

Einführung in das Leontief-Modell

Beispiel 1:

Ein Landkreis benötigt pro Tag 6 Einheiten Gas und 1 Einheiten Strom; diese werden von den Stadtwerken zur Verfügung gestellt. Die Stadtwerke benötigen aber auch selbst pro Tag für die Gaserzeugung 1 Einheit Gas und 5 Einheiten Strom, für die Stromerzeugung 3 Einheiten Gas und 6 Einheiten Strom. Wie viel Einheiten Gas (g) und Strom (s) müssen die Stadtwerke pro Tag produzieren, damit sowohl der Bedarf des Landkreises als auch der eigene gedeckt ist?

Die gegenseitigen Bedürfnisse kann man auch in einem sog. Verflechtungsdiagramm (Gozinto-Graph) darstellen:

oder in Tabellenform:

	Gas	Strom	Markt	Gesamt
Gas				
Strom				

Die gegenseitigen Bedürfnisse der einzelnen Sektoren kann man zur Verflechtungsmatrix V zusammen fassen, die Produktion im Produktionsvektor \vec{x} und den Konsumbedarf im Konsumvektor (auch Markt- oder Nachfragevektor) \vec{y} ; im Beispiel:

$$V = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Der Produktionsvektor kann im Beispiel folgendermaßen berechnet werden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Das kann man formal auch umschreiben zu

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = V \cdot \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} + \vec{y}$$

Im Allgemeinen ist aber nicht von vornherein direkt bekannt, wie viele Einheiten eines Produkts ein Betrieb benötigt – sondern nur, wie viele Einheiten *pro produzierter Einheit* benötigt werden. Realistischer ist also die folgende Formulierung:

Beispiel 2:

Ein Landkreis benötigt pro Tag 6 Einheiten Gas und 1 Einheiten Strom; diese werden von den Stadtwerken zur Verfügung gestellt. Die Stadtwerke benötigen aber auch selbst für die Bereitstellung einer Gaseinheit jeweils 0,1 Gaseinheiten und 0,5 Stromeinheiten, und für die Bereitstellung einer Stromeinheit jeweils 0,25 Gaseinheiten und 0,5 Stromeinheiten. Wie viel Einheiten Gas (g) und Strom (s) müssen die Stadtwerke pro Tag produzieren, damit sowohl der Bedarf des Landkreises als auch der eigene gedeckt ist?

Die Angaben, wie viele Einheiten eines Produkts zur Herstellung einer Einheit eines anderen Produkt benötigt werden, nennt man auch Produktionskoeffizienten. Man fasst sie in der Input-Matrix A (auch: technologische Matrix T) zusammen; im Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Den Produktionsvektor kann man dann folgendermaßen berechnen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix},$$

es gilt also die Gleichung

$$\vec{x} =$$

Aufgabe:

Formulieren Sie diese Gleichung so um, dass auf der linken Seite nur noch das Produkt einer Matrix mit dem Produktionsvektor, auf der rechten Seite nur noch der Konsumvektor steht! (*Tipp*: verwenden Sie die Einheitsmatrix).