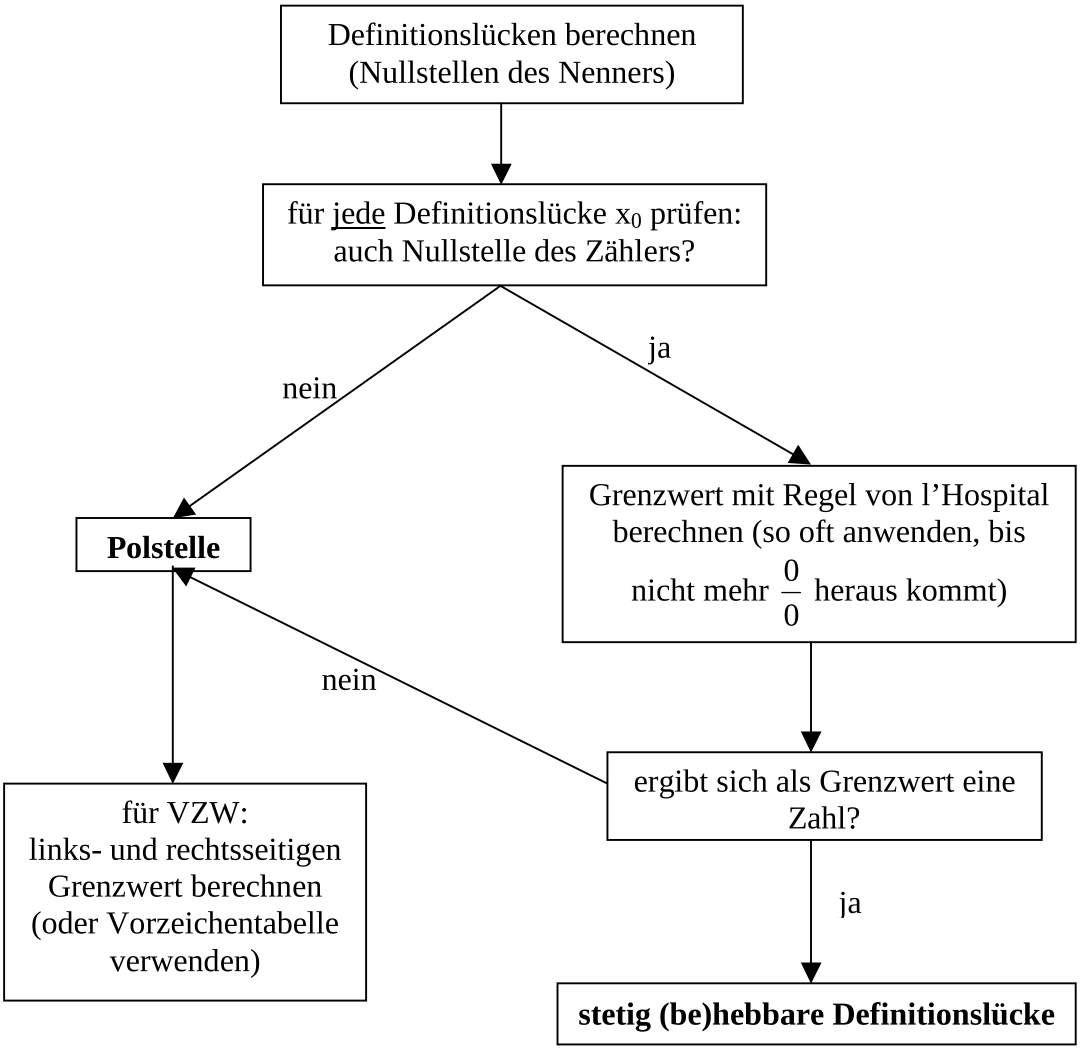
Definitionslücken bei beliebigen Quotientenfunktionen

(gebrochenrationale Funktionen, aber z. B. auch so etwas wie f(x) = $\frac{e^x - 1}{1 - \cos(x)}$)



Anmerkung: Die Ordnung n einer Polstelle ist allgemein folgendermaßen definiert: n ist die kleinste natürliche Zahl, sodass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \left((x - x_0)^n \cdot f(x)\right)$ existiert (also auch nicht $\pm\infty$ ist). Das liefert für gebrochenrationale Funktionen die üblichen Ergebnisse, klappt aber auch bei anderen Funktionen.

Weil man so die Ordnung aber meist nur relativ schwierig bestimmen kann, geht man stattdessen oft folgendermaßen vor:

1) Bilde so lange Ableitungen des Zählers, bis x_0 keine Nullstelle mehr ist; die nötige Anzahl sei z.
2) Bilde so lange Ableitungen des Nenners, bis x_0 keine Nullstelle mehr ist; die nötige Anzahl sei n.
3) Die Ordnung der Polstelle ist dann n – z. (ist $n \leq z$, so ist x_0 eine stetig behebbare Definitionslücke)

Beispiel: f(x) = $\frac{e^x - 1}{1 - \cos(x)}$; $\mathbb{D}_f$ =]-π;π[➔ einzige Definitionslücke: $x_0 = 0$

Zählerfunktion: u(x) = $e^x - 1$; Nennerfunktion: v(x) = 1 – cos(x)

Ableitungen: u'(x) = e^x; u''(x) = e^x; ......; v'(x) = sin(x); v''(x) = cos(x); ......

u(0) = 0; u'(0) = 1 ➔ z = 1; v(0) = 0; v'(0) = 0; v''(0) = 1 ➔ n = 2

Damit ergibt sich: $x_0 = 0$ ist eine Polstelle von der Ordnung 2 – 1 = 1.