Stetige Verzinsung und die Eulersche Zahl

Beispiel: Eine Aktie ist ursprünglich 10 € wert und nimmt innerhalb eines Jahres um 100% im Wert zu. Ist sie danach genauso viel wert, wie wenn sie innerhalb je eines halben Jahres um jeweils 50% im Wert zugenommen hätte?

1) in einem Jahr um 100%: nach einem Jahr hat man
2) pro Halbjahr um 50%: nach einem Jahr hat man

Im zweiten Fall ist die Aktie also ( ).

Wie sieht's aus, wenn sie pro Vierteljahr um 25% zunimmt?

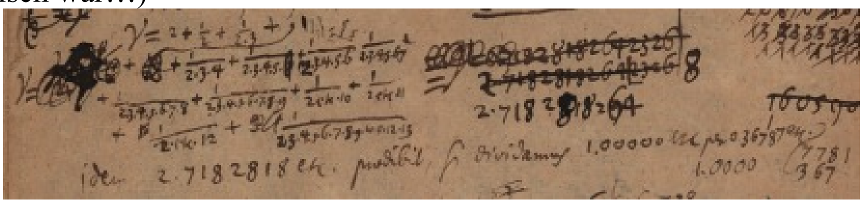
➔

Es ergeben sich ein paar recht naheliegende Fragen: Wird der Wert immer höher, wenn man immer kürzere Bruchteile eines Jahres betrachtet (also Zeitabschnitte: ein Jahr / n), und in diesen die Aktie jeweils um 100%/n zunimmt? Wenn ja, nähert er sich für „unendlich kleine'' Bruchteile eines Jahres (man spricht auch von „stetiger Verzinsung'') dann einem Grenzwert an, oder wird er unbegrenzt immer größer? Und noch eine nicht ganz so naheliegende Frage: Wenn es einen solchen Grenzwert gibt, kann man ihn dann auch problemlos angeben? Die Antworten auf diese Fragen sind: ja, ja, nein – die Begründungen dafür sind aber reichlich umständlich, siehe „Grenzwert stetige Verzinsung''. Hier nur die Ergebnisse zusammengefasst:

Satz: Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existiert und ist eine irrationale Zahl, die <u>Eulersche Zahl</u> e = 2,71828...

Das wurde wohl erstmals 1689 vom Schweizer Mathematiker und Physiker Jakob I Bernoulli (1655–1705) untersucht; er begründete aber nur, dass die Zahl zwischen 2,5 und 3 liegen muss und berechnete sie nicht genauer.

Die erste genauere Berechnung von e führte 1691 der deutsche Universalgelehrte Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, der neben Newton wichtigste Begründer der Differenzial- und Integralrechnung) durch. Allerdings tauchte e bei ihm in einem völlig anderen Zusammenhang als der stetigen Verzinsung auf, nämlich bei der Konstruktion der sogenannten „Kettenlinie'' (der Kurve, die eine hängende Kette beschreibt). Er veröffentlichte im Anschluss zwar die Konstruktion, hielt die Rechnungen dahinter aber geheim; erst nach seinem Tod wurde seine Berechnung von e entdeckt (und festgestellt, dass sie ab der 9. Nachkommastelle falsch war…)



(Quelle: [The Leibniz catenary and approximation of e — an analysis of his unpublished calculations - ScienceDirect])

Der Schweizer Mathematiker und Physiker Leonhard Euler (1707–1783) definierte dann in seinem Buch *Introductio in analysin infinitorium* (1748) die zugehörigen Funktionen:

Definition: Die Exponentialfunktion zur Basis e, also f(x) = e^x, heißt <u>natürliche Exponentialfunktion</u>; man schreibt für sie auch exp(x). Der Logarithmus zur Basis e, also $\log_e x$, heißt <u>natürlicher Logarithmus</u>; man schreibt dafür meist ln(x).

Weil Euler erstmals die Wichtigkeit von e erkannte und in seinem Buch auch ausführlich eben die zugehörigen Funktionen diskutierte, ist die Zahl heute nach ihm benannt. Er hat die Zahl aber sicher nicht selbst nach sich benannt, und es ist auch reiner Zufall, dass sein Nachname mit demselben Buchstaben anfängt.