Die Eulersche Zahl

- Physik:
  - Ladung Q auf einem Kondensator mit Kapazität C, der über einen Widerstand R mit einer Spannungsquelle U_0 verbunden wird, in Abhängigkeit von der Zeit t:
$$Q(t) = U_0 C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$
  - Strom I durch eine Spule mit Induktivität L, die über einen Widerstand R mit einer Spannungsquelle U_0 verbunden wird, in Abhängigkeit von der Zeit t:
$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

- Chemie:
  Abhängigkeit der Geschwindigkeitskonstanten im Massenwirkungsgesetz von der Temperatur:
$$k = A \cdot e^{-E_a/RT}$$
  (A: Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Stoß zweier Moleküle eine Reaktion stattfindet; E_a: Aktivierungsenergie pro mol; R: allgemeine Gaskonstante; T: absolute Temperatur in Kelvin)

- Wahrscheinlichkeitsrechnung:
  - Fakultät: n! = n·(n-1)·...·3·2·1 ➔ Stirling-Formel: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$
  - Poisson-Wahrscheinlichkeitsverteilung: $P(n) = \frac{\bar{n}^n \cdot e^{-\bar{n}}}{n!}$; Anwendung z. B.:
    Gibt ein Bäcker in den Teig für jedes Brötchen eine Rosine, so enthält nach dem Formen jedes e-te Brötchen (also ein Anteil von 1/e ≈ 37%) keine Rosine.
  - Gauß'sche Normalverteilung („Glockenkurve"): $P(x) \sim e^{-x^2}$
    (wobei $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ gilt); physikalische Anwendung z. B.:
    Wahrscheinlichkeit, in einem idealen Gas der Temperatur T ein Gasmolekül mit der Geschwindigkeit v zu finden:
$$P \sim v \cdot e^{-mv^2/2k_BT}$$
    (mit der Boltzmann-Konstante $k_B = R/N_A$)

- Zahlentheorie:
  - Für die Anzahl der „Partitionen" einer natürlichen Zahl n (Anzahl der Möglichkeiten, sie als Summe zu schreiben) gilt in guter Näherung $P(n) \approx \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4\sqrt{3}n}$.
  - Die durchschnittliche Anzahl der Teiler aller Zahlen von 1 bis zu einer gegebenen natürlichen Zahl n ist für große n in sehr guter Näherung gegeben durch $\ln(n)$.
  - Die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als eine gegebene Zahl x sind, wird für große x gut genähert durch den Term $\frac{x}{\ln x}$; noch besser durch $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$.(„Integrallogarithmus")

- Darstellungen von e:
  - $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
  - $e = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$

- e ist irrational (lässt sich nicht als Bruch darstellen; 1737 bewiesen von Euler) und sogar transzendent (lässt sich nicht als Lösung einer Polynomgleichung mit rationalen Zahlen darstellen; 1873 bewiesen vom französischen Mathematiker Charles Hermite)

- Reihendarstellungen der Funktionen:
  - $\exp(x) = e^x = \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ („Exponentialreihe")
  - $\ln(1 + x) = \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$

- Eulersche Identität:
  - $e^{ix} = \cos(x) + i\cdot\sin(x)$ mit $i^2 = -1$
  - speziell: $e^{i\pi} = -1$ bzw. $e^{i\pi} + 1 = 0$ ➔ $\ln(-1) = i\,\pi$
    („schönste Formel der Mathematik")

- Ableitungen: $\exp'(x) = \exp(x)$ und $\ln'(x) = \frac{1}{x}$