Übungen zu / Anwendungen von Differenzialgleichungen

1.0 Für $y = C \cdot e^x$ gilt bekanntlich $y' = y$, für $y = C \cdot e^{-x}$ gilt $y' \neq y$, aber $y'' = y$. Dies verallgemeinern wir hier auf die nächste Ableitung, betrachten also die Differenzialgleichung

$$y''' = y.$$

1.1 Zeigen Sie, dass $y(x) = C \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-x/2}$ für alle $C \in \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.

1.2 Ermitteln Sie die spezielle Lösung mit y(0) = 1.

2.0 Fällt ein Körper der Masse m im Gravitationsfeld der Erde, so gilt für große Abstände r zum Mittelpunkt der Erde das Gravitationsgesetz F = $-G\frac{m\, m_E}{r^2}$ mit der Gravitationskonstante G und der Erdmasse m_E. Andererseits ist F = ma = m$\ddot{r}$, also folgt die Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$m\ddot{r} = -G\frac{m\, m_E}{r^2}.$$

Daraus kann man mit einem Standardtrick eine Differenzialgleichung 1. Ordnung machen: Beide Seiten mit $\dot{r}$ multiplizieren,

$$m\,\dot{r}\,\ddot{r} = -G\frac{m\, m_E}{r^2}\dot{r}$$

und dann beide Seiten mithilfe der Kettenregel jeweils als zeitliche Ableitungen schreiben,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,\dot{r}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(G\frac{m\, m_E}{r}\right).$$

Nach Integrieren folgt also

$$\frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 = G\frac{m\, m_E}{r} + C \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 - G\frac{m\, m_E}{r} = C. \quad (*)$$

Der erste Summand ist nun die kinetische Energie $\frac{1}{2}m\,v^2$, der zweite ist die potenzielle Energie im Gravitationsfeld. Insgesamt drückt die Gleichung schlicht die Energieerhaltung aus,

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{gesamt} = konstant.$$

2.1 Betrachten Sie nun den Spezialfall, dass die gesamte Energie gleich 0 ist, also auch C = 0. Außerdem ignorieren Sie noch die physikalischen Konstanten in (*). Dann erhalten Sie die Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{r} = \pm\frac{1}{\sqrt{r}}$$

mit r, t > 0. Da ein Körper betrachtet wird, der fällt, muss $\dot{r} < 0$ sein, also benötigen Sie das Minuszeichen in dieser Differenzialgleichung. Ermitteln Sie dafür die allgemeine Lösung.

2.2 Ermitteln Sie aus der Differenzialgleichung (*) für die Anfangsbedingungen r(0) = r_0, v(0) = 0 die Zeit t_c, die es dauert, bis der Körper bei r = 0 angekommen ist („Kollisionszeit''). Tipps: Berechnen Sie zunächst den Wert von C. Die Substitutionen $u = r/r_0$ und $z = \sqrt{\frac{u}{1-u}}$ sind dann hilfreich.

3 Der sogenannte Hubble-Parameter H beschreibt die Ausdehnung des Universums. (Genauer gilt für Galaxien im Abstand d von uns, dass sie sich mit der Geschwindigkeit $v = H \cdot d$ von uns entfernen.) H ändert sich mit der Zeit sowohl wegen der Gravitation der Massen im Universum als auch wegen der sogenannten dunklen Energie. Insgesamt gilt folgende Differenzialgleichung:

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}\left(H^2 - \frac{8\pi G\Lambda}{3}\right)$$

mit der Gravitationskonstante G und der sogenannten kosmologischen Konstante Λ, welche die Dichte der dunklen Energie angibt. Zur Vereinfachung kürzen wir den zweiten Term ab:

$$\dot{H} = -\tfrac{3}{2}(H^2 - H_\infty^2).$$

Lösen Sie diese Differenzialgleichung unter der Bedingung, dass $\lim_{t\to 0} H(t) = \infty$ gilt, d. h. am Anfang verlief die Ausdehnung des Universums unendlich schnell („Urknall‘‘).

1.1 $y'(x) = C \cdot \left[-\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2}\right]$

$y''(x) = C \cdot \left[-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2} - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2} + \right.$
$\left. \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right]$
$= C \cdot \left[-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}\right]$

$y'''(x) = C \cdot \left[\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2} + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \right.$
$\left. \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2}\right]$
$= C \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} = y(x)$

1.2 y(0) = $C \cdot \cos(0) \cdot e^0 = C$; y(0) = 1 ➔ C = 1 ➔ y(x) = $\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

2.1 $\dot{r} = -\frac{1}{\sqrt{r}}$ ➔ $\sqrt{r}dr = -dt$ ➔ $\int r^{1/2}\, dr = \int -1 dt$ ➔ $\frac{1}{3/2} r^{3/2} = -t + C$

➔ $r^{3/2} = \frac{3}{2}(-t + C)$ ➔ $r(t) = \left(\frac{3}{2}(C - t)\right)^{2/3}$

mit r(0) = r₀ ➔ $r_0 = \left(\frac{3}{2}C\right)^{2/3}$ ➔ $\frac{3}{2}C = r_0^{3/2}$ ➔ $r(t) = \left(r_0^{3/2} - \frac{3}{2}t\right)^{2/3}$

2.2 Die Gleichung (*) muss immer gelten, insbesondere für t = 0. Setzt man die Anfangsbedingungen ein, folgt: $C = -G\frac{m\, m_E}{r_9}$ und damit dann $\dot{r} = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r r_0}}$.

➔ $\sqrt{\frac{r r_0}{r_0 - r}} dr = -\sqrt{2GM}\, dt$ ➔ $\int \sqrt{\frac{u}{1-u}} du = -\int \sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}}\, dt$ mit $u = r/r_0$

$z = \sqrt{\frac{u}{1-u}}$ ➔ $z^2(1-u) = u$ ➔ $z^2 = u + ut^2$ ➔ $u = \frac{z^2}{1+z^2} = 1 - \frac{1}{1+z^2}$ ➔ $du = \frac{2z}{(1+z^2)^2} dz$

➔ $\int z \cdot \frac{2z}{(1+z^2)^2} dz = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}} t + D$ ➔ $z \cdot \frac{-1}{1+z^2} + \int \frac{1}{1+z^2} dz = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}} t + D$

➔ $-\frac{z}{1+z^2} + \arctan(z) = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}} t + D$ ➔ $-\frac{\sqrt{\frac{u}{1-u}}}{1+\frac{u}{1-u}} + \arctan\left(\sqrt{\frac{u}{1-u}}\right) = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}} t + D$

➔ $-\sqrt{u(1-u)} + \arctan\left(\sqrt{\frac{u}{1-u}}\right) = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}} t + D$

➔ $-\sqrt{\frac{r}{r_0}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} + \arctan\left(\sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}\right) = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}} t + D$

für t = 0: r = r₀ ➔ $\frac{\pi}{2} = D$ ➔ $-\sqrt{\frac{r}{r_0}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} + \arctan\left(\sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}\right) = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}} t + \frac{\pi}{2}$

für r = 0: $0 = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}} t + \frac{\pi}{2}$ ➔ $t_c = \pi\sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}}$

3 $\dot{H} = -\frac{3}{2}(H^2 - H_\infty^2)$

$H^2 - H_\infty^2 = 0$, also $H = \pm H_\infty$: $\dot{H} = 0$; einsetzen ➔ 0 = 0

$H \neq \pm H_\infty$: $-\frac{\dot{H}}{H^2 - H_\infty^2} = \frac{3}{2}$ ➔ $\frac{dH}{H_\infty^2 - H^2} = \frac{3}{2}dt$ ➔ $\int \frac{1}{H_\infty^2 - H^2} dH = \int \frac{3}{2} dt$

FS: $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ ➔ $\frac{1}{2H_\infty} \ln\left|\frac{H_\infty + H}{H_\infty - H}\right| = \frac{3}{2}t + C$ mit $C \in \mathbb{R}$

➔ $\ln\left|\frac{H_\infty + H}{H_\infty - H}\right| = 3H_\infty t + 2H_\infty C$ ➔ $\left|\frac{H_\infty + H}{H_\infty - H}\right| = e^{3H_\infty t} \cdot e^{2H_\infty C}$

➔ $\frac{H_\infty + H}{H_\infty - H} = \pm e^{2H_\infty C} \cdot e^{3H_\infty t} = D \cdot e^{3H_\infty t}$ mit $D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

triviale Lösung $H = -H_\infty$ entspricht D = 0 ➔ $\frac{H_\infty + H}{H_\infty - H} = D \cdot e^{3H_\infty t}$ mit $D \in \mathbb{R}$

➔ $H_\infty + H = D \cdot e^{3H_\infty t} \cdot H_\infty - D \cdot e^{3H_\infty t} \cdot H$

➔ $D \cdot e^{3H_\infty t} \cdot H + H = D \cdot e^{3H_\infty t} \cdot H_\infty - H_\infty$

➔ $(D \cdot e^{3H_\infty t} + 1) \cdot H = (D \cdot e^{3H_\infty t} - 1) \cdot H_\infty$

➔ $H(t) = \frac{D \cdot e^{3H_\infty t} - 1}{D \cdot e^{3H_\infty t} + 1} \cdot H_\infty$

$\lim_{t \to 0} H(t) = \frac{D-1}{D+1} \cdot H_\infty = \infty$ ➔ $D = -1$

➔ $H(t) = \frac{-e^{3H_\infty t} - 1}{-e^{3H_\infty t} + 1} \cdot H_\infty = \frac{e^{3H_\infty t} + 1}{e^{3H_\infty t} - 1} \cdot H_\infty$

(damit folgt dann auch: $\lim_{t \to \infty} H(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{1 + e^{-3H_\infty t}}{1 - e^{-3H_\infty t}} \cdot H_\infty = \frac{1+0}{1-0} \cdot H_\infty = H_\infty$, was die Abkürzung erklärt)

Aufgabe 2 mit v(0) = 0, r(0) = r_0: