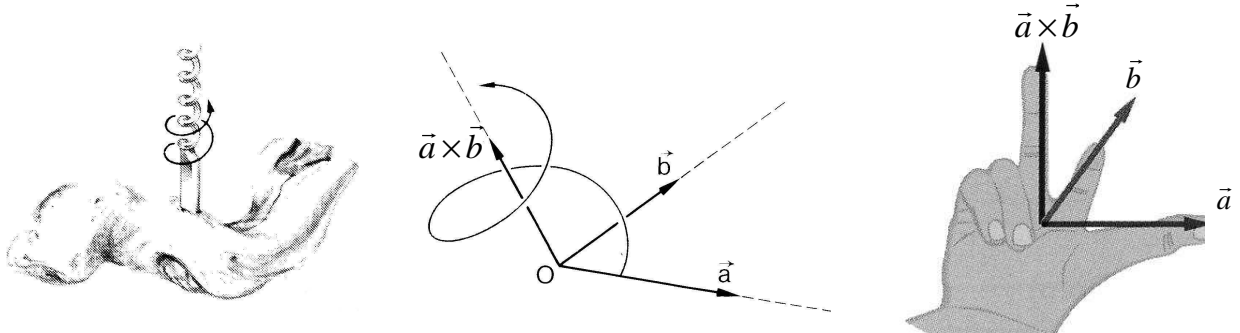


## Eigenschaften des Vektorprodukts und Rechenregeln

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$  bilden ein „Rechtssystem“, d. h.: dreht man  $\vec{a}$  auf dem kürzesten Weg zu  $\vec{b}$ , so zeigt  $\vec{a} \times \vec{b}$  in Richtung einer Rechtsschraube; alternativ: Hält man bei der rechten Hand den Daumen in Richtung von  $\vec{a}$  und den Zeigefinger in Richtung von  $\vec{b}$ , so zeigt der Mittelfinger, wenn man ihn senkrecht zur Handfläche hält, in Richtung von  $\vec{a} \times \vec{b}$ :



- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$  („Anti-Kommutativgesetz“); die Reihenfolge ist also wichtig!
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$  (Distributivgesetz)
- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$  („gemischtes Assoziativgesetz“)
- dagegen gilt **nicht** ein Assoziativgesetz der Form  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ !  
 (aber es gilt die sogenannte „Jacobi-Identität“:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$ ;  
 außerdem kann man das doppelte Vektorprodukt auch mittels des Skalarprodukts ausdrücken:  
 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \circ \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \circ \vec{b})$  („bac-cab-Formel“))
- $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \circ \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$ ; dies kann man durch Nachrechnen beweisen:  

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$(\vec{a} \circ \vec{b})^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

$$\vec{a}^2 \vec{b}^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$
 Durch Auflösen der Klammern (binomische Formeln) sieht man, dass beide Seiten gleich sind.  
 (viel Spaß...)
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$ ; dies kann man mit Hilfe der letzten Rechenregel beweisen:  

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \circ \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha)^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - \vec{a}^2 \vec{b}^2 \cos^2 \alpha = \vec{a}^2 \vec{b}^2 (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= \vec{a}^2 \vec{b}^2 \sin^2 \alpha$$
; durch Wurzel ziehen folgt die Behauptung