicht weiter rechts als der rechte Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse liegen. Diesen kann man schnell ausrechnen: $0{,}5x^2 - 3{,}125 = 0$ ➔ $0{,}5x^2 = 3{,}125$ ➔ $x^2 = 6{,}25$ ➔ $x_1 = 2{,}5$ (die zweite Lösung $x_2 = -2{,}5$ interessiert uns hier nicht). Also muss $x < 2{,}5$ gelten, und damit ist $D_A =]0; 2{,}5[$.

Nachtermin 2013 *(leicht gehobener Anspruch, da zwei Funktionsgraphen)*

3.0 Nebenstehende Zeichnung zeigt Teile der Graphen G_q und G_r der Funktionen q und r, gegeben durch $q: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2$ und $r: x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$ mit $D_q = D_r = \mathbb{R}$.
Die Gerade $x = a$ mit $0 < a < 5$ schneidet G_q im Punkt C und G_r im Punkt B mit $y_C > y_B$.
Die Schnittpunkte der Parallelen zur x-Achse durch die Punkte B und C mit der y-Achse sind die Punkte A und D (siehe Zeichnung).



3.1 Berechnen Sie die Maßzahl A(a) des Flächeninhalts des Rechtecks ABCD in Abhängigkeit von a. (3 BE)

[Mögliches Ergebnis: $A(a) = -\frac{1}{4}a^4 + \frac{5}{4}a^3$]

Lösung:
Nehmen wir wieder die Seite des Rechtecks auf der x-Achse als Breite b und die Seite parallel zur y-Achse als Länge ℓ. Die Breite geht von A (bzw. D) auf der x-Achse bis zu B (bzw. C) auf der Geraden mit der Gleichung $x = a$, also ist $b = x_B - x_A = x_C - x_D = a - 0 = a$. Die Länge geht von A (bzw. B) senkrecht nach oben bis zu D (bzw. C), also ist $\ell = y_D - y_A = y_C - y_B$. (Vorsicht: Oben minus unten, der größere Wert minus der kleinere Wert! Also nicht $\ell = y_B - y_C$! Dann wäre die Länge nämlich negativ... In der Aufgabe steht ja $y_C > y_B$!) Der Punkt B liegt auf G_r und hat die x-Koordinate a, also ist $y_B = r(a) = \frac{1}{4}a^3 - \frac{3}{4}a^2 + 2$; der Punkt C liegt auf G_q und hat die x-Koordinate a, also ist $y_C = q(a) = \frac{1}{2}a^2 + 2$. (Die Punkte A und D liegen im Allgemeinen nicht auf den Graphen, also kann man deren y-Koordinaten nicht direkt angeben – höchstens, dass sie eben mit y_B bzw. y_C übereinstimmen.) Damit ist $\ell = y_C - y_B = q(a) - r(a) = (\frac{1}{2}a^2 + 2) - (\frac{1}{4}a^3 - \frac{3}{4}a^2 + 2) = \frac{1}{2}a^2 + 2 - \frac{1}{4}a^3 + \frac{3}{4}a^2 - 2 = -\frac{1}{4}a^3 + \frac{5}{4}a^2$
(Die Klammern hinten sind ***nötig***, die vorne sind nur der Übersichtlichkeit halber gesetzt worden.)

Das setzen wir alles in die Flächeninhaltsformel ein:

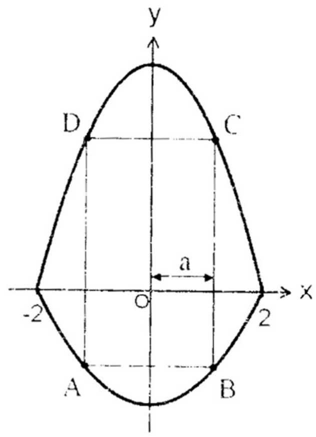
$A(a) = a \cdot (-\frac{1}{4}a^3 + \frac{5}{4}a^2)$ *(Klammern setzen!)*

$= -\frac{1}{4}a^4 + \frac{5}{4}a^3$ *(Klammern ausmultiplizieren)*

Die Definitionsmenge steht im Prinzip schon dran: In der Aufgabe steht $0 < a < 5$, also ist $D_A =]0;5[$.

2014-AII

4.0 Die Graphen der reellen Funktionen p und q mit $p(x) = -x^2 + 4$ und $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ und mit $D_p = D_q = [-2;2]$ bilden die nebenstehend abgebildete Fläche. Darin einbeschrieben ist das Rechteck ABCD, dessen Eckpunkte auf den Graphen der Funktionen p und q liegen.



4.1 Bestimmen Sie die Maßzahl A(a) der Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von a und geben Sie eine sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A an. (4 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -3a^3 + 12a$]

Lösung:

Zunächst mal sollte man sich klar machen, dass p eine nach unten geöffnete Parabel beschreibt und q eine nach oben geöffnete. In der Skizze gehört der obere Graph also zu p, der untere zu q.

Nehmen wir wieder die Seite des Rechtecks auf der x-Achse als Breite b und die Seite parallel zur y-Achse als Länge ℓ. Da das Rechteck symmetrisch zur y-Achse liegt (was daraus folgt, dass die beiden gegebenen Funktionen p und q beide gerade sind), kann man die Breite direkt ablesen: b = 2a. Die Länge geht von A (bzw. B) senkrecht nach oben bis zu D (bzw. C), also ist $\ell = y_D - y_A = y_C - y_B$. (Vorsicht: Oben minus unten, der größere Wert minus der kleinere Wert! Also nicht $\ell = y_B - y_C$! Dann wäre die Länge nämlich negativ!) Der Punkt C liegt auf G_p und hat die x-Koordinate a, also ist $y_C = p(a) = -a^2 + 4$; der Punkt B liegt auf G_q und hat die x-Koordinate a, also ist $y_B = q(a) = \frac{1}{2}a^2 - 2$. (Die Punkte A und D könnte man stattdessen auch verwenden; für diese ist dann eben der x-Wert jeweils –a. Das Endergebnis ist dasselbe, wenn man beachtet, dass ja $(-a)^2 = a^2$ ist.) Damit ist $\ell = y_C - y_B = p(a) - q(a) = (-a^2 + 4) - (\frac{1}{2}a^2 - 2) = -a^2 + 4 - \frac{1}{2}a^2 + 2 = -\frac{3}{2}a^2 + 6$.

(Die Klammern hinten sind ***nötig***, die vorne sind nur der Übersichtlichkeit halber gesetzt worden.)

Das setzen wir alles in die Flächeninhaltsformel $A = b \cdot \ell$ ein:

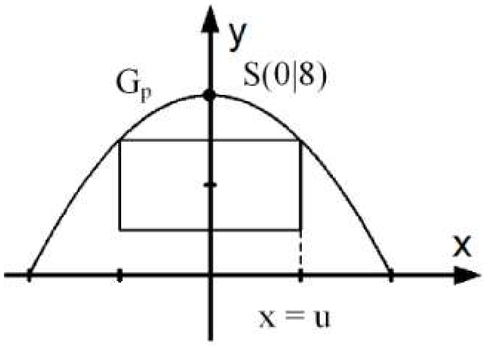
$A(a) = 2a \cdot (-\frac{3}{2}a^2 + 6.)$ *(Klammern setzen!)*

$= -3a^3 + 12a$ *(Klammern ausmultiplizieren, Bruch vorne kürzen!)*

Die Definitionsmenge kann man direkt aus der Skizze ablesen: Offensichtlich kann a höchstens gleich 2 sein. Außerdem muss a größer als 0 sein (Länge!). Also ist $0 < a < 2$ *(ob man die 2 mit dazu nimmt oder nicht, ist Geschmackssache)* und damit $D_A =]0;2[$.

2015-AI *auch im aktuellen Schulbuch: S. 45, Nr. 11 (NT) bzw. S. 49, Nr. 23 (T)!*

3.0 Auf einem Campingplatz möchte der Pächter in einem Zelt ein Kino einrichten. Als Projektionsfläche dient eine Seitenwand, welche durch die Parabel G_p und der x-Achse begrenzt wird. Am Boden hat das Zelt eine Spannweite von 20 m. Bei den folgenden Rechnungen wird auf Einheiten verzichtet.



3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$ der Parabel G_p. (3 BE)

[Mögliches Ergebnis: $p(x) = -0{,}08x^2 + 8$]

3.3.0 Ein Filmverleih rät dem Pächter zu einer Leinwand bei einer Unterkante in 3 m Höhe (siehe Skizze 3.0).

3.3.1 Stellen Sie die Maßzahl $A(u)$ des Flächeninhalts der Leinwand auf und bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion $A: u \mapsto A(u)$. (7 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $A(u) = -0{,}16u^3 + 10u$]

Lösung:

Nehmen wir wieder die Seite des Rechtecks auf der x-Achse als Breite b und die Seite parallel zur y-Achse als Länge ℓ. Da das Rechteck symmetrisch zur y-Achse liegt (was daraus folgt, dass die Parabel symmetrisch zur y-Achse ist, weil ihr Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt), kann man die Breite direkt ablesen: b = 2u. Die Länge geht von 3 m über dem Boden (siehe Aufgabentext!) senkrecht nach oben bis zu einem Punkt auf der Parabel, nennen wir ihn P; also ist $\ell = y_P - 3$. (Vorsicht: Oben minus unten, der größere Wert minus den kleineren Wert!) Der Punkt P liegt auf G_P und hat die x-Koordinate u, also ist $y_P = p(u) = -0{,}08u^2 + 8$ (alternativ könnte man auch den linken Rand der Leinwand verwenden; dann wäre $x = -u$. Das Endergebnis ist dasselbe, wenn man beachtet, dass ja $(-u)^2 = u^2$ ist.) Damit ist $\ell = y_P - 3 = p(u) - 3 = (-0{,}08u^2 + 8) - 3 = -0{,}08u^2 + 5$.
(Die Klammern vorne sind nicht unbedingt nötig, nur der Übersichtlichkeit halber gesetzt worden.)

Das setzen wir alles in die Flächeninhaltsformel $A = b \cdot \ell$ ein:

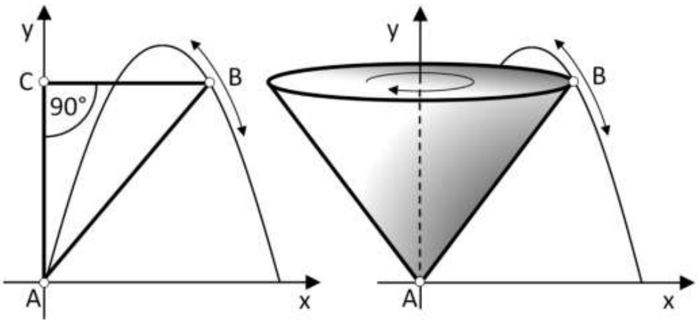
$A(a) = 2u \cdot (-0{,}08u^2 + 5.)$ *(Klammern setzen!)*

$= -0{,}16u^3 + 10u$ *(Klammern ausmultiplizieren)*

Die Definitionsmenge kann man direkt aus der Skizze ablesen: Da die Spannweite des Zelts unten gleich 20 m sein soll (siehe Aufgabentext), kann u höchstens gleich 10 sein. Außerdem muss u größer als 0 sein (Länge!). Also ist $0 < u < 10$ *(ob man die 10 mit dazu nimmt oder nicht, ist Geschmackssache)* und damit $D_A =]0;10[$.

2015-AII

4.0 Das Dreieck ABC in nebenstehender Abbildung rotiert um die y-Achse, und dabei entsteht ein Kegel.



Der Punkt A ist der Ursprung des Koordinatensystems und der Punkt B liegt im I. Quadranten auf der Parabel G_q mit $q(x) = -x^2 + 8x$ und $x \in \mathbb{R}$.

4.1 Stellen Sie eine Gleichung V(r) für das Volumen des Kegels auf, wobei $r = \overline{BC}$ der Radius des Kegels ist. (3 BE)

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = -\frac{1}{3}\pi r^4 + \frac{8}{3}\pi r^3$]

4.2 Ermitteln Sie die maximale sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V: r \mapsto V(r)$. (3 BE)

Lösung:

Das Volumen eines Kegels ist $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, siehe Merkhilfe. Der Radius r ist in der linken Skizze in 4.0 dabei gleich der Länge der Strecke $\overline{CB}$, die Höhe h ist gleich der Länge der Strecke $\overline{AB}$. Weil C auf der y-Achse liegt, ist deshalb r gleich dem x-Wert des Punktes B, $r = x_B$, und weil A der Ursprung ist, ist h gleich dem y-Wert des Punktes B, $h = y_B$. Außerdem soll B auf G_q liegen; deshalb ist $y_B = q(x_B)$, also $h = q(r) = -r^2 + 8r$. Setzen wir dies alles in die Volumenformel ein:

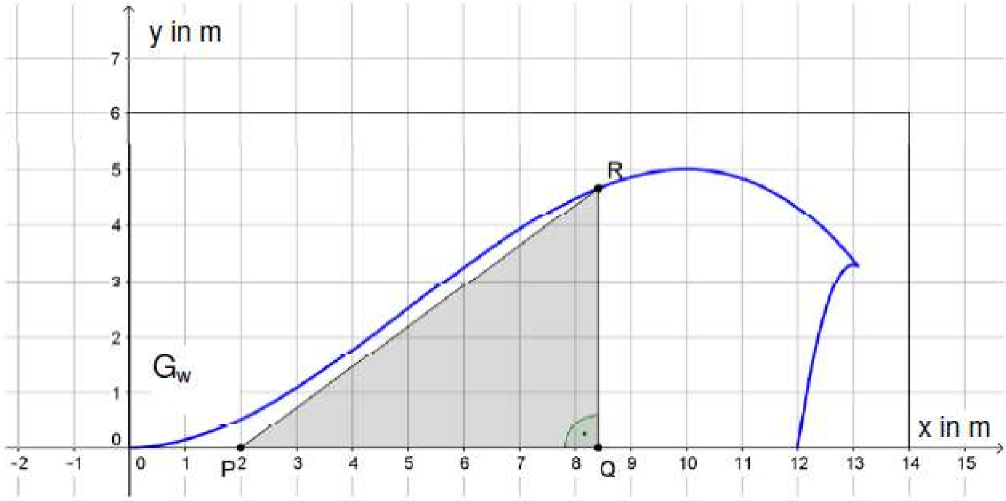
$V(r) = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (-r^2 + 8r)$ *(Klammern setzen!)*

$= -\frac{1}{3}\pi r^4 + \frac{8}{3}\pi r^3$ *(Klammer ausmultiplizieren)*

Offensichtlich muss $r > 0$ sein (Länge!). Außerdem ist noch gegeben, dass B im I. Quadranten liegen soll und auf G_q. B kann also nicht weiter rechts liegen als die rechte Nullstelle der Parabel G_q. Diese Nullstelle kann man mittels Ausklammern schnell ausrechnen: $q(x) = 0$ ➔ $-x^2 + 8x = 0$ ➔ $-x(x - 8) = 0$ ➔ $x_1 = 0$; $x_2 = 8$. Damit folgt: $r < 8$, also ist $D_V =]0;8[$. *(Ob man die 0 und die 8 noch mit dazu nimmt, ist Geschmackssache.)*

2018-AII

4.0 Auf der Außenwand eines neuen Hallenbades soll dessen Logo, eine Welle, abgebildet werden. Der Architekt möchte ein großes Fenster in Form eines rechtwinkligen Dreiecks (siehe Skizze $\triangle PQR$) innerhalb der Welle anbringen.



Das Fenster soll am Punkt $P(2|0)$ beginnen. Seine Breite $|\overline{PQ}|$ soll mindestens 5 m und höchstens 10 m betragen. Der Punkt R soll auf der oberen Begrenzungslinie (Graph G_w) der Welle liegen, welche durch die Funktion $w: x \mapsto -0{,}01x^3 + 0{,}15x^2$ beschrieben wird. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

4.1 Zeigen Sie, dass die Maßzahl A der Fläche des Fensters abhängig von der x-Koordinate des Punktes Q durch die Funktionsgleichung $A(x) = 0{,}005\,(-x^4 + 17x^3 - 30x^2)$ beschrieben wird, und geben Sie für die Funktion A einen Definitionsbereich D_A an, der den Vorgaben von 4.0 entspricht. (5 BE)

Lösung:

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist allgemein $A = \frac{1}{2}gh$, wobei g die Grundseite ist und h die Höhe (die auf der Grundseite senkrecht steht und durch den gegenüberliegenden Punkt verläuft).
Hier bietet es sich an, die untere Seite als Grundseite zu nehmen (Welcher der Dreiecksseiten man als Grundseite nimmt, ist wurscht – meist nimmt man die untere, aber jede andere normalerweise geht auch!), also $g = |\overline{PQ}|$. Da beide Punkte auf der x-Achse liegen, ist also $g = x_Q - x_P = x - 2$ (Vorsicht: Nur in der Zeichnung hier ist $x_Q \approx 8{,}3$, im Allgemeinen kann der Wert beliebig sein!). Die Höhe geht von der x-Achse senkrecht zum Punkt R, also ist $h = y_R - 0$. Da R auf dem Graph liegt und dieselbe x-Koordinate wie Q hat, ist $h = y_R = w(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}15x^2$. (Vorsicht: Wieder gilt, dass der y-Wert zwar in der Zeichnung etwa 5,7 ist, aber allgemein eben von x abhängt!)
Das setzen wir alles oben in die Flächeninhaltsformel ein:

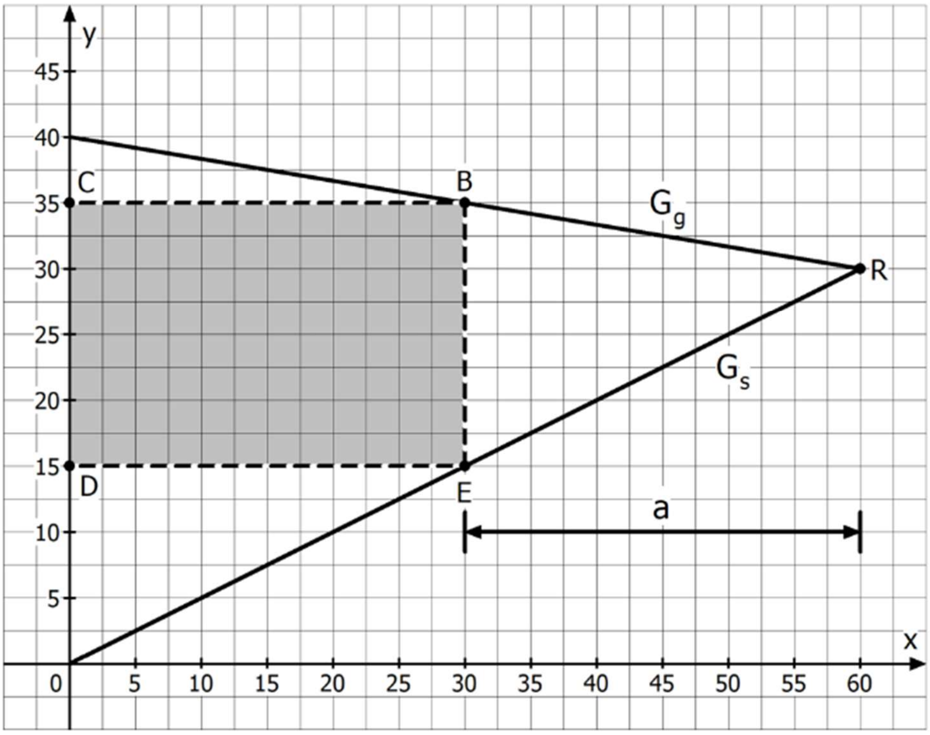
$A(a) = \frac{1}{2}(x-2)\cdot(-0{,}01x^3 + 0{,}15x^2)$ *(Klammern setzen!)*

$= \frac{1}{2}(-0{,}01x^4 + 0{,}17x^3 - 0{,}3x^2)$ *(Klammern ausmultiplizieren)*

$= 0{,}005(-x^4 + 17x^3 - 30x^2)$ *(Faktor 0,01 ausklammern)*

Bei der Definitionsmenge muss man sich überlegen, was der x-Wert des Punktes Q sein darf. In der Aufgabe steht, dass die Breite $|\overline{PQ}|$ mindestens 5 m und höchstens 10 m sein soll. Da die x-Koordinate von P gleich 2 ist, folgt, dass die x-Koordinate von Q mindestens 7 und höchstens 12 ist. Also ist $D_A = [7;12]$.

1.0 Ein Architekt plant in eine dreieckige Grundstücksfläche eine rechteckige Fläche BCDE zur Bebauung. Die Grundstücksfläche wird von der y-Achse und den Graphen G_g und G_s zweier linearer Funktionen g und s mit der gemeinsamen Definitionsmenge $D_g = D_s = [0;60]$ begrenzt. Die Funktionsgleichung von s lautet $s(x) = 0{,}5 \cdot x$. Die Eckpunkte B und E sollen dabei dieselbe Abszisse haben (siehe nachfolgende Abbildung). Der Abstand von der rechten Grundstücksecke R zur Strecke $\overline{BE}$ wird mit a bezeichnet.



Die Koordinaten der angegebenen Punkte stellen Längenangaben mit der Einheit Meter dar. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden.

2 **1.1** Ermitteln Sie mithilfe der Zeichnung aus 1.0 die Gleichung der Funktion g. Hierzu können der Zeichnung ganzzahlige Werte entnommen werden.

5 **1.2** Bestimmen Sie die Maßzahl A(a) des Flächeninhalts der Bebauungsfläche in Abhängigkeit des Abstands a.

$\left[\text{Mögliches Ergebnis: } A(a) = 40a - \frac{2}{3}a^2\right]$

Lösung:

1.1 Geradengleichungen sollte man nun wirklich aufstellen können… Den Achsenabschnitt kann man sofort ablesen, und die Steigung erhält man z. B. aus einem Steigungsdreieck. Ergebnis: $g(x) = -\frac{1}{6}x+40$

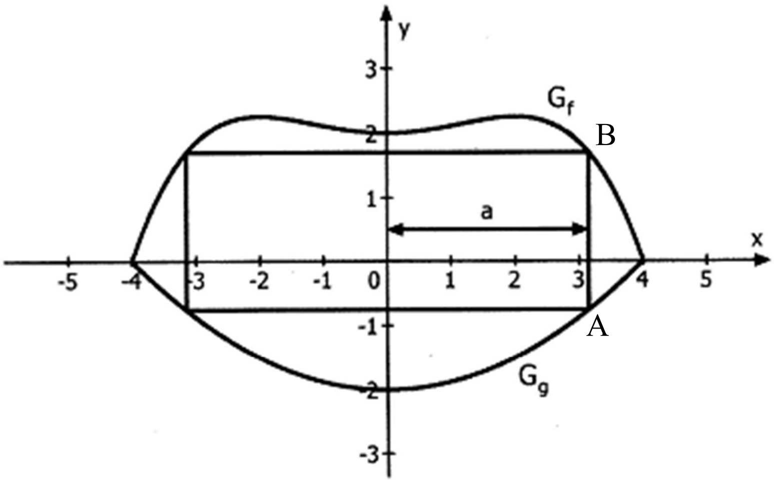
1.2 Nehmen wir die Seite des Rechtecks parallel zur x-Achse als Länge ℓ und die Seite parallel zur y-Achse als Breite b. Die Länge kann man eigentlich direkt ablesen: ℓ = 60 – a. Die Breite geht vom Punkt E senkrecht nach oben bis zum Punkt B, also ist b = $y_B - y_E$. (Vorsicht: Oben minus unten, der größere Wert minus der kleinere Wert! Also nicht $\ell = y_E - y_B$! Dann wäre die Länge nämlich negativ!) Der Punkt B liegt auf G_g und hat die x-Koordinate 60 – a (Vorsicht: nicht etwa a!), also ist y_B = g(60 – a) = $-\frac{1}{6}(60-a) + 40$ $(Klammern\ setzen!) = -10 + \frac{1}{6}a + 40 = \frac{1}{6}a + 30$; E liegt auf G_s und hat ebenfalls die x-Koordinate 60 – a, also ist y_E = s(60 – a) = $0{,}5\,(60-a)$ $(Klammern\ setzen!) = -0{,}5a + 30$.

Damit ist b = $y_B - y_E$ = g(60 – a) – s(60 – a) = $\left(\frac{1}{6}a + 30\right) - (-0{,}5a + 30) = \frac{1}{6}a + 30 + \frac{1}{2}a - 30 = \frac{2}{3}a.$
(Die Klammern hinten sind ***nötig***, die vorne sind nur der Übersichtlichkeit halber gesetzt worden.)

Das setzen wir alles in die Flächeninhaltsformel A = b· ℓ ein:
A(a) = $\frac{2}{3}a$ ·(60 – a) *(Klammern setzen!)*
= $40a - \frac{2}{3}a^2$ *(Klammern ausmultiplizieren)*
Anmerkung: Die Definitionsmenge musste hier nicht bestimmt werden, die wurde dann in 1.3 gegeben.

T2024-AII

3.0 Für eine Lippenstiftmarke soll ein passendes Werbelogo designt werden. Die zugrundeliegende Kontur der Lippenform lässt sich durch die Graphen G_f bzw. G_g zweier ganzrationaler Funktionen f bzw. g mit $f(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + 2$ bzw. $g(x) = \frac{1}{8}x^2 - 2$ auf dem Intervall $D_f = D_g = [-4; 4]$ beschreiben.
Es soll nun ein achsenparalleles rechteckiges Textfeld für den Werbetext platziert werden. Die Eckpunkte des Rechtecks liegen auf den Graphen von f bzw. g. Das Rechteck soll dabei an keiner Stelle außerhalb der Lippenkontur liegen. Koordinaten sind Längenangaben in der Einheit Dezimeter.
Die Distanz a mit $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ ist wie in der Abbildung gezeigt festgelegt.



3 **3.1** Zeigen Sie zunächst, dass sich die Maßzahl A(a) des Flächeninhalts des Textfeldes in Abhängigkeit von a durch $A(a) = -\frac{1}{32}a^5 + 8a$ darstellen lässt.

4 **3.2** Weisen Sie nach, dass $D_A = [\sqrt{8}; 4[$ als maximale Definitionsmenge der Funktion $A: a \mapsto A(a)$ anzunehmen ist.

Lösung:
3.1 Nehmen wir wieder die Seite des Rechtecks auf der x-Achse als Breite b und die Seite parallel zur y-Achse als Länge ℓ . Da das Rechteck symmetrisch zur y-Achse liegt (was daraus folgt, dass die beiden gegebenen Funktionen f und g beide gerade sind), kann man die Breite direkt ablesen: b = 2a. Die Länge geht vom Punkt A (in der Zeichnung oben von mir beschriftet) senkrecht nach oben bis zum B (ebenfalls oben von mir beschriftet), also ist $\ell = y_B - y_A$. (Vorsicht: Oben minus unten, der größere Wert minus der kleinere Wert! Also nicht $\ell = y_A - y_C$! Dann wäre die Länge nämlich negativ!) Der Punkt A liegt auf G_g und hat die x-Koordinate a, also ist $y_A = g(a) = \frac{1}{8}a^2 - 2$; der Punkt B liegt auf G_f und hat die x-Koordinate a, also ist $y_B = f(a) = -\frac{1}{64}a^4 + \frac{1}{8}a^2 + 2$. Damit ist $\ell = y_B - y_A = f(a) - g(a) = (-\frac{1}{64}a^4 + \frac{1}{8}a^2 + 2) - (\frac{1}{8}a^2 - 2) = -\frac{1}{64}a^4 + \frac{1}{8}a^2 + 2 - \frac{1}{8}a^2 + 2 = -\frac{1}{64}a^4 + 4$
(Die Klammern hinten sind ***nötig***, die vorne sind nur der Übersichtlichkeit halber gesetzt worden.)

Das setzen wir alles in die Flächeninhaltsformel $A = b\cdot \ell$ ein:

$A(a) = 2a \cdot (-\frac{1}{64}a^4 + 4)$ *(Klammern setzen!)*

$= -\frac{1}{32}a^5 + 8a$ *(Klammern ausmultiplizieren, Bruch vorne kürzen!)*

3.2 Dass $a < 4$ sein muss, sieht man in der Zeichnung (für $a = 4$ hätte man kein Rechteck mehr, sondern nur noch einen Strich, und wenn gar $a > 4$ wäre, dann würde das Rechteck nach rechts aus der „Lippenkontur" herausragen). Dass $a \geq \sqrt{8}$ sein muss, ist dagegen alles andere als offensichtlich, das ist deshalb wohl die schwierigste Definitionsmenge, die ich je gesehen habe in einer Extremwertaufgabe!

Wesentlich ist hier ein Satz aus 3.0: „Das Rechteck soll dabei an keiner Stelle außerhalb der Lippenkontur liegen." Wenn a kleiner wird, wandert der Punkt B weiter nach links, die Länge (bzw. Höhe) des Rechtecks wird dabei immer größer. Spätestens wenn B den Hochpunkt erreicht, liegt das Rechteck teilweise außerhalb der Lippenkontur! Das passiert aber schon früher: Der Tiefpunkt von G_f hat ja den y-Wert 2 (auf der y-Achse); wenn B also einen y-Wert größer als 2 hat, dann liegt das Rechteck schon teilweise außerhalb der Lippenkontur. (Wem das nicht klar ist, der zeichnet sich am besten mal ein paar Rechtecke für verschiedene Werte von a ein.) Damit das Rechteck also komplett innerhalb der Lippenkontur liegt, muss gelten: $y_B < 2$, also $-\frac{1}{64}a^4 + \frac{1}{8}a^2 + 2 \leq 2$. Diese Ungleichung muss man nun lösen! Das geht aber zum Glück relativ schnell: Erst auf beiden Seiten minus 2 rechnen,

$$-\frac{1}{64}a^4 + \frac{1}{8}a^2 \leq 0,$$

dann $-\frac{1}{64}a^2$ ausklammern,

$$-\frac{1}{64}a^2 (a^2 - 8) \leq 0.$$

Da $-\frac{1}{64}a^2$ sicher negativ ist, folgt, dass das Produkt nur dann negativ sein kann, wenn $(a^2 - 8)$ positiv (oder gleich Null) ist:

$$a^2 - 8 \geq 0$$

Normalerweise würde man so eine Ungleichung graphisch lösen (Parabel skizzieren), hier geht es aber auch direkt: plus 8 rechnen und Wurzel ziehen. Das wäre zwar normalerweise problematisch, weil im Allgemeinen a auch negativ sein könnte, hier klappt es aber, weil ja in der Aufgabe schon $a > 0$ vorgegeben ist. Also ergibt sich direkt: $a \geq \sqrt{8}$. Damit folgt dann schließlich die angegebene Definitionsmenge.
(Alternativ könnte man auch die Nullstellen von $-\frac{1}{64}a^4 + \frac{1}{8}a^2$ berechnen und den Graphen dazu skizzieren, aber auch dann muss man darauf achten, dass $a > 0$ vorgegeben ist.)

7. Wirtschaftliche Anwendungen
Dies wurde in den folgenden Prüfungen gefragt:
2000-AII/2, 2001-AII/2, Nachtermin 2003/3

Hier muss man eigentlich nur Sachen berücksichtigen, die relativ selbstverständlich sein sollten:

- Der Umsatz ist der Stückpreis mal die Absatzmenge.
- Der Gewinn ist der Umsatz minus die Kosten.

Da die Prüfungen nicht nur vom Wirtschafts-, sondern auch vom Sozialzweig geschrieben werden, kommen solche Aufgaben aber wohl praktisch nicht mehr dran.

2000-AII *(sehr einfache Aufgabe!)*

2.0 Die Ware wird zu einem Preis von 10 GE pro ME verkauft.
Es ergibt sich demnach als Erlösfunktion die lineare Funktion
$e: x \mapsto 10x$; $D_e = D_k = [0; 7]$.
Der Gewinn bzw. Verlust wird durch die Funktion
$g: x \mapsto e(x) - k(x)$; $D_g = D_k$ beschrieben. Also gilt:
$g(x) = -x^3 + 9x^2 - 17x - 3$.

2.3 Bestimmen Sie jene Produktmenge x_M, für die der Betrieb den absolut größten Gewinn erzielt. Achten Sie auch auf die Ränder der Definitionsmenge. (8 BE)

Lösung:
Eigentlich steht hier schon alles in der Aufgabe, und man muss nur noch wie bekannt den Hochpunkt von g bestimmen. Am Schluss die Randwerte nicht vergessen: g(0) und g(7) berechnen (die Definitionsmenge $D_g = [0; 7]$ ist ja vorgegeben) und mit dem berechneten relativ höchsten Gewinn vergleichen. Hier wird sogar schon im Aufgabentext darauf hingewiesen, dass man die Ränder von D beachten soll!

2001-AII *(schon etwas schwieriger)*

2.0 Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von DM 10,-- durchschnittlich 200 Besucher. Man schätzt, dass bei einer Erhöhung des Eintrittspreises um DM 1,-- die ursprüngliche Besucherzahl um durchschnittlich 10 abnehmen wird, bei einer Erhöhung um DM 2,-- um 20, bei einer Erhöhung um DM 3,-- um 30 usw.. (Zur Vereinfachung werden für die Berechnungen sämtliche Einheiten weggelassen.)

2.1 Die zu erwartenden Einnahmen in Abhängigkeit von der Preiserhöhung x lassen sich mit Hilfe einer differenzierbaren Funktion E beschreiben.
Ermitteln Sie den Funktionsterm E(x). Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge D_E an, wenn man als Grundmenge $\mathbb{R}$ wählt.
(Teilergebnis: $E(x) = 2000 + 100x - 10x^2$) (4 BE)

Lösung:
Die Einnahmen ergeben sich als Besucheranzahl (nennen wir diese mal b) mal Preis (den nennen wir p). Pro Steigerung von p um 1 nimmt die Besucheranzahl von ursprünglich 200 um jeweils 10 ab, also nimmt sie um 10x ab, p um x erhöht wird, also ist b = 200 – 10x (wer nicht direkt draufkommt: b(x) = mx + t ansetzen und zwei Werte einsetzen, z. B. b(0) = 200 und b(1) = 190, damit dann m und t berechnen). Der Preis ist 10 plus die Preissteigerung x, also p = 10 + x. Damit folgt:

$E(x) = b \cdot p = (200 - 10x) \cdot (10 + x)$ *(Klammern setzen!)*
$\quad = 2000 + 200x - 100x - 10x^2$ *(Klammern ausmultiplizieren)*
$\quad = 2000 + 100x - 10x^2$ *(zusammenfassen)*

Da von einer Preiserhöhung die Rede ist, sollte x > 0 sein. (Wenn man auch eine Preissenkung in Erwägung zieht, dann muss x > –10 gelten – schließlich sollte der Gesamtpreis p positiv bleiben!) Beliebig groß kann man den Preis aber auch nicht machen – irgendwann kommen keine Besucher mehr! Es sollte auch b > 0 gelten, also 200 – 10x > 0; daraus erhält man x < 20. Insgesamt also: $D_E =]0;20[$.

Nachtermin 2003 *(recht einfach)*

3.0 Die folgende Tabelle ist Grundlage der Kalkulation eines Landwirts für den Anbau von Getreide je Flächeneinheit. Die angegebenen Größen sind in Abhängigkeit von der Düngermenge x dargestellt:

Ertrag E in Mengeneinheiten (ME)	$E(x) = 100 + \frac{1}{8}x$
Kosten K in € pro ME	$K(x) = 300 + x + \frac{1}{800}x^2$
Verkaufspreis P in € pro ME	$P(x) = 20 - \frac{1}{40000}x^2$

3.1 Ermitteln Sie die Düngermenge x für den Fall, dass der Ertrag 150 ME beträgt. Bestimmen Sie hierfür den erzielten Verkaufspreis. (3 BE)

3.2 Der Gewinn G in Abhängigkeit von der Düngermenge x lässt sich beschreiben durch: $G(x) = -\frac{x^3}{320000} - \frac{3x^2}{800} + \frac{3x}{2} + 1700$ mit $x \in [0;400]$.
Geben Sie den Zusammenhang dieser Formel mit den Termen E(x), K(x), P(x) in Form einer Gleichung an. Berechnen Sie nun x so, dass der Landwirt den größtmöglichen Gewinn erzielt. (7 BE)

Lösung:

In Aufgabe 3.1 ist die Gleichung E(x) = 150, also $100 + \frac{1}{8}x = 150$ zu lösen, und dazu dann der Preis zu berechnen. Wie das geht, sollte offensichtlich sein! (Ergebnisse: x = 400; P(400) = 16)

In Aufgabe 3.2 soll man erklären, wo der Term G(x) herkommt. Das funktioniert wie oben allgemein erklärt: Gewinn ist Einnahmen minus Kosten, Einnahmen sind Produktionsmenge mal Verkaufspreis. Also:
$G(x) = E(x) \cdot P(x) - K(x)$

(So steht's auch in der Musterlösung - wenn man sich aber die Einheiten anschaut, dann ist das so eigentlich falsch! K sind ja nicht die Kosten, sondern die Kosten ***pro Mengeneinheit*** *- die gesamten Kosten sind also eigentlich E(x)·K(x), der Gewinn also E(x)·P(x) – E(x)·K(x)! Hier ist wohl ein Fehler in der Aufgabenstellung und/oder in der Musterlösung!)*

Das war's eigentlich schon; weiter geht es dann mit die Berechnung des Hochpunkts von G. Wer will, kann's aber auch noch nachrechnen:

$= (100 + \frac{1}{8}x) \cdot (20 - \frac{1}{40000}x^2) - (300 + x + \frac{1}{800}x^2)$ *(Klammern setzen!)*

$= 2000 - \frac{1}{400}x^2 + 2{,}5x - \frac{1}{320000}x^3 - 300 - x - \frac{1}{800}x^2$ *(Klammern ausmultiplizieren)*

$= -\frac{x^3}{320000} - \frac{3x^2}{800} + \frac{3x}{2} + 1700$ *(zusammenfassen, ein wenig Bruchrechnen)* Passt!

8. Strecke, Geschwindigkeit, Beschleunigung
Dies wurde in den folgenden Prüfungen gefragt:
2003-AI/2, 2006-AII/3, Nachtermin 2009/3, Nachtermin 2010/4, Nachtermin 2012/1

Dies sind eigentlich Anwendungen aus der Physik (keine eigentlichen Extremwertaufgaben!) – solche Aufgaben passen also eher in den Technik-Zweig. Normalerweise ist in den Aufgaben aber schon vorgegeben, was man berücksichtigen muss:

- Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Strecke / Position / Höhe; die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit.
- Umgekehrt ist die Geschwindigkeit(sänderung) die „Aufleitung“, also die Stammfunktion, der Beschleunigung (also die Fläche unter dem Graph), die Strecke / Positionsänderung ist die „Aufleitung“, also die Stammfunktion, der Geschwindigkeit (also die Fläche unter dem Graph).

2003-AI

2.0 Eine Schnecke kriecht auf einer flachen Straße vom Startpunkt aus geradlinig immer in dieselbe Richtung. Modellhaft wird angenommen:
Die Funktion s mit $s: t \mapsto s(t) = -\frac{20}{9}t^3 + 10t^2; \quad 0 \le t \le 3$
gibt den zurückgelegten Weg s (gemessen in Zentimetern) in Abhängigkeit von der Zeit t (gemessen in Minuten) wieder. Die 1. Ableitung der Funktion s nach der Variablen t ist die Geschwindigkeit der Schnecke zum entsprechenden Zeitpunkt t.
(Auf Benennungen wird bei den folgenden Rechnungen verzichtet!)

2.1 Berechnen Sie den zurückgelegten Weg und die jeweilige Geschwindigkeit der Schnecke zu den Zeitpunkten $t=1$ und $t=2$. (3 BE)

2.2 Ermitteln Sie, nach welcher Zeit die Schnecke ihre größte Geschwindigkeit erreicht hat. Wie groß ist diese maximale Geschwindigkeit? (4 BE)

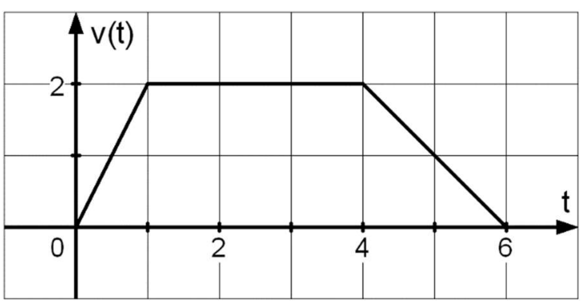
Lösung:

2.1 Gefragt sind hier s(1), s(2), s’(1) und s’(2) *(Anmerkung: Ist die Funktionsvariable die Zeit t, so schreibt man für die Ableitung oft auch einen Punkt über die Funktion statt einen Strich dahinter, hier also $\dot{s}$ (1) und $\dot{s}$ (2).)* Für s(1) und s(2) setzt man einfach 1 bzw. 2 in den Funktionsterm ein, für s’(1) und s’(2) leitet man s wie üblich erst mal ab.

2.2 Gesucht ist hier ein Maximum der Geschwindigkeit, also ein Hochpunkt von s’(t) (also ein Wendepunkt von s(t)). Um die Rechnung übersichtlicher zu machen, kann man auch v(t) schreiben statt s’(t); dann sind die Bedingungen für einen Hochpunkt wie üblich v’(t) = 0 (also s’’(t) = 0) und v’’(t) < 0 (also s’’’(t) < 0).

2006-AII

3.0 Nebenstehendes Diagramm beschreibt den Zusammenhang zwischen der Momentangeschwindigkeit v(t) eines Fahrzeugs (in Kilometer pro Minute) und der Zeit t (in Minuten).
(Auf Benennungen wird verzichtet!)



3.1 Begründen oder widerlegen Sie anhand des Diagramms die Behauptung: Die Funktion v ist im dargestellten Bereich differenzierbar. (2 BE)

3.2 Geben Sie die Geschwindigkeiten zur Zeit $t_1 = 1$ und $t_2 = 5$ an. (2 BE)

3.3 Die 1. Ableitung der Geschwindigkeit v(t) ist die Beschleunigung a(t) des Fahrzeugs. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion a. (4 BE)

3.4 Die Geschwindigkeit v(t) ist die 1. Ableitung der Funktion s(t), die den in der Zeit t zurückgelegten Weg beschreibt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Zeichnung den am Ende (nach 6 Minuten) zurückgelegten Weg. (3 BE)

Lösung:

3.1 Zur Erinnerung: „differenzierbar“ heißt im Wesentlichen, dass der Graph keine Knickstellen hat (an Knickstellen gibt es nämlich offensichtlich keine eindeutige Tangente(nsteigung), also keine Ableitung, also wäre die Funktion dort nicht differenzierbar, d. h. man kann sie dort nicht ableiten).

3.2 einfach aus dem Graph die Werte ablesen!

3.3 Hier berücksichtigt man, dass die Ableitung die Steigung (der Tangente) ist. Die Steigungen in den einzelnen Abschnitten kann man aus dem Graph von v aber sofort ablesen (im Zweifelsfall Steigungsdreiecke einzeichnen!): von $t = 0$ bis $t = 1$ ist die Steigung $2/1 = 2$; von $t = 1$ bis $t = 4$ ist die Steigung 0 (waagrecht!), von $t = 4$ bis $t = 6$ ist die Steigung $-2/2 = -1$. Die Funktion a ist also von 0 bis 1 konstant gleich 2, von 1 bis 4 konstant gleich 0 und von 4 bis 6 konstant gleich -1.

3.4 Da v(t) die Ableitung von s(t) ist, folgt, dass umgekehrt s(t) eine Stammfunktion zu v(t) ist, also eine Flächeninhaltsfunktion, d. h. die Funktion s(t) gibt den Flächeninhalt unter dem Graph von v an. Diesen könnte man nun lang und breit mit Aufleiten von v(t) usw. ausrechnen. Viel schneller geht es aber, wenn man sieht, dass die Fläche ein Trapez ist (mit parallelen Seiten der Länge 6 und 3, und der Höhe 2), und die passende Formel aus der Formelsammlung dafür verwendet. Damit ist einfach:

$$s = \frac{6+3}{2} \cdot 2 = 9.$$

Nachtermin 2009

3.0 Vom Boden aus gemessen kann die Höhe eines senkrecht nach oben geworfenen Balls (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t mit $0 \le t \le t_E$ (in Sekunden) durch die Funktion

$$h: t \mapsto h(t) = -5t^2 + 16t + 1$$

beschrieben werden. Auf Einheiten wird verzichtet.

3.1 Die Momentangeschwindigkeit v(t) des Balls zum Zeitpunkt t wird durch die erste Ableitung der Funktion h nach der Zeit t beschrieben. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Balls zu den Zeitpunkten $t_1 = 1$ und $t_2 = 3$. (3 BE)

3.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu welchem der Ball seinen höchsten Punkt erreicht und den Zeitpunkt t_E, zu dem er auf dem Boden auftrifft. Runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen. (6 BE)

Lösung:

3.1 h(t) ableiten, die Ableitungsfunktion kann man h'(t) nennen, oder $\dot{h}$ (t), oder einfach v(t); dann einsetzen

3.2 Gesucht sind der Hochpunkt von h (da h eine quadratische Funktion ist, ist der relative Hochpunkt der Scheitelpunkt und damit automatisch auch der absolute Hochpunkt) und die Nullstelle von h, die größer als 0 ist (weil in der Aufgabe ja $0 \le t \le t_E$ steht, muss $t_E \ge 0$ sein!).

Nachtermin 2010

4.0 Die Flugkurve eines Balles bei einem Freistoß in einem Fußballspiel entspricht näherungsweise dem Graphen einer ganzrationalen Funktion h 3. Grades, wobei $h(x)$ die Flughöhe und x die Entfernung des Balls vom Abstoßpunkt am Boden gemessen angibt.
Der Abstoß des Fußballs erfolgt im gedachten Koordinatenursprung. Nach 5 m hat der Ball seine maximale Steigung erreicht, um dann bei 10 m in einer Höhe von 3 m die gegnerische „Mauer“ zu überfliegen. Bei 15 m besitzt der Ball ebenfalls eine Höhe von 3 m.

4.2 Berechnen Sie, in welcher Entfernung vom Abstoßpunkt der Ball wieder am Boden auftrifft sowie die größte Flughöhe des Balls, wenn ihn kein weiterer Spieler berührt, auf zwei Nachkommastellen genau. (9 BE)

Lösung:
Gesucht ist die Nullstelle von h, die größer als 0 ist (x ist ja die Entfernung vom Abstoßpunkt, die sollte natürlich positiv sein!) und der Hochpunkt von h. Als Randwerte kann man 0 und die berechnete Nullstelle verwenden. Da an beiden Stellen der Funktionswert 0 ist, folgt, dass der berechnete relative Hochpunkt auch der absolut höchste Punkt ist.
Vorsicht beim Ableiten: Die als „mögliches Ergebnis“ angegebene Form von h(x) kann man so nicht verwenden, da es ein Produkt ist! Man muss erst die Klammer ausmultiplizieren oder zumindest das x in die Klammer reinmultiplizieren! (Der konstante Faktor $\frac{1}{500}$ stört nicht, der bleibt beim Ableiten ja einfach unverändert stehen.)

Nachtermin 2012/1
1.0 Bei einem Freistoß konnte die Flugbahn des Balls näherungsweise durch die Funktion

$$f: x \mapsto -\frac{1}{450}x^3 + \frac{1}{20}x^2 \text{ mit } D_f = [0; 19]$$

dargestellt werden Dabei ist x die x-Koordinate der Flugbahn des Balls, y = f(x) gibt die jeweilige Flughöhe des Balls an. x und y werden in Meter angegeben. Bei der Rechnung wird auf Einheiten verzichtet. Der Ursprung liegt im Abschlagpunkt.
1.1 Ermitteln Sie durch Rechnung die maximale Flughöhe des Balls. (6BE)
1.3 Der Freistoß wurde in einer Entfernung von 19 Metern vor dem Tor auf das Tor abgegeben. Das Fußballtor hat eine Höhe von 2,44 Metern. Untersuchen Sie, ob der Ball in das Tor trifft. (2 BE)
1.4 Berechnen Sie, an welcher Stelle der Flugkurve die maximale Steigung erreicht wird. (4 BE)

Lösung:
1.1 Gesucht ist der Hochpunkt von f. Die Definitionsmenge von f ist gegeben als $D_f = [0; 19]$, also muss man am Schluss noch die Randwerte f(0) und f(19) überprüfen, ob dort der Funktionswert evtl. größer ist als am berechneten relativen Hochpunkt.
1.3 Zu prüfen ist, ob die Höhe in einer Entfernung von 19 Metern kleiner ist als 2,44, also ob f(19) < 2,44 ist.
1.4 Gesucht ist ein Maximum der Steigung, also ein Hochpunkt von f ’ (also ein Wendepunkt von f). Also muss $f''(x) = 0$ und $f'''(x) < 0$ gelten. Am Schluss sind noch die Randwerte f’(0) und f’(19) zu prüfen, ob die Steigung dort evtl. größer ist als das berechnete relative Maximum.

9. Sonderfälle
Diese Aufgaben passen in keine der Kategorien so richtig rein. Teilweise sind sie schwieriger, teilweise aber auch sehr einfach.

1999-AI *(ungewöhnlich, aber nicht wirklich schwierig)*

2 Die Zahl $\sqrt{10}$ ist so in zwei reelle positive Summanden zu zerlegen, dass die Summe der Quadrate dieser Summanden einen absoluten Extremwert annimmt. Berechnen Sie die beiden Summanden und entscheiden Sie, welche Art von absolutem Extremum vorliegt.

Lösung:
Nennen wir die beiden Summanden mal a und b. Also ist laut Aufgabe: $a + b = \sqrt{10} \Rightarrow b = \sqrt{10} - a$.
Laut Aufgabe geht es um die Summe der Quadrate der beiden Summanden, also um $a^2 + b^2$. Setzen wir die Bedingung von oben ein, so haben wir also folgende Funktion:

$f(a) = a^2 + (\sqrt{10} - a)^2$ *(Klammern setzen!)*

$= a^2 + \sqrt{10}^2 - 2\sqrt{10}\,a + a^2$ *(2. binomische Formel)*

$= 2a^2 - 2\sqrt{10}\,a + 10$

Von dieser Funktion ist nun das Extremum zu bestimmen. (Wie man an der zweiten Ableitung sieht, ergibt sich ein Minimum; alternativ: Es ist eine quadratische Funktion, die eine nach oben geöffnete Parabel beschreibt, also ist der Scheitelpunkt ein Tiefpunkt.)
Da beide Summanden positiv sein müssen, ist $a > 0$ und $\sqrt{10} - a$, also $a < \sqrt{10}$. Am Schluss sind also noch die Randwerte f(0) und $f(\sqrt{10})$ zu überprüfen, ob diese evtl. kleiner sind als das berechnete relative Minimum. (Alternativ: Da es sich um eine quadratische Funktion handelt, ist der berechnete relative Tiefpunkt der Scheitelpunkt und damit automatisch auch der absolut tiefste Punkt.)

Nachtermin 2012 *(auch hier braucht man den Satz von Pythagoras, aber auf völlig andere Weise als in Kategorie 5... eine etwas anspruchsvollere Aufgabe)*

4.0 Gegeben ist die Funktion $p: x \mapsto 0{,}5x^2$ mit $D_p = \mathbb{R}$ sowie der Punkt Q(6|0). $d(x) = \overline{QX}$ beschreibt den Abstand eines Punkts X(x|p(x)) des Graphen G zum Punkt Q.

4.1 Betrachtet wird nun die Funktion $h: x \mapsto (d(x))^2$.
Fertigen Sie eine beschriftete Skizze an, die obigen Sachverhalt veranschaulicht und berechnen Sie den Funktionsterm h(x). (5 BE)
[Teilergebnis: $h(x) = -x^4 + x^2 - 12x + 36$]

Lösung:
Für den Abstand zweier Punkte gibt es eine Formel – steht prinzipiell in der Merkhilfe. Man kommt aber auch ohne aus, man kann es sich überlegen...

Man zeichnet eine Skizze (ist ja sowieso verlangt); den Punkt X wählt man dabei irgendwo auf dem Graphen G_p. Nun zeichnet man ein „Steigungsdreieck“ vom Punkt X zum Punkt Q: von Q aus parallel zur x-Achse rüber, bis man direkt unter bzw. über X ist, von da aus dann parallel zur y-Achse rauf bzw. runter. Dieses Dreieck ist rechtwinklig mit den Katheten $|x-6|$ ($x-6$ kann auch negativ sein, wenn nämlich $x < 6$ ist, die Kathetenlänge muss aber positiv sein, deshalb Betragsstriche) und $|p(x)|$ (auch hier wieder: Betragsstriche, weil die Kathetenlänge positiv sein muss). Die Hypotenuse des Dreiecks ist der Abstand d(x) der beiden Punkte. Damit kann man den Satz des Pythagoras anwenden:

$$(d(x))^2 = |x-6|^2 + |p(x)|^2$$

Nun benutzt man noch, dass immer $|x|^2 = x^2$ gilt (wenn man quadriert, dann ist das VZ ja egal). Insgesamt ist also *(Klammern setzen!)*:

$$(d(x))^2 = (x-6)^2 + (p(x))^2$$

Nun könnte man auf die Idee kommen, die Wurzel zu ziehen und d(x) auszurechnen. Das ist aber gar nicht nötig – es ist ja sowieso nur die Funktion $h(x) = (d(x))^2$ gefragt! (*Wer trotzdem die Wurzel zieht: Nein, das Ergebnis ist **nicht** $6 - x + p(x)$ **!!!**)* Also:

$h(x) = (x-6)^2 + (0{,}5x^2)^2$ *(Funktionsterm von p einsetzen)*

$= x^2 - 12x + 36 + 0{,}25x^4$ *(vorne 1. binomische Formel, hinten Potenzgesetz)*

$= \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 12x + 36$ *(Reihenfolge umgestellt;, 0,25 als Bruch geschrieben)*

Von dieser Funktion h muss nun der Tiefpunkt bestimmt werden (Hinweis beachten!).

x ist durch nichts eingeschränkt, die Definitionsmenge ist also $D_h = \mathbb{R}$. Damit sind die „Randwerte“ bei $\pm\infty$. Am Schluss ist deshalb noch das Verhalten von h für $x \to \pm\infty$ zu beachten (die Grenzwerte). Aus dem Leitkoeffizienten und dem Grad folgt aber sofort, dass der Graph von h links und rechts nach oben geht, also $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = \infty$. Damit ist das ermittelte relative Minimum automatisch das absolute Minimum.