

„gewöhnliche“ Differenzialgleichungen (enthalten Ableitungen nach nur einer Variable):

1. Ein Körper werde vom Ursprung an aus der Ruhe konstant mit a beschleunigt, es gilt also

$$\ddot{x} = a.$$

Was ergibt sich für $x(t)$?

2. Bei einem Körper, der an einer Feder befestigt ist, wirkt die rückstellende Kraft $F = -D \cdot x$ (Hooke'sches Gesetz!). Insgesamt gilt für die Beschleunigung deshalb:

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m} x.$$

Was ergibt sich für $x(t)$?

3. Auf einen Körper, der in einer Flüssigkeit fällt, wirkt die Schwerebeschleunigung $-g$; durch die Flüssigkeit wird er aber abgebremst, sodass man eine zusätzliche Kraft (und damit Beschleunigung) proportional zu $v = \dot{x}$ hat („Stoke'sche Reibung“). Insgesamt gilt für die Beschleunigung deshalb:

$$\ddot{x} = -g + k \dot{x}.$$

Was ergibt sich für $x(t)$?

4. Auf einen Körper, der in einer Flüssigkeit fällt, wirkt die Schwerebeschleunigung $-g$ und zusätzlich der Luftwiderstand, sodass man eine zusätzliche Kraft (und damit Beschleunigung) proportional zu $v^2 = \dot{x}^2$ hat („Newton'sche Reibung“). Insgesamt gilt für die Beschleunigung deshalb:

$$\ddot{x} = -g + k \dot{x}^2.$$

Was ergibt sich für $x(t)$?

5. Befindet man sich in großer Höhe über dem Erdboden, so kann man für die Gewichtskraft bekanntlich nicht mehr einfach $F = mg$ verwenden, sondern braucht die allgemeine Formel für die Gravitationskraft, $F = G \frac{m \cdot m_{Erde}}{r^2}$, wobei r der Abstand zum Erdmittelpunkt ist. Für die Beschleunigung $a = \ddot{r}$ zur Erde hin gilt deshalb

$$\ddot{r} = -G \frac{m_{Erde}}{r^2}.$$

Was ergibt sich für $r(t)$?

6. Zerfallen radioaktive Kerne, so ist die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit proportional zur Anzahl N der noch vorhandenen Kerne, d. h. es gilt

$$\dot{N} = -k \cdot N.$$

Was ergibt sich für $N(t)$?

7. Lädt man einen Kondensator der Kapazität C an einer Spannungsquelle mit konstanter Spannung U über einen Widerstand R auf, so gilt für die Ladung Q auf dem Kondensator

$$R \dot{Q} + \frac{Q}{C} = U.$$

Was ergibt sich für $Q(t)$?

8. Legt man an einen Stromkreis, der einen Widerstand R und eine Spule der Induktivität L enthält, eine konstante Spannung U an, so gilt für die Stromstärke

$$L \dot{I} + R I = U.$$

Was ergibt sich für $I(t)$?

9. Ein erhitzter Körper (Temperatur $T(t)$) kühlt sich bekanntlich allmählich auf die Temperatur T_0 seiner Umgebung ab. Dabei gilt

$$\dot{T} = -k \cdot (T - T_0),$$

wobei die Konstante k die Wärmeleitfähigkeit beschreibt. Was ergibt sich für $T(t)$?

10. Hat ein mit Wasser gefüllter Tank im Boden ein Loch, so ist die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers proportional zur Wurzel aus der Höhe h des Wassers im Tank; deshalb ist auch die Veränderung \dot{h} des Wasserstands proportional zur Wurzel aus h :

$$\dot{h} = k \cdot \sqrt{h}.$$

Was ergibt sich für $h(t)$?

11. Der sogenannte Hubble-Parameter H gibt an, wie schnell sich das Universum ausdehnt: Galaxien in der Entfernung d entfernen sich von uns mit der Geschwindigkeit $v = H \cdot d$. Für die zeitliche Änderung von H gilt:

$$\dot{H} = -\frac{3}{2} H^2 + 4\pi G \Lambda$$

mit der sogenannten kosmologischen Konstante Λ . Was ergibt sich für $H(t)$?

12. Hängt eine Kette oder ein Seil unbelastet nur unter dem eigenen Gewicht durch, so gilt für ihre Höhe h in Abhängigkeit vom Abstand x zu einem Aufhängepunkt:

$$h''(x) = k \cdot \sqrt{1 + (h'(x))^2},$$

wobei k von der Dichte und der Spannung des Seils abhängt. Was ergibt sich für $h(x)$?

13. zeitliche Änderung der Konzentration eines Stoffes bei einer chemischen Reaktion

14. zeitliche Bevölkerungsentwicklung

15. Pflanzen- / Bakterienwachstum

16. zeitliche Ausbreitung einer Krankheit

„partielle“ Differenzialgleichungen (enthalten Ableitungen nach mehreren Variablen):

17. Optik: „Strahlengleichung“

Wird die Ausbreitung eines Lichtstrahls in Abhängigkeit von der Zeit durch den

Vektor $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ beschrieben und hängt der Brechungsindex n von x, y, z , ab,

dann gilt

$$\frac{d}{dt} \left[n(x(t), y(t), z(t)) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{dn}{dx} \\ \frac{dn}{dy} \\ \frac{dn}{dz} \end{pmatrix}$$

18. Die Komponenten E_x, E_y, E_z der (statischen) elektrischen Feldstärke am Punkt mit den Koordinaten x, y, z hängen mit der Ladungsdichte ρ folgendermaßen zusammen:

$$\frac{dE_x(x,y,z)}{dx} + \frac{dE_y(x,y,z)}{dy} + \frac{dE_z(x,y,z)}{dz} = \frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon_0}$$

19. Die Komponenten B_x, B_y, B_z der (statischen) magnetischen Flussdichte am Punkt mit den Koordinaten x, y, z hängen mit den Komponenten j_x, j_y, j_z der Stromdichte folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{dB_z(x,y,z)}{dy} - \frac{dB_y(x,y,z)}{dz} &= \mu_0 j_x(x, y, z) \\ \frac{dB_x(x,y,z)}{dz} - \frac{dB_z(x,y,z)}{dx} &= \mu_0 j_y(x, y, z) \\ \frac{dB_y(x,y,z)}{dx} - \frac{dB_x(x,y,z)}{dy} &= \mu_0 j_z(x, y, z) \end{aligned}$$

20. Poisson- und Laplace-Gleichung, wichtig z. B. für statische elektrische Felder

$$\frac{d^2\phi(x,y,z)}{dx^2} + \frac{d^2\phi(x,y,z)}{dy^2} + \frac{d^2\phi(x,y,z)}{dz^2} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon_0} \quad \text{bzw.} \quad = 0$$

Führen je nach verwendetem Koordinatensystem jeweils auf Differenzialgleichungen, die jeweils eigene Namen haben, z. B. Legendre'sche / Bessel'sche Differenzialgleichung.

21. Wellengleichung, wichtig bei der Ausbreitung von Wellen

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2\phi(x,y,z,t)}{dt^2} - \frac{d^2\phi(x,y,z,t)}{dx^2} - \frac{d^2\phi(x,y,z,t)}{dy^2} - \frac{d^2\phi(x,y,z,t)}{dz^2} = 0$$

22. Helmholtz-Gleichung, wichtig z. B. bei der Abstrahlung von Radiowellen (mit Wellenlänge λ und Ladungsdichte ρ)

$$\frac{d^2\phi(x,y,z)}{dx^2} + \frac{d^2\phi(x,y,z)}{dy^2} + \frac{d^2\phi(x,y,z)}{dz^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \phi(x, y, z) = \frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon_0}$$

23. Wärmeleitungsgleichung (mit Temperaturleitfähigkeit a), beschreibt auch Diffusion

$$\frac{dT(x,y,z,t)}{dt} = a \left(\frac{d^2T(x,y,z,t)}{dx^2} + \frac{d^2T(x,y,z,t)}{dy^2} + \frac{d^2T(x,y,z,t)}{dz^2} \right)$$

24. Quantenmechanik: (zeitunabhängige) Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \left(\frac{d^2\psi(x,y,z)}{dx^2} + \frac{d^2\psi(x,y,z)}{dy^2} + \frac{d^2\psi(x,y,z)}{dz^2} \right) + E_{pot}(x,y,z) \psi(x,y,z) = E_{ges} \psi(x,y,z)$$

Führt je nach der genauen Form von $E_{pot}(x,y,z)$ jeweils auf Differenzialgleichungen, die jeweils eigene Namen haben, z. B. Hermite'sche / Laguerre'sche / Airy'sche Differenzialgleichung.

In der zeitabhängigen Form steht $i \frac{\hbar}{2\pi} \frac{d\psi}{dt}(x,y,z,t)$ statt $E_{ges} \psi(x,y,z)$.

25. Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung für ein *freies* Teilchen (relativistische Quantenmechanik)

$$\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \left(\frac{d^2\psi(x,y,z,t)}{dt^2} - c^2 \left[\frac{d^2\psi(x,y,z,t)}{dx^2} - \frac{d^2\psi(x,y,z,t)}{dy^2} - \frac{d^2\psi(x,y,z,t)}{dz^2} \right] \right) + m^2c^4 \psi(x,y,z,t) = 0$$

bzw.

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\psi_4}{dx} - i \frac{d\psi_4}{dy} + \frac{d\psi_3}{dz} \\ \frac{d\psi_2}{dt} + \frac{d\psi_3}{dx} + i \frac{d\psi_3}{dy} - \frac{d\psi_4}{dz} \\ -\frac{d\psi_3}{dt} - \frac{d\psi_2}{dx} + i \frac{d\psi_2}{dy} - \frac{d\psi_1}{dz} \\ -\frac{d\psi_4}{dt} - \frac{d\psi_1}{dx} - i \frac{d\psi_1}{dy} + \frac{d\psi_2}{dz} \end{pmatrix} = mc^2 \begin{pmatrix} \psi_1(x,y,z,t) \\ \psi_2(x,y,z,t) \\ \psi_3(x,y,z,t) \\ \psi_4(x,y,z,t) \end{pmatrix}$$

26. Einstein-Gleichung(en) der allgemeinen Relativitätstheorie

27. Navier-Stokes-Gleichungen der Hydrodynamik (wichtig für Bewegungen von und in Flüssigkeiten und Gasen); **Milleniumsproblem!**

28. Yang-Mills-Gleichungen (grundlegend für das Verhalten von Elementarteilchen, z. B. radioaktiver Zerfall und Stabilität von Atomkernen); **Milleniumsproblem!**

29. Finanzmathematik: Black-Scholes-Gleichung

30. zeitliche und räumliche Änderung der Konzentration eines Stoffes bei einer chemischen Reaktion, oder Ausbreitung einer Krankheit usw.