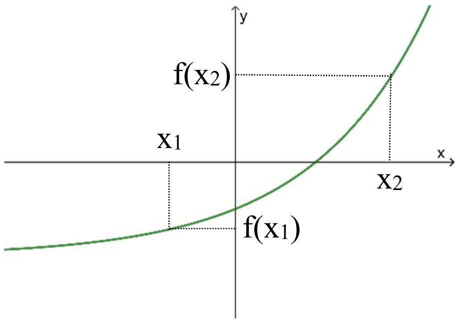
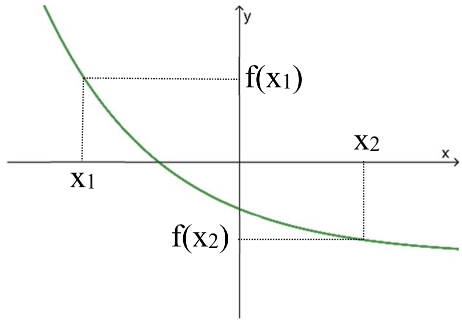
Definitionen und Sätze zur Kurvendiskussion

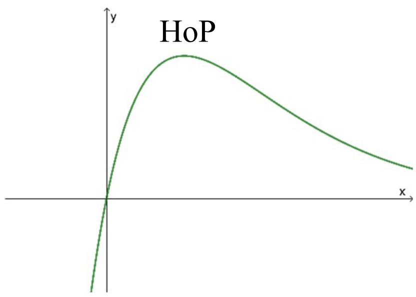
Definitionen 1: Gilt in einem Intervall [a;b] für alle x_1 und x_2 mit $x_2 > x_1$, dass $\begin{Bmatrix} f(x_2) > f(x_1) \\ f(x_2) < f(x_1) \end{Bmatrix}$ ist, so nennt man die Funktion f in [a;b] <u>streng monoton</u> $\begin{Bmatrix} \underline{\text{zunehmend}} \\ \underline{\text{abnehmend}} \end{Bmatrix}$ bzw. ihren Graph <u>streng monoton</u> $\begin{Bmatrix} \underline{\text{steigend}} \\ \underline{\text{fallend}} \end{Bmatrix}$. (Statt „streng‘‘ sagt man hier auch „echt‘‘.)

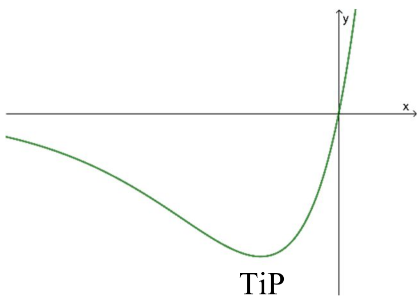


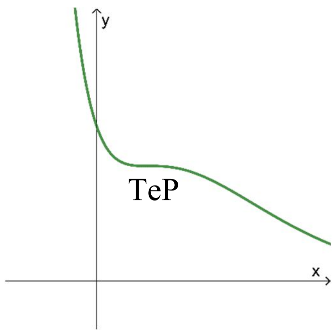


Satz 1: Ist f in [a;b] stetig und in]a;b[differenzierbar, so gilt *(FS S. 3! dort aber zu ungenau!)*
$\begin{Bmatrix} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{Bmatrix}$ in]a;b[➔ G_f ist streng monoton $\begin{Bmatrix} \text{steigend (sms)} \\ \text{fallend (smf)} \end{Bmatrix}$ in [a;b]

Definitionen 2: Eine Stelle x_0 heißt (eigentliche) <u>relative</u> $\begin{Bmatrix} \underline{\text{Maximalstelle}} \\ \underline{\text{Minimalstelle}} \end{Bmatrix}$ einer Funktion f, wenn für alle x in der „Nachbarschaft" von x_0 die Ungleichungen $\begin{Bmatrix} f(x_0) > f(x) \\ f(x_0) < f(x) \end{Bmatrix}$ gelten. Der zugehörige Funktionswert heißt dann <u>relatives</u> $\begin{Bmatrix} \underline{\text{Maximum}} \\ \underline{\text{Minimum}} \end{Bmatrix}$ (Mehrzahl: $\begin{Bmatrix} \text{Maxima} \\ \text{Minima} \end{Bmatrix}$), der Punkt $(x_0|f(x_0))$ heißt <u>relativer</u> $\begin{Bmatrix} \underline{\text{Hochpunkt HoP}} \\ \underline{\text{Tiefpunkt TiP}} \end{Bmatrix}$. Maximal- und Minimalstellen zusammen genommen nennt man <u>Extremalstellen</u>, den jeweils zugehörigen Funktionswert ein <u>Extremum</u> (Mehrzahl: Extrema), die zugehörigen Punkte <u>Extrempunkte</u> ExP. (Statt „relativ" sagt man hier auch „lokal".)) Eine Stelle, bei der $f'(x_0) = 0$ ist, obwohl sie keine Extremstelle ist, heißt <u>Terrassen-</u> (oder Sattel-)<u> stelle</u>, der Punkt entsprechend <u>Terrassen-</u> (oder Sattel-)Punkt TeP.



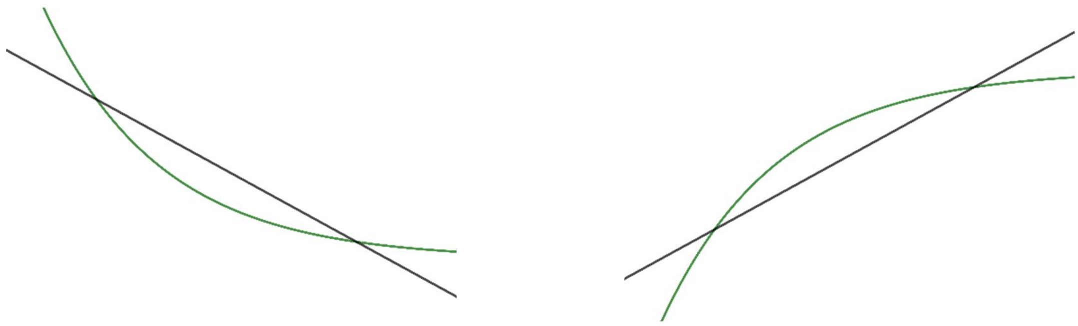




Satz 2: Ist $f'(x_0) = 0 \begin{Bmatrix} \text{mit} \\ \text{ohne} \end{Bmatrix}$ Vorzeichenwechsel (VZW), so ist bei x_0 ein $\begin{Bmatrix} \text{ExP} \\ \text{TeP} \end{Bmatrix}$ von G_f. Wechselt f' dort das VZ $\begin{Bmatrix} \text{von + nach –} \\ \text{von – nach +} \end{Bmatrix}$, so ist bei x_0 ein relativer $\begin{Bmatrix} \text{HoP} \\ \text{TiP} \end{Bmatrix}$ von G_f.

Satz 3: Ist x_0 eine Nullstelle von f' mit $\begin{Bmatrix} \text{ungerader} \\ \text{gerader} \end{Bmatrix}$ Vielfachheit, so ist bei x_0 ein $\begin{Bmatrix} \text{ExP} \\ \text{TeP} \end{Bmatrix}$ von G_f.

Definitionen 3: Liegen in einem Intervall [a;b] alle Sekanten des Graphen einer Funktion $\begin{Bmatrix} \text{über} \\ \text{unter} \end{Bmatrix}$ dem Graph, so heißt die Funktion $\begin{Bmatrix} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{Bmatrix}$; ihr Graph heißt dann $\begin{Bmatrix} \underline{\text{linksgekrümmt}} \\ \underline{\text{rechtsgekrümmt}} \end{Bmatrix}$.



Satz 4: Ist f in [a;b] stetig und in]a;b[zweimal differenzierbar, so gilt *(FS S. 3! dort aber zu ungenau)*
$\begin{Bmatrix} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{Bmatrix}$ in]a;b[➔ G_f ist $\begin{Bmatrix} \text{linksgekrümmt (konvex)} \\ \text{rechtsgekrümmt (konkav)} \end{Bmatrix}$ in [a;b]

Definition 4: Eine Stelle, an der die zweite Ableitung gleich Null ist, heißt Flachstelle, der entsprechende Punkt heißt Flachpunkt FlaP.

Definitionen 5: Eine (eigentliche) relative Extremstelle von f', also eine Stelle mit minimaler(m) / maximaler(m) Steigung (Gefälle), heißt <u>Wendestelle</u>, der entsprechende Punkt heißt <u>Wendepunkt</u>, die Tangente im Wendepunkt heißt <u>Wendetangente</u>. Ein Wendepunkt ist also ein Punkt, bei dem G_f von einer Links- zu einer Rechtskurve wechselt oder umgedreht.

Satz 5: Ist $f''(x_0) = 0$ mit VZW, so ist bei x_0 ein WeP von G_f.

Satz 6: Ist x_0 eine Nullstelle von f'' mit $\begin{Bmatrix} \text{ungerader} \\ \text{gerader} \end{Bmatrix}$ Vielfachheit, so ist bei x_0 $\begin{Bmatrix} \text{ein} \\ \text{kein} \end{Bmatrix}$ WeP von G_f.