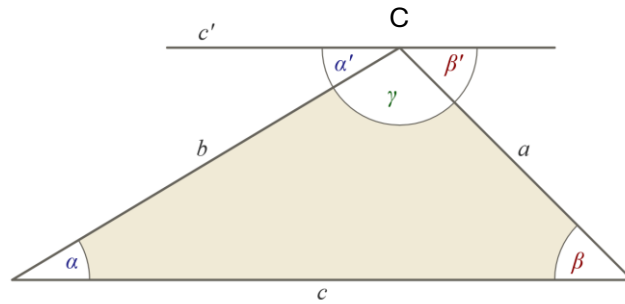


## Beweise zu den wichtigen Grundlagen bei Dreiecken

- Summe der drei (Innen-)Winkel: Wir zeichnen eine Parallele  $c'$  zur Seite  $c$  durch den Punkt  $C$ :

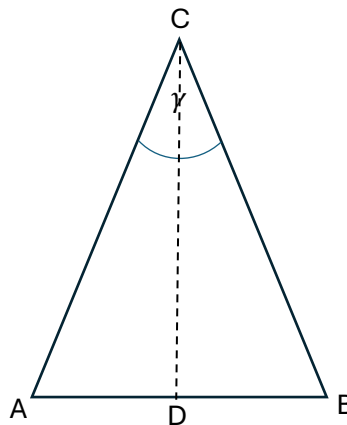


Für die drei Winkel oben beim Punkt  $C$  gilt offensichtlich:  $\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$ .

Da aber  $\alpha' = \alpha$  ist und auch  $\beta' = \beta$  (dies sind jeweils Wechselwinkel), folgt sofort

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

- Gleichschenklige Dreiecke: Wir zeichnen zunächst die Winkelhalbierende zum Spitzenwinkel  $\gamma$  ein; deren Schnittpunkt mit der Basis  $c$  nennen wir  $M$ .

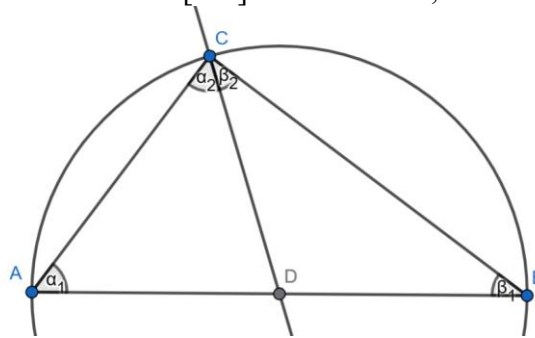


Beide Dreiecke stimmen nun in zwei Seitenlängen ( $\overline{DC}, \overline{AC} = \overline{BC}$ ) und um eingeschlossenen Winkel ( $\gamma/2$ ) überein. Damit müssen die beiden Dreiecke deckungsgleich sein (Kongruenzsatz SWS), also muss auch  $\alpha = \beta$  und  $\overline{AD} = \overline{BD}$  gelten. Daraus folgt einerseits, dass die Winkelhalbierende auch die Seitenhalbierende ist. Andererseits folgt aber auch, dass die beiden Winkel bei  $D$  gleich groß sein müssen, also beide die Größe  $90^\circ$  haben; damit folgt, dass die Winkelhalbierende auch gleich der Höhe ist.

Die restlichen Behauptungen beweist man ähnlich.

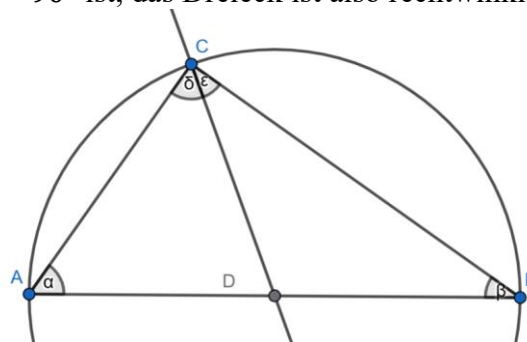
- Gleichseitige Dreiecke: Diese kann man auf drei verschiedene Arten jeweils als gleichschenklige Dreiecke betrachten. Aus  $a = b$  folgt dann sofort  $\alpha = \beta$ , genauso folgt  $\beta = \gamma$  aus  $b = c$  und  $\alpha = \gamma$  aus  $a = c$ . Damit ist insgesamt offensichtlich  $\alpha = \beta = \gamma$ , und eingesetzt in die Formel für die Winkelsumme im Dreieck erhält man  $\alpha + \alpha + \alpha = 180^\circ$ , also  $\alpha = 60^\circ$  und damit auch  $\beta = \gamma = 60^\circ$ . Umgekehrt folgt aus  $\alpha = \beta = \gamma$  genauso auch  $a = b = c$ .

- Satz des Thales: Das Dreieck habe einen rechten Winkel beim Punkt C. Wegen der Winkelsumme im Dreieck muss dann  $\alpha + \beta = \gamma = 90^\circ$  sein, d. h. man kann  $\gamma$  aufteilen in  $\alpha$  und  $\beta$ . Den Schnittpunkt der Geraden, die  $\gamma$  so teilt, mit der Strecke  $[AB]$  nennen wir D, siehe Skizze unten.



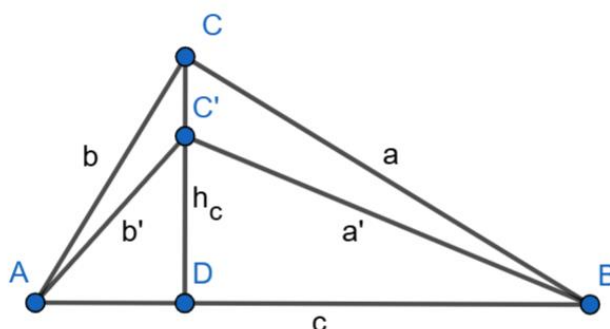
Die Dreiecke ADC und DBC haben nun jeweils zwei gleich große Winkel (zweimal Winkel  $\alpha$  bzw. zweimal Winkel  $\beta$ ), sind also gleichschenkelig. Damit sind die Längen der Strecken  $[AD]$  und  $[CD]$  bzw. der Strecken  $[BD]$  und  $[CD]$  jeweils gleich groß. Daraus folgt aber sofort, dass auch die Strecken  $[AD]$  und  $[BD]$  gleich lang sein müssen, d. h. D ist der Mittelpunkt der Strecke  $[AB]$ . Damit ist gezeigt, dass C auf einem Kreis um D mit Durchmesser  $[AB]$  liegt.

Umgekehrt: C liege auf einem Kreis mit Durchmesser  $[AB]$ . Den Mittelpunkt des Kreises bezeichnen wir mit D. Dann sind  $[AD]$ ,  $[DB]$  und  $[DC]$  alle gleich lang. Die Dreiecke ADC und DBC sind deshalb beide jeweils gleichschenkelig. Damit folgt, dass die Winkel  $\delta$  und  $\alpha$  bzw.  $\varepsilon$  und  $\beta$  jeweils gleich groß sein müssen. Wegen der Winkelsumme im Dreieck ist aber dann  $\alpha + \beta + \delta + \varepsilon = 2(\delta + \varepsilon) = 180^\circ$ , und es folgt, dass  $\gamma = \delta + \varepsilon = 90^\circ$  ist, das Dreieck ist also rechtwinklig bei C.



- Umkehrung zum Satz von Pythagoras: Betrachte zunächst ein Dreieck  $ABC'$  mit stumpfem Winkel bei  $C'$  und den Seitenlängen  $a'$ ,  $b'$ ,  $c = [AB]$ . Aus der Zeichnung sieht man (das kann man aber auch begründen, s. u.), dass man nur dann ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Seitenlängen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  erhält, wenn man den Punkt  $C'$  entlang der Höhe  $h_c$  „nach oben“ (also von der Seite  $[AB]$  weg) verschiebt. Da die Höhe größer wird, folgt  $a' < a$  und  $b' > b$ , also  $a'^2 + b'^2 < a^2 + b^2$ . Da das Dreieck ABC rechtwinklig ist, gilt in diesem natürlich  $a^2 + b^2 = c^2$ , also folgt insgesamt für die Seitenlängen des stumpfwinkligen Dreiecks:

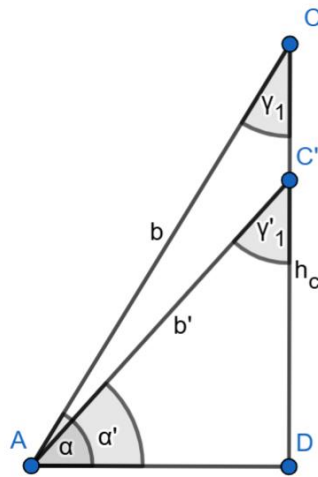
$$a'^2 + b'^2 < c^2.$$



Praktisch genauso begründet man, dass in einem spitzwinkligen Dreieck  $ABC'$  mit den Seitenlängen  $a'$ ,  $b'$ ,  $c$  gilt:  $a'^2 + b'^2 > c^2$ .

Insgesamt folgt also, dass **nur** in Dreiecken mit rechtem Winkel bei C die Formel  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt. Damit ist die Umkehrung zum Satz von Pythagoras bewiesen: Gilt in einem Dreieck  $a^2 + b^2 = c^2$ , so hat es einen rechten Winkel beim Punkt C.

Eigentlich ist die zentrale Behauptung oben (in Dreiecken  $ABC'$  mit einem stumpfen Winkel bei  $C'$  ist die Höhe  $h_c$  kleiner als im entsprechenden rechtwinkligen Dreieck  $ABC$ , in spitzwinkligen Dreiecken  $ABC'$  ist  $h_c$  dagegen größer) aus den entsprechenden Skizzen offensichtlich, dies wird aber trotzdem noch kurz begründet. Dafür betrachten wir nur die linken (rechtwinkligen!) Teildreiecke  $ADC'$  und  $ADC$ . Aus  $\gamma_1 < \gamma'_1$ , der Winkelsumme im Dreieck und dem rechten Winkel bei D folgt dann  $\alpha > \alpha'$ . Die Strecke  $b'$  liegt deshalb innerhalb des Winkels  $\angle DAC$ , und damit liegt der Punkt  $C'$  auf der Strecke  $CD$  und ist nicht identisch zu C (oder zu D). Und daraus folgt wiederum, dass  $h_c$  im Dreieck  $ADC$  kleiner ist als im Dreieck  $ADC'$ . Umgekehrt kann man auch folgern, dass aus „ $h_c$  ist im Dreieck  $ADC'$  kleiner als im Dreieck  $ADC$ “ folgt, dass  $\gamma_1 < \gamma'_1$  sein muss.



Genauso begründet man in den rechten Teildreiecken  $DBC'$  und  $DBC$ , dass genau dann  $\gamma_2 < \gamma'_2$  gilt, wenn  $h_c$  im Dreieck  $DBC'$  kleiner ist als im Dreieck  $DBC$ . Insgesamt folgt somit tatsächlich: Genau dann gilt, dass  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  kleiner wird, wenn  $h_c$  größer wird.