

Das Newton-Verfahren

Im Folgenden soll versucht werden, die Nullstelle der Funktion f mit dem Term

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

zu finden.

1) Begründen Sie, warum man die Gleichung $x^3 + x + 1 = 0$ mit keinem der bekannten Verfahren lösen kann.

2) Begründen Sie, dass f genau eine Nullstelle hat (*Tipp: Monotonie und Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$*).

3) Begründen Sie, dass diese Nullstelle zwischen -1 und 0 liegen muss.

4) Im Folgenden soll ein Näherungswert für die Nullstelle gefunden werden. Zeichnen Sie dafür zunächst G_f (x von $-1,5$ bis 1 , Schrittweite $0,5$, Maßstab entsprechend wählen!).

Der Graph zeigt, dass die Nullstelle näher an -1 liegt als an 0 . Als erste Näherung für die Nullstelle kann man also $x_1 = -1$ nehmen. Um eine bessere Näherung zu bekommen, benutzt man nun, dass der Graph einer Funktion in der Nähe einer Stelle x_1 ungefähr so verläuft wie die Tangente an den Graphen an dieser Stelle. Die Nullstelle der Tangente stimmt also ungefähr mit der Nullstelle von f überein.

Bitte wenden!

5) Skizzieren Sie die Tangente an den Graphen im Punkt $(-1|f(-1))$ in ihr obiges Schaubild. Ermitteln Sie anschließend ihre Gleichung, und berechnen Sie ihre Nullstelle. Diesen Wert nennen wir x_2 (Teilergebnis: $x_2 = -0,75$).

Nun hat man einen besseren Näherungswert für die Nullstelle von f – aber immer noch keinen exakten Wert. Jetzt kann man aber wieder genauso argumentieren wie eben: die Nullstelle der Tangente im Punkt $(-0,75|f(-0,75))$ stimmt ungefähr mit der Nullstelle von f überein.

6) Skizzieren Sie diese Tangente in ihr Schaubild. Ermitteln Sie anschließend ihre Gleichung, und berechnen Sie ihre Nullstelle (auf drei Dezimalen). Diesen Wert nennen wir x_3 (Teilergebnis: $x_3 \approx -0,686$).

7) Wie kann man fortfahren? Stellen Sie eine allgemeine Gleichung auf, wie man bei dieser Funktion aus einem Näherungswert x_n für die Nullstelle einen neuen, besseren Näherungswert x_{n+1} berechnen kann.

8) Stellen Sie eine allgemeine Gleichung auf, wie man dies bei einer beliebigen Funktion f durchführen kann.