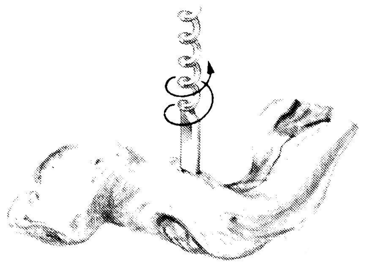
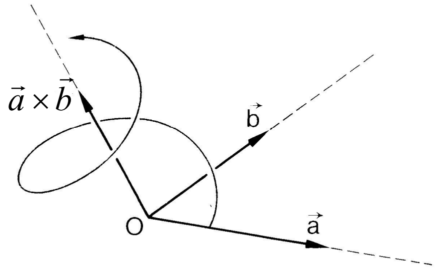
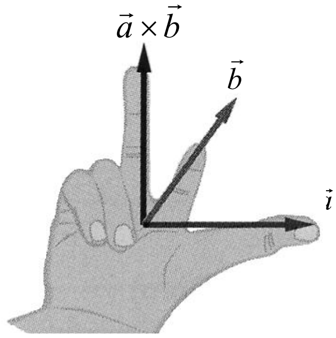
Eigenschaften des Vektorprodukts und Rechenregeln

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein „Rechtssystem", d. h.: dreht man $\vec{a}$ auf dem kürzesten Weg zu $\vec{b}$, so zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$in Richtung einer Rechtsschraube; alternativ: Hält man bei der rechten Hand den Daumen in Richtung von $\vec{a}$ und den Zeigefinger in Richtung von $\vec{b}$, so zeigt der Mittelfinger, wenn man ihn senkrecht zur Handfläche hält, in Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$:



- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ („Anti-Kommutativgesetz"); die Reihenfolge ist also wichtig!
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)
- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ („gemischtes Assoziativgesetz")
- dagegen gilt ***nicht*** ein Assoziativgesetz der Form $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$!
  (aber es gilt die sogenannte „Jacobi-Identität": $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$
  außerdem kann man das doppelte Vektorprodukt auch mittels des Skalarprodukts ausdrücken:
  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \circ \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \circ \vec{b})$ („bac-cab-Formel"))
- $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \circ \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$; dies kann man durch Nachrechnen beweisen:
  $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$
  $(\vec{a} \circ \vec{b})^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$
  $\vec{a}^2 \vec{b}^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$
  Durch Auflösen der Klammern (binomische Formeln) sieht man, dass beide Seiten gleich sind.
  (*viel Spaß...*)
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\,sin\,\alpha$ für $0 \leq \alpha \leq 180°$
  Dies kann man mit Hilfe der letzten Rechenregel beweisen:
  $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a} \circ \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|\,cos\,\alpha)^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - \vec{a}^2\vec{b}^2\,cos^2\,\alpha = \vec{a}^2\vec{b}^2(1 - cos^2\,\alpha)$
  $= \vec{a}^2 b^2\,sin^2\,\alpha$; durch Wurzel ziehen folgt die Behauptung