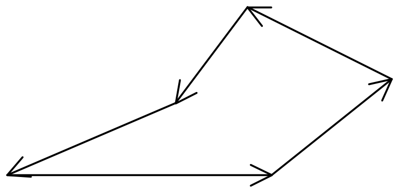
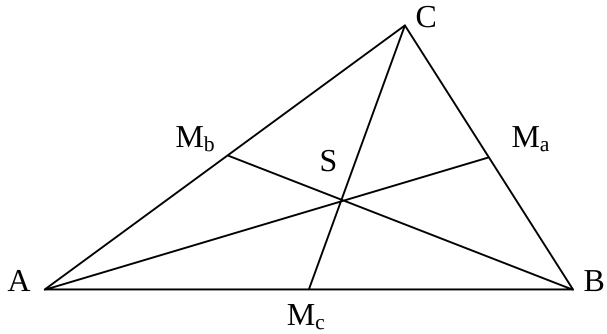
Das Verfahren der geschlossenen Vektorkette

Oft sind in einer Figur einige Teilverhältnisse bekannt, und ein anderes Teilverhältnis soll bestimmt werden. Für solche Probleme braucht man zunächst folgende

Definition:
Eine geschlossene Vektorkette besteht aus Vektoren, deren Summe der Nullvektor ist, die also aneinandergelegt wieder zum Anfangspunkt zurück führen.



Anwendungsbeispiel:
Zeigen Sie, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks im Verhältnis 2:1 schneiden.
Skizze:



Bekannt sind hier die Teilverhältnisse für die Mittelpunkte der Seiten (1:1); gesucht ist das Teilverhältnis für S.

Man stellt nun zunächst eine geschlossene Vektorkette auf, die durch S geht, z. B.

$$\overrightarrow{AM_c} + \overrightarrow{M_cS} + \overrightarrow{SA} = \vec{0}$$

Da S auf den Strecken $[AM_a]$ und $[CM_c]$ liegt, folgt:

$$\overrightarrow{AM_c} + \alpha\overrightarrow{M_cC} + \beta\overrightarrow{M_aA} = \vec{0}$$

mit noch unbekannten Zahlen α und β (*Vorsicht: dies sind noch nicht direkt die Teilverhältnisse!*)

Diese drei Vektoren lassen sich aber nun alle durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ausdrücken, die das Dreieck aufspannen; dabei werden die bekannten Teilverhältnisse benutzt:

$$\overrightarrow{AM_c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}; \qquad \overrightarrow{M_cC} = \overrightarrow{M_cA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{M_aA} = \ldots = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

alles in die geschlossene Vektorkette oben einsetzen:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \alpha\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \beta\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$$

Klammern auflösen, umsortieren, ausklammern:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Nach Voraussetzung (ABC ist ein Dreieck) sind $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ aber linear unabhängig – die Vorfaktoren müssen also gleich 0 sein: $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 0$ und $\alpha - \frac{\beta}{2} = 0$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösungen α = 1/3 und β = 2/3.

Es folgt: S teilt die Seitenhalbierenden s_a und s_c im Verhältnis 2:1. q. e. d.

Verfahren der geschlossenen Vektorkette:

1) Wähle eine geschlossene Vektorkette, die durch den Punkt geht, für den das Teilverhältnis gesucht ist.

2) Drücke die Vektoren in der Kette, die an diesem Punkt enden oder beginnen, als Vielfache der Vektoren (mit unbekannten Parametern) aus, die jeweils vom Anfangs- zum Endpunkt der jeweiligen Strecken gehen.

3) Drücke mit Hilfe der bekannten Teilverhältnisse alle Vektoren der Kette durch linear unabhängige Vektoren aus.

4) Nutze die lineare Unabhängigkeit dieser Vektoren, um ein lineares Gleichungssystem für α und β aufzustellen.

5) Löse das Gleichungssystem und folgere aus den Werten der Parameter die gesuchten Teilverhältnisse.