Die Eulersche Zahl

- Physik:
  - Gedämpfte harmonische Schwingung: Wirkt neben der rückstellenden Kraft F = –D x auch noch eine Reibungskraft F = –k v, dann gilt für die Position in Abhängigkeit der Zeit
  $$x(t) = e^{-kt/2m} \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}$$
  - Ladung Q auf einem Kondensator mit Kapazität C, der über einen Widerstand R mit einer Spannungsquelle U_0 verbunden wird, in Abhängigkeit von der Zeit t:
  $$Q(t) = U_0 C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$
  - Strom I durch eine Spule mit Induktivität L, die über einen Widerstand R mit einer Spannungsquelle U_0 verbunden wird, in Abhängigkeit von der Zeit t:
  $$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$
  - Die Höhe einer Kette (Seil, Schnur, …), die nur durch ihr eigenes Gewicht belastet durchhängt, kann beschrieben werden durch
  $$h(x) = h + \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-lx} - e^{ka} - e^{-ka}),$$
  wobei h die Höhe an den Rändern ist, $\pm a$ die x-Koordinaten der Aufhängpunkte sind und k eine Konstante ist, die nur von a und der Länge der Kette abhängt.

- Chemie:
  - Bei einer Reaktion erster Ordnung sind die Reaktionsgeschwindigkeit v und die Konzentration c proportional zueinander, $v = -k \cdot c$, und für den zeitlichen Verlauf der Konzentration gilt dann
  $$c(t) = c_0 \cdot e^{-kt}$$
  - Die Geschwindigkeitskonstante im Massenwirkungsgesetz hängt ihrerseits von der Temperatur ab:
  $$k = A \cdot e^{-E_a/RT}$$
  (A: Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Stoß zweier Moleküle eine Reaktion stattfindet; E_a: Aktivierungsenergie pro mol; R: allgemeine Gaskonstante; T: absolute Temperatur in Kelvin)
  - Die Orbitale von Atomen werden in der Quantenmechanik durch sogenannte Wellenfunktionen beschrieben; diese enthalten immer einen Faktor e^{-Zr/na_0}.
  (Z: Ordungszahl, r: Radius, n: Nummer der Elektronenschake; a_0: (Bohr'scher) Radius des Wasserstoffatoms)

- Wahrscheinlichkeitsrechnung:
  - Fakultät: n! = n·(n-1)·...·3·2·1 ➔ Stirling-Formel: $\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \lesssim n! \lesssim e \cdot \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
  - Poisson-Wahrscheinlichkeitsverteilung: P(n) = $\frac{\bar{n}^n \cdot e^{-\bar{n}}}{n!}$; Anwendung z. B.:
    Gibt ein Bäcker in den Teig für jedes Brötchen eine Rosine, so enthält nach dem Formen jedes e-te Brötchen (also ein Anteil von 1/e ≈ 37%) keine Rosine.
  - Gauß'sche Normalverteilung („Glockenkurve"): $P(x) \sim e^{-x^2}$
    (wobei $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ gilt); physikalische Anwendung z. B.:
    Wahrscheinlichkeit, in einem idealen Gas der Temperatur T ein Gasmolekül mit der Geschwindigkeit v zu finden:
    $$P \sim v^2 \cdot e^{-m\ ^2/2k_BT}$$
    (mit der Boltzmann-Konstante $k_B = R/N_A$)

- Zahlentheorie:
  - Für die Anzahl der „Partitionen'' einer natürlichen Zahl n (Anzahl der Möglichkeiten, sie als Summe zu schreiben) gilt in guter Näherung $P(n) \approx \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4\sqrt{3}n}$.
  - Die durchschnittliche Anzahl der Teiler aller Zahlen von 1 bis zu einer gegebenen natürlichen Zahl n ist für große n in sehr guter Näherung gegeben durch $\ln(n)$.
  - Die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als eine gegebene Zahl x sind, wird für große x gut angenähert durch den Term $\frac{x}{ln\,x}$; noch besser mit $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{ln\,t} dt$.(„Integrallogarithmus")

- Darstellungen von e:
  - e = $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
  - e = $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$

- e ist irrational (lässt sich nicht als Bruch darstellen; 1737 bewiesen von Euler) und sogar transzendent (lässt sich nicht als Lösung einer Polynomgleichung mit rationalen Zahlen darstellen; 1873 bewiesen vom französischen Mathematiker Charles Hermite)

- Reihendarstellungen der Funktionen:
  - exp(x) = e^x = $\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ („Exponentialreihe")
  - ln(1 + x) = $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

- Eulersche Identität:
  - $e^{ix} = cos(x) + i \cdot sin(x)$ mit $i^2 = -1$
  - speziell: $e^{i\pi} = -1$ bzw. $e^{i\pi} + 1 = 0$ ➔ ln(–1) = i π
    („schönste Formel der Mathematik")

- Ableitungen: exp'(x) = exp(x) und ln'(x) = $\frac{1}{x}$