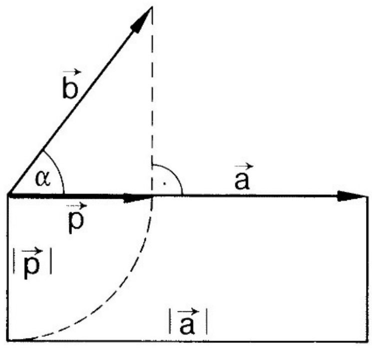
Eigenschaften des Skalarprodukts und Rechenregeln

- $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ (Kommutativgesetz; *folgt direkt aus der Definition, siehe unten*)
- $\lambda(\vec{a} \circ \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \circ \vec{b}$ („gemischtes‘‘ Assoziativgesetz; ! *folgt direkt aus der Definition, siehe unten;* Vorsicht: zwei verschiedene Produkte; eigentlich $\lambda \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (\lambda \odot \vec{a}) \circ \vec{b}$)
- $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$ (Distributivgesetz; *Begründung siehe hinten!*)
- geometrische Interpretation: $|\vec{b}| \cos\alpha$ ergibt die Komponente des Vektors $\vec{b}$ in Richtung des Vektors $\vec{a}$ (in der Skizze unten mit $|\vec{p}|$ bezeichnet; durch das Skalarprodukt wird der Vektor $\vec{b}$ also auf den Vektor $\vec{a}$ „projiziert“); damit ergibt $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha$ den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $|\vec{p}|$ und $|\vec{a}|$:



Begründung für das Kommutativgesetz:

$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ nach Definition

$\vec{b} \circ \vec{a} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(-\alpha)$ nach Definition; der Winkel geht dabei genau anders herum

$|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ sind aber einfach Zahlen, für diese gilt also das übliche Kommutativgesetz:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}|$$

Außerdem gilt immer $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Deshalb ist $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(-\alpha) = \vec{b} \circ \vec{a}$.

Begründung für das gemischte Assoziativgesetz:

$(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ nach Definition, wobei α hier der Winkel zwischen den Vektoren $\lambda\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Hier müssen wir drei Fälle unterscheiden:

1) $\lambda = 0$ ➔ $(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = |\vec{0}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = 0$, aber auch $\lambda(\vec{a} \circ \vec{b}) = 0$. Also folgt $\lambda(\vec{a} \circ \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \circ \vec{b}$.

2) $\lambda > 0$ ➔ $(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = \lambda|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = (\lambda\vec{a}) \circ \vec{b}$, da $\vec{a}$ und $\lambda\vec{a}$ in dieselbe Richtung zeigen.

3) $\lambda < 0$: Nun ist $|\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|$, da ja der Betrag des Vektors immer noch positiv sein muss. Außerdem ist der Winkel zwischen $\lambda\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich $180°–\alpha$, da sich ja die Richtung des Vektors umdreht. Damit folgt: $(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = -\lambda|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180° - \alpha)$ und $\lambda(\vec{a} \circ \vec{b}) = \lambda(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha)$. Da aber immer

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

gilt, folgt auch hier wieder $(\lambda\vec{a}) \circ \vec{b} = \lambda(\vec{a} \circ \vec{b})$.

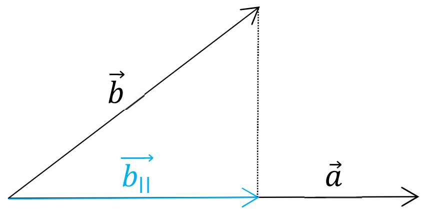
Zeichnerische Begründung für das Distributivgesetz

(Das Gesetz wird hier nur für den Fall begründet, dass alle auftretenden Winkel zwischen 0° und 90° liegen. In allen anderen Fällen geht die Begründung prinzipiell ähnlich, wird aber nochmals unübersichtlicher…)

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ ist

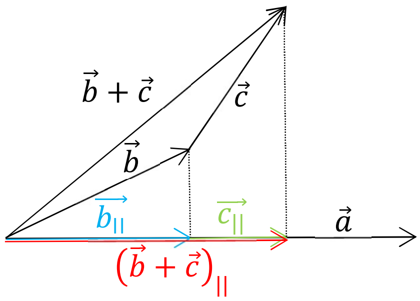
$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist. Anschaulich ist das gleich der Länge von $\vec{a}$ mal der Länge des Teils von $\vec{b}$, der parallel zu $\vec{a}$ ist, in der Zeichnung unten mit $\overrightarrow{b_{||}}$ bezeichnet:



Es ist also $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{b_{||}}|$ (zumindest für $0° \leq \alpha \leq 90°$; für andere Winkel wird die Begründung noch etwas komplizierter, aber prinzipiell ähnlich).

Schauen wir uns nun $\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ an. Die Vektoraddition wird wie üblich durchgeführt, siehe die Zeichnung unten:



Offensichtlich ist der Teil von $\vec{b} + \vec{c}$, der parallel zu $\vec{a}$ ist, also $\left(\vec{b} + \vec{c}\right)_{||}$, gleich dem Teil von $\vec{b}$, der parallel zu $\vec{a}$ ist (also $\overrightarrow{b_{||}}$) plus dem Teil von $\vec{c}$, der parallel zu $\vec{a}$ ist (also $\overrightarrow{c_{||}}$).

$$\left(\vec{b} + \vec{c}\right)_{||} = \overrightarrow{b_{||}} + \overrightarrow{c_{||}}$$

Außerdem zeigen $\overrightarrow{b_{||}}$ und $\overrightarrow{c_{||}}$ in dieselbe Richtung, deshalb ist

$$\left|\overrightarrow{b_{||}} + \overrightarrow{c_{||}}\right| = \left|\overrightarrow{b_{||}}\right| + \left|\overrightarrow{c_{||}}\right|.$$

Damit folgt insgesamt:

$$\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\left(\vec{b} + \vec{c}\right)_{||}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b_{||}} + \overrightarrow{c_{||}}\right| = |\vec{a}| \cdot \left(\left|\overrightarrow{b_{||}}\right| + \left|\overrightarrow{c_{||}}\right|\right)$$

Jetzt können wir die Klammer ganz normal ausmultiplizieren, weil die Terme hier alle Zahlen sind; also folgt:

$$\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b_{||}}\right| + |\vec{a}| \cdot \left|\overrightarrow{c_{||}}\right| = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$$

Damit ist gezeigt: Das Skalarprodukt ist distributiv, d. h. man kann wie üblich Klammern ausmultiplizieren.