„gewöhnliche" Differenzialgleichungen (enthalten Ableitungen nach nur einer Variable):

1. Ein Körper werde vom Ursprung an aus der Ruhe konstant mit a beschleunigt, es gilt also
$$\ddot{x} = a.$$
Was ergibt sich für x(t)?

2. Bei einem Körper, der an einer Feder befestigt ist, wirkt die rückstellende Kraft F = –D·x (Hooke'sches Gesetz!). Insgesamt gilt für die Beschleunigung deshalb:
$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x.$$
Was ergibt sich für x(t)?

3. Auf einen Körper, der in einer Flüssigkeit fällt, wirkt die Schwerebeschleunigung –g; durch die Flüssigkeit wird er aber abgebremst, sodass man eine zusätzliche Kraft (und damit Beschleunigung) proportional zu v = $\dot{x}$ hat („Stoke'sche Reibung"). Insgesamt gilt für die Beschleunigung deshalb:
$$\ddot{x} = -g + k\,\dot{x}.$$
Was ergibt sich für x(t)?

4. Auf einen Körper, der in Luft fällt, wirkt die Schwerebeschleunigung −g und zusätzlich der Luftwiderstand, sodass man eine zusätzliche Kraft (und damit Beschleunigung) proportional zu $v^2 = \dot{x}^2$ hat („Newton'sche Reibung"). Insgesamt gilt für die Beschleunigung deshalb:
$$\ddot{x} = -g + k\,\dot{x}^2.$$
Was ergibt sich für x(t)?

5. Befindet man sich in großer Höhe über dem Erdboden, so kann man für die Gewichtskraft bekanntlich nicht mehr einfach F = mg verwenden, sondern braucht die allgemeine Formel für die Gravitationskraft, $F = G\frac{m \cdot m_{Erde}}{r^2}$, wobei r der Abstand zum Erdmittelpunkt ist. Für die Beschleunigung a = $\ddot{r}$ zur Erde hin gilt deshalb
$$\ddot{r} = -G\frac{m_{Erde}}{r^2}.$$
Was ergibt sich für r(t)?

6. Zerfallen radioaktive Kerne, so ist die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit proportional zur Anzahl N der noch vorhandenen Kerne, d. h. es gilt
$$\dot{N} = -k \cdot N \quad (\text{mit } k > 0).$$
Was ergibt sich für N(t)?

7. Lädt man einen Kondensator der Kapazität C an einer Spannungsquelle mit konstanter Spannung U über einen Widerstand R auf, so gilt für die Ladung Q auf dem Kondensator

$$R\,\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U.$$

Was ergibt sich für Q(t)?

8. Legt man an einen Stromkreis, der einen Widerstand R und eine Spule der Induktivität L enthält, eine konstante Spannung U an, so gilt für die Stromstärke

$$L\,\dot{I} + R\,I = U.$$

Was ergibt sich für I(t)?

9. Ein erhitzter Körper (Temperatur T(t)) kühlt sich bekanntlich allmählich auf die Temperatur T_0 seiner Umgebung ab. Dabei gilt

$$\dot{T} = -k \cdot (T - T_0),$$

wobei die Konstante k die Wärmeleitfähigkeit beschreibt. Was ergibt sich für T(t)?

10. Hat ein mit Wasser gefüllter Tank im Boden ein Loch, so ist die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers proportional zur Wurzel aus der Höhe h des Wassers im Tank; deshalb ist auch die Veränderung $\dot{h}$ des Wasserstands proportional zur Wurzel aus h:

$$\dot{h} = k \cdot \sqrt{h}.$$

Was ergibt sich für h(t)?

11. Der sogenannte Hubble-Parameter H gibt an, wie schnell sich das Universum ausdehnt: Galaxien in der Entfernung d entfernen sich von uns mit der Geschwindigkeit v = H·d. Für die zeitliche Änderung von H gilt:

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}\,H^2 + 4\pi G\Lambda$$

mit der sogenannten kosmologischen Konstante Λ. Was ergibt sich für H(t)?

12. Hängt eine Kette oder ein Seil unbelastet nur unter dem eigenen Gewicht durch, so gilt für ihre Höhe h in Abhängigkeit vom Abstand x zu einem Aufhängepunkt:

$$h''(x) = k \cdot \sqrt{1 + (h'(x))^2},$$

wobei k von der Dichte und der Spannung des Seils abhängt. Was ergibt sich für h(x)?

13. Sind an einer chemischen Reaktion jeweils n Edukt-Teilchen beteiligt, dann spricht man von einer Reaktion der Ordnung n, und für den Zusammenhang zwischen Reaktionsgeschwindigkeit und Konzentration des Edukts gilt dann:

$$v = -\dot{c} = k \cdot c^n \quad (\text{mit } k > 0)$$

Was folgt für den zeitlichen Verlauf der Konzentration?

14. Populationsentwicklung, z. B.

- logistisches Wachstum:

Ist N die Anzahl von Lebewesen einer Population, k der Wachstumsfaktor und G eine obere Grenze für die Anzahl, dann gilt die Gleichung

$$\dot{N} = k \cdot N \cdot (G - N)$$

Was folgt für die zeitliche Entwicklung der Population?

- Lotka-Volterra-Gleichungen / Räuber-Beute-Modell:

Sind N_1, N_2 die Anzahl der Beute- bzw. der Räuberlebewesen, ε_1 die Reproduktionsrate der Beutelebewesen, γ_2 die Reproduktionsrate der Räuberlebe-wesen pro Beutelebewesen, ε_2 die Sterberate der Räuber und γ_1 die Fressrate der Räuber pro Beutelebewesen, dann gelten die „gekoppelten‘‘ Gleichungen

$$\dot{N}_1 = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), \qquad \dot{N}_2 = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1)$$

Was folgt für die zeitliche Entwicklung der Populationen in Abhängigkeit von den Parametern $\varepsilon_{1,2}$ und $\gamma_{1,2}$?

15. Ausbreitung einer Krankheit, z. B.

- SI-Modell:

S sei die Anzahl der Infizierbaren, I die Anzahl der Infizierenden, k die Infektionsrate bei einem Kontakt von Infizierbaren und Infizierenden, a die Heilungsrate; die Gesamtzahl S+I bleibe konstant. Dann gelten die gekoppelten Gleichungen

$$\dot{S} = -k \cdot S \cdot I + a \cdot I, \qquad \dot{I} = k \cdot S \cdot I - a \cdot I$$

- SIR-Modell (Kermack-McKendrick-Modell):

Wird verwendet, wenn eine Krankheit zu einer Immunisierung führt; die Anzahl der Immunisierten wird mit R bezeichnet. Dann gelten drei gekoppelte Gleichungen:

$$\dot{S} = -k \cdot S \cdot I, \qquad \dot{I} = k \cdot S \cdot I - a \cdot I, \qquad \dot{R} = a \cdot I$$

Was folgt jeweils für die zeitliche Ausbreitung der Krankheit?

„partielle" Differenzialgleichungen (enthalten Ableitungen nach mehreren Variablen):

16. Optik: „Strahlengleichung"
    Wird die Ausbreitung eines Lichtstrahls in Abhängigkeit von der Zeit durch den Vektor $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ beschrieben und hängt der Brechungsindex n von x, y, z, ab, dann gilt

$$\frac{d}{dt}\left[n(x(t), y(t), z(t)) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{dn}{dx} \\ \frac{dn}{dy} \\ \frac{dn}{dz} \end{pmatrix}$$

17. Die Komponenten E_x, E_y, E_z der (statischen) elektrischen Feldstärke am Punkt mit den Koordinaten x, y, z hängen mit der Ladungsdichte ρ folgendermaßen zusammen:

$$\frac{dE_x(x,y,z)}{dx} + \frac{dE_y(x,y,z)}{dy} + \frac{dE_z(x,y,z)}{dz} = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$$

18. Die Komponenten B_x, B_y, B_z der (statischen) magnetischen Flussdichte am Punkt mit den Koordinaten x, y, z hängen mit den Komponenten j_x, j_y, j_z der Stromdichte folgendermaßen zusammen: („gekoppelte Differenzialgleichungen")

$$\frac{dB_z(x,y,z)}{dy} - \frac{dB_y(x,y,z)}{dz} = \mu_0\, j_x(x,y,z)$$
$$\frac{dB_x(x,y,z)}{dz} - \frac{dB_z(x,y,z)}{dx} = \mu_0\, j_y(x,y,z)$$
$$\frac{dB_y(x,y,z)}{dx} - \frac{dB_x(x,y,z)}{dy} = \mu_0\, j_z(x,y,z)$$

19. Poisson- und Laplace-Gleichung, wichtig z. B. für statische elektrische Felder

$$\frac{d^2\phi(x,y,z)}{dx^2} + \frac{d^2\phi(x,y,z)}{dy^2} + \frac{d^2\phi(x,y,z)}{dz^2} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0} \quad \text{bzw.} \quad = 0$$

    Führen je nach verwendetem Koordinatensystem jeweils auf Differenzialgleichungen, die jeweils eigene Namen haben, z. B. Legendre'sche / Bessel'sche Differenzialgleichung.

20. Wellengleichung, wichtig bei der Ausbreitung von Wellen

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\phi(x,y,z,t)}{dt^2} - \frac{d^2\phi(x,y,z,t)}{dx^2} - \frac{d^2\phi(x,y,z,t)}{dy^2} - \frac{d^2\phi(x,y,z,t)}{dz^2} = 0$$

21. Helmholtz-Gleichung, wichtig z. B. bei der Abstrahlung von Radiowellen (mit Wellenlänge λ und Ladungsdichte ρ)

$$\frac{d^2\phi(x,y,z)}{dx^2} + \frac{d^2\phi(x,y,z)}{dy^2} + \frac{d^2\phi(x,y,z)}{dz^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \phi(x,y,z) = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$$

22. Wärmeleitungsgleichung (mit Temperaturleitfähigkeit a), beschreibt auch Diffusion

$$\frac{dT(x,y,z,t)}{dt} = a\left(\frac{d^2T(x,y,z,t)}{dx^2} + \frac{d^2T(x,y,z,t)}{dy^2} + \frac{d^2T(x,y,z,t)}{dz^2}\right)$$

23. Finanzmathematik: Black-Scholes-Gleichung für den Preis V eines Derivats

$$\frac{dV}{dt} + r\,S\,\frac{dV}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{dV^2}{dS^2} = r\,V$$

24. Quantenmechanik: (zeitunabhängige) Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{d^2\psi(x,y,z)}{dx^2} + \frac{d^2\psi(x,y,z)}{dy^2} + \frac{d^2\psi(x,y,z)}{dz^2}\right) + E_{pot}(x,y,z)\,\psi(x,y,z) = E_{ges}\,\psi(x,y,z)$$

Führt je nach der genauen Form von $E_{pot}(x,y,z)$ jeweils auf Differenzialgleichungen, die jeweils eigene Namen haben, z. B. Hermite'sche / Laguerre'sche / Airy'sche Differenzialgleichung.

In der zeitabhängigen Form steht $i\,\frac{h}{2\pi}\frac{d\psi}{dt}(x,y,z,t)$ statt $E_{ges}\,\psi(x,y,z)$.

25. Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung für ein *freies* Teilchen (relativistische Quantenmechanik)

$$\frac{h^2}{4\pi^2}\left(\frac{d^2\psi(x,y,z,t)}{dt^2} - c^2\left[\frac{d^2\psi(x,y,z,t)}{dx^2} - \frac{d^2\psi(x,y,z,t)}{dy^2} - \frac{d^2\psi(x,y,z,t)}{dz^2}\right]\right) + m^2c^4\,\psi(x,y,z,t) = 0$$

bzw. („gekoppelte Differenzialgleichungen")

$$\frac{ih}{2\pi}\begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\psi_4}{dx} - i\frac{d\psi_4}{dy} + \frac{d\psi_3}{dz} \\ \frac{d\psi_2}{dt} + \frac{d\psi_3}{dx} + i\frac{d\psi_3}{dy} - \frac{d\psi_4}{dz} \\ -\frac{d\psi_3}{dt} - \frac{d\psi_2}{dx} + i\frac{d\psi_2}{dy} - \frac{d\psi_1}{dz} \\ -\frac{d\psi_4}{dt} - \frac{d\psi_1}{dx} - i\frac{d\psi_1}{dy} + \frac{d\psi_2}{dz} \end{pmatrix} = mc^2\begin{pmatrix} \psi_1(x,y,z,t) \\ \psi_2(x,y,z,t) \\ \psi_3(x,y,z,t) \\ \psi_4(x,y,z,t) \end{pmatrix}$$

26. Navier-Stokes-(Impuls-)Gleichungen der Hydrodynamik (wichtig für Bewegungen von und in Flüssigkeiten und Gasen); ***Milleniumsproblem!***

$$\rho\left(\frac{dv_x}{dt} + v_x\frac{dv_x}{dx} + v_y\frac{dv_x}{dy} + v_z\frac{dv_x}{dz}\right) = -\frac{dp}{dx} + \mu\left(\frac{d^2v_x}{dx^2} + \frac{d^2v_x}{dy^2} + \frac{d^2v_x}{dz^2}\right) + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz}\right) + f_x$$

$$\rho\left(\frac{dv_y}{dt} + v_x\frac{dv_y}{dx} + v_y\frac{dv_y}{dy} + v_z\frac{dv_y}{dz}\right) = -\frac{dp}{dy} + \mu\left(\frac{d^2v_y}{dx^2} + \frac{d^2v_y}{dy^2} + \frac{d^2v_y}{dz^2}\right) + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz}\right) + f_y$$

$$\rho\left(\frac{dv_z}{dt} + v_x\frac{dv_z}{dx} + v_y\frac{dv_z}{dy} + v_z\frac{dv_z}{dz}\right) = -\frac{dp}{dz} + \mu\left(\frac{d^2v_z}{dx^2} + \frac{d^2v_z}{dy^2} + \frac{d^2v_z}{dz^2}\right) + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz}\right) + f_z$$

27. Yang-Mills-Gleichungen (grundlegend für das Verhalten von Elementarteilchen, z. B. radioaktiver Zerfall und Stabilität von Atomkernen); ***Milleniumsproblem!***

stark abgekürzt: $\partial^{\mu} F^{a}_{\mu\nu} + g f^{a}_{bc} A^{\mu b} F^{c}_{\mu\nu} = J^{a}_{\nu}$

teilweise ausgeschrieben, aber immer noch abgekürzt:

$$\sum_{\mu} \frac{d}{dx_{\mu}} \left(\frac{d}{dx^{\mu}} A^{a}_{\nu} - \frac{d}{dx^{\nu}} A^{a}_{\mu} + g \sum_{b,c} f^{a}_{bc} A^{b}_{\mu} A^{c}_{\nu} \right) + g \sum_{b,c} f^{a}_{bc} \sum_{\mu} A^{\mu b} \left(\frac{d}{dx^{\mu}} A^{c}_{\nu} - \frac{d}{dx^{\nu}} A^{c}_{\mu} + g \sum_{d,e} f^{c}_{de} A^{d}_{\mu} A^{e}_{\nu} \right) = J^{a}_{\nu}$$

28. Einstein-Gleichung(en) der allgemeinen Relativitätstheorie

sehr stark abgekürzt: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

teilweise ausgeschrieben, aber immer noch ***stark*** abgekürzt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{\lambda,\beta} \left[\frac{dg^{\lambda\beta}}{dx^{\lambda}} \left(\frac{dg_{\nu\beta}}{dx^{\mu}} + \frac{dg_{\mu\beta}}{dx^{\nu}} - \frac{dg_{\mu\nu}}{dx^{\beta}} \right) - \frac{dg^{\lambda\beta}}{dx^{\nu}} \left(\frac{dg_{\lambda\beta}}{dx^{\mu}} + \frac{dg_{\mu\beta}}{dx^{\lambda}} - \frac{dg_{\mu\lambda}}{dx^{\beta}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\lambda,\alpha,\beta,\gamma} \left[g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} \left(\frac{dg_{\nu\beta}}{dx^{\mu}} + \frac{dg_{\mu\beta}}{dx^{\nu}} - \frac{dg_{\mu\nu}}{dx^{\beta}} \right) \left(\frac{dg_{\lambda\gamma}}{dx^{\alpha}} + \frac{dg_{\alpha\gamma}}{dx^{\lambda}} - \frac{dg_{\alpha\lambda}}{dx^{\gamma}} \right) \right. \\
&\quad \left. - g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} \left(\frac{dg_{\lambda\beta}}{dx^{\mu}} + \frac{dg_{\mu\beta}}{dx^{\lambda}} - \frac{dg_{\mu\lambda}}{dx^{\beta}} \right) \left(\frac{dg_{\nu\gamma}}{dx^{\alpha}} + \frac{dg_{\alpha\gamma}}{dx^{\nu}} - \frac{dg_{\alpha\nu}}{dx^{\gamma}} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \sum_{\delta,\varepsilon,\lambda,\beta} g^{\delta\varepsilon} \left[\frac{dg^{\lambda\beta}}{dx^{\lambda}} \left(\frac{dg_{\varepsilon\beta}}{dx^{\delta}} + \frac{dg_{\delta\beta}}{dx^{\varepsilon}} - \frac{dg_{\delta\varepsilon}}{dx^{\beta}} \right) - \frac{dg^{\lambda\beta}}{dx^{\varepsilon}} \left(\frac{dg_{\lambda\beta}}{dx^{\delta}} + \frac{dg_{\delta\beta}}{dx^{\lambda}} - \frac{dg_{\delta\lambda}}{dx^{\beta}} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{8} g_{\mu\nu} \sum_{\delta,\varepsilon,\lambda,\alpha,\beta,\gamma} g^{\delta\varepsilon} \left[g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} \left(\frac{dg_{\varepsilon\beta}}{dx^{\delta}} + \frac{dg_{\delta\beta}}{dx^{\varepsilon}} - \frac{dg_{\delta\varepsilon}}{dx^{\beta}} \right) \left(\frac{dg_{\lambda\gamma}}{dx^{\alpha}} + \frac{dg_{\alpha\gamma}}{dx^{\lambda}} - \frac{dg_{\alpha\lambda}}{dx^{\gamma}} \right) \right. \\
&\quad \left. - g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} \left(\frac{dg_{\lambda\beta}}{dx^{\delta}} + \frac{dg_{\delta\beta}}{dx^{\lambda}} - \frac{dg_{\delta\lambda}}{dx^{\beta}} \right) \left(\frac{dg_{\varepsilon\gamma}}{dx^{\alpha}} + \frac{dg_{\alpha\gamma}}{dx^{\varepsilon}} - \frac{dg_{\alpha\varepsilon}}{dx^{\gamma}} \right) \right] = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

29. zeitliche und räumliche Änderung der Konzentration eines Stoffes bei einer chemischen Reaktion, oder Ausbreitung einer Krankheit usw.