Die Eulersche Zahl

- e ist irrational (lässt sich nicht als Bruch darstellen) und sogar transzendent (lässt sich nicht als Lösung einer Polynomgleichung mit rationalen Zahlen darstellen)

- Wahrscheinlichkeitsrechnung:
  - Fakultät: n! = n·(n-1)·...·3·2·1 ➔ Stirling-Formel: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$
  - Gauß'sche Normalverteilung („Glockenkurve"): $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
  - Poisson-Wahrscheinlichkeitsverteilung: $P(n) = \frac{\bar{n}^n \cdot e^{-\bar{n}}}{n!}$; Anwendung z. B.:
    Gibt ein Bäcker in den Teig für jedes Brötchen eine Rosine, so enthält nach dem Formen jedes e-te Brötchen (also ein Anteil von $1/e \approx 37\%$) keine Rosine.

- Darstellungen von e:
  - $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
  - $e = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$

- Reihendarstellungen der Funktionen:
  - $\exp(x) = e^x = \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ („Exponentialreihe")
  - $\ln(1 + x) = \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$

- Die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als eine gegebene Zahl x sind, wird für große x gut genähert durch den Term $\frac{x}{\ln x}$; noch besser durch $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$. („Integrallogarithmus")

- Eulersche Identität:
  - $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$ mit $i^2 = -1$
  - speziell: $e^{i\pi} = -1$ bzw. $e^{i\pi} + 1 = 0$ ➔ $\ln(-1) = i\pi$
    („schönste Formel der Mathematik")

- Ableitungen: $\exp'(x) = \exp(x)$ und $\ln'(x) = \frac{1}{x}$