

Eigenschaften der trigonometrischen Grundfunktionen

Definition: Die Funktionen $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$ bzw. $x \mapsto \tan(x)$ heißen Sinus-, Kosinus- bzw. Tangensfunktion. Sie ordnen jeder Bogenlänge x den Sinus bzw. Kosinus bzw. Tangens des zugehörigen Winkels φ zu.

- Amplitude (Abstand von der Mitte bis zum höchsten / tiefsten Punkt) bei sin, cos:
- Periode(nlänge): $\sin(x + \quad) = \sin(x)$, $\cos(x + \quad) = \cos(x)$, $\tan(x + \quad) = \tan(x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$
- Nullstellen: $\sin: x = \quad$, also $\cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$
 $\tan: x = \quad$ (weil $\tan = \frac{\sin}{\cos}$!);
 $\cos: x = \quad$, also $\cdot \frac{\pi}{2} = \quad \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ (Vielfache von $\frac{\pi}{2}$);
 alle jeweils einfach \rightarrow VZW
- Definitionsmengen: $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$; $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{ \quad \}$
 (Definitionslücken von $\tan = \quad$)

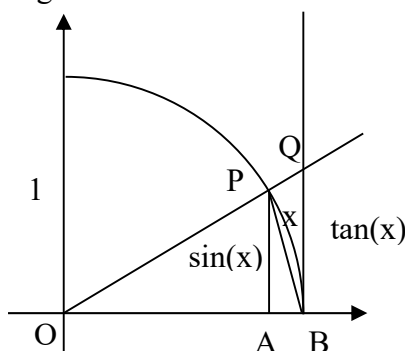
- \tan geht bei den Definitionslücken unbegrenzt nach oben bzw. unten, z. B.:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan(x) = -\infty$$

Man spricht von Polstellen (mit VZW). G_{\tan} nähert sich dabei jeweils an senkrechte Geraden an; man nennt diese senkrechte Asymptoten.

- Wertemengen: $W_{\sin} = W_{\cos} = [-1, 1]$, $W_{\tan} = \mathbb{R}$
- Symmetrie: $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\tan(-x) = -\tan(x)$,
 d. h. G_{\sin} , G_{\tan} sind symmetrisch \quad , G_{\cos} ist symmetrisch \quad
 Außerdem: sin, cos sind achsensymmetrisch zu jeder senkrechten Geraden durch jeweils einen \quad -punkt (\rightarrow die \quad stellen liegen immer in der Mitte zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen); sin, cos, tan sind punktsymmetrisch zu jedem \quad punkt.
- Stetigkeit: sin ist stetig; cos ist stetig (verschobener sin-Graph!); tan ist stetig in D_{\tan} (Quotient zweier stetiger Funktionen)

Anmerkung für später: Wir betrachten folgende Skizze:



Der Kreisbogen BP habe die Länge $0 < x < \frac{\pi}{2}$, die Strecken AP bzw. BQ haben also dann (nach Definition) die Längen $\sin(x)$ bzw. $\tan(x)$. Offensichtlich ist das Dreieck OAP kleiner, das Dreieck OBQ größer als der Kreissektor OBP, das heißt für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$0,5 \cdot 1 \cdot \sin(x) < 0,5 \cdot x \cdot 1 \quad \text{und} \quad 0,5 \cdot x \cdot 1 < 0,5 \cdot 1 \cdot \tan(x);$$

daraus folgt: $\sin(x) < x$ und $x < \tan(x)$.