<u>Das Determinantenverfahren</u>
(Cramersche Regel)

<u>Zunächst für (2x2)-LGS:</u>
Diese haben die allgemeine Form

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1$$
$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = c_2$$

mit reellen Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist dann also:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$$

Mit „Turbo-Gauß" wird daraus

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1b_2 - b_1a_2 & a_1c_2 - c_1a_2 \end{array}\right)$$

Also ergibt sich für x_2 die Gleichung

$$(a_1b_2 - b_1a_2)x_2 = a_1c_2 - c_1a_2,$$

das heißt

$$x_2 = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

Für x_1 ergibt sich also:

$$a_1 x_1 + b_1 \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2} = c_1.$$

Nach einigen Rechenschritten (gut, um Bruchrechnen zu üben!) ergibt sich daraus

$$x_1 = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}.$$

Der Nenner und die Zähler in diesen Brüchen ergeben sich aber gerade jeweils, wenn man in den Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

wie vom „Turbo-Gauß"-Verfahren bekannt „über Kreuz" multipliziert. Deswegen macht man folgende

<u>Definition:</u>
Unter der <u>Determinante</u> einer (2x2)-Matrix versteht man den Ausdruck

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1 a_2,$$

also das Produkt der „Hauptdiagonalen" (von links oben nach rechts unten) minus das Produkt der „Nebendiagonalen" (von rechts oben nach links unten).

Damit kann man die Lösungen eines (2x2)-LGS also folgendermaßen berechnen („<u>Cramersche Regel</u>"):

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \text{ und } x_2 = \frac{D_2}{D}$$

mit den Determinanten

$$D = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},\ D_1 = \det\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix},\ D_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Für die Determinanten D_1 bzw. D_2 in den Zählern muss man also in der Koeffizientenmatrix die erste bzw. die zweite Spalte durch die Konstanten der rechten Seite ersetzen.

Erweiterung auf (3x3)-LGS:
Hier gilt wieder ganz analog: Das LGS

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 &= d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= d_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

hat die Lösungen

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

mit den Determinanten

$$D = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ D_1 = \det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ D_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix},\ D_3 = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Wieder muss man also für die Determinanten D_1 bzw. D_2 bzw. D_3 in der Koeffizientenmatrix die jeweilige Spalte durch die Konstanten der rechten Seite ersetzen.

Die Determinante einer (3x3)-Matrix berechnet man dabei folgendermaßen:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3.$$

Das kann man sich auf zwei Arten merken:

1) „Entwicklung nach der ersten Zeile“ (Spezialfall des „Laplaceschen Entwicklungssatzes“)
   Man multipliziert die Zahlen der ersten Zeile, mit abwechselndem Vorzeichen, mit den Determinanten der (2x2)-Matrizen, die übrig bleiben, wenn man in der (3x3)-Matrix die erste Zeile und die jeweils zugehörige Spalte weglässt:
   $$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \det\begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - b_1 \cdot \det\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$
   (stattdessen kann man übrigens auch nach einer anderen Zeile oder einer Spalte entwickeln)
2) „Regel von Sarrus“: man schreibt neben den Zahlen der Koeffizientenmatrix die ersten beiden Spalten noch mal hin, also
   $$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{matrix}$$
   Dann rechnet man, wie von (2x2)-Matrizen bekannt, „Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen“ (also die Produkte aus allen Diagonalen von links oben nach rechts unten, minus die Produkte aus allen Diagonalen von rechts oben nach links unten).

Abschließende Anmerkungen:

1) Die Cramersche Regel gilt für beliebig große quadratische lineare Gleichungssysteme.
2) Für die Determinanten, die man dann für größere Matrizen berechnen muss, kann der Laplacesche Entwicklungssatz (entsprechend erweitert) benutzt werden; die Regel von Sarrus funktioniert dagegen nur bei (3x3)-Matrizen.
3) Für das Rechnen „per Hand“ eignet sich die Cramersche Regel schlecht (das Berechnen von Determinanten ist ziemlich zeitaufwendig), aber
   a. Mit dem Computer ist dieses Verfahren recht brauchbar (z. B. kann man in Microsoft Excel mit dem Befehl „MDET“ Determinanten berechnen).
   b. Man kann schnell überprüfen, ob ein LGS überhaupt eine Lösung hat: Ist $D = 0$, so hat das LGS entweder unendlich viele Lösungen (wenn auch alle anderen $D_i = 0$ sind), oder keine Lösung (sobald ein D_i ungleich 0 ist).
4) Richtig wichtig werden Determinanten erst bei sogenannten „Eigenwertproblemen“.