zu lösende Gleichung: $\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$

Diskriminante: $D = (2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3$

D = 0: 1 dreifache Lösung, wenn $2b^3 - 9abc + 27a^2d = 0$ und $b^2 - 3ac = 0$: $\boxed{x_{1,2,3} = -\frac{b}{3a}}$

1 doppelte und 1 einfache Lösung sonst:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3 - 9abc + 27a^2d)}}{3a}} \qquad \boxed{x_3 = \frac{-b - 2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3 - 9abc + 27a^2d)}}{3a}}$$

D > 0: 1 einfache Lösung:

$$x_1 = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d + \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2b^3 - 9abc + 27a^2d - \sqrt{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3}\right)}}{3a} - \frac{b}{3a}$$

D < 0: 3 einfache Lösungen:

$$\boxed{x_1 = \frac{2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot cos^{-1}\left(-\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{2\sqrt{(b^2 - 3ac)^3}}\right)\right) - \frac{b}{3a}}$$

$$\boxed{x_{2,3} = \frac{2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \cdot cos\left(\frac{1}{3} \cdot cos^{-1}\left(-\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{2\sqrt{(b^2 - 3ac)^3}}\right) \pm \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}}$$

Herleitung:
1) Kubische Ergänzung und „Wendepunktform“

Ähnlich, wie man bei quadratischen Funktionen eine quadratische Ergänzung machen kann, um sie in Scheitelform zu bringen (woraus man dann die Mitternachtsformel herleitet!), kann man bei kubischen Funktionen eine „kubische Ergänzung“ machen. Dafür benutzt man die binomische Formel

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Wie bei quadratischen Funktionen klammert man aus dem Funktionsterm erst mal a aus:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\,(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a})$$

Damit man die binomische Formel anwenden kann, muss also $A = x$ sein und $3A^2B = \frac{b}{a}x^2$, also $B = \frac{b}{3a}$. Dann ist $3AB^2 + B^3 = 3x\cdot\left(\frac{b}{3a}\right)^2 + \left(\frac{b}{3a}\right)^3$.

Diese beiden Terme werden, ähnlich wie bei der quadratischen Ergänzung, addiert und subtrahiert, außerdem wird der zweite Summand umgeschrieben:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\,(x^3 + 3x^2\cdot\frac{b}{3a} + 3x\cdot\left(\frac{b}{3a}\right)^2 + \left(\frac{b}{3a}\right)^3 \frac{c}{a}x - 3x\cdot\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - \left(\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a})$$

Jetzt kann man die binomische Formel von oben (rückwärts) anwenden:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\,(\,(x + \frac{b}{3a})^3 - 3x\cdot\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - \left(\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a})$$

Nach auflösen von Klammern und zusammenfassen bleibt

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\,(x + \frac{b}{3a})^3 + (c - \frac{b^2}{3a})\,x - \frac{b^3}{27a^2} + d$$

Im zweiten Summanden sollte man nun noch statt x auch $x + \frac{b}{3a}$ stehen haben, also wird auch hier wieder ergänzt:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\,(x + \frac{b}{3a})^3 + (c - \frac{b^2}{3a})\,x \;+ (c - \frac{b^2}{3a})\cdot\frac{b}{3a} - (c - \frac{b^2}{3a})\cdot\frac{b}{3a} - \frac{b^3}{27a^2} + d$$

Nach zusammenfassen bleibt nun

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\,(x + \frac{b}{3a})^3 + (c - \frac{b^2}{3a^2})\,(x + \frac{b}{3a}) \;- \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d$$

Nun führen wir noch Abkürzungen ein: $x_W = -\frac{b}{3a}$, $y_W = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$ und $m_W = c - \frac{b^2}{3a}$; damit erhalten wir:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\,(x - x_W)^3 + m_W\,(x - x_W) + y_W$$

Dies sieht nun tatsächlich so ähnlich (allerdings ein “wenig” komplizierter...) aus wie die Scheitelform bei quadratischen Funktionen. Man könnte dies die „Wendepunktform kubischer Funktionen“ nennen, denn x_W und y_W sind die Koordinaten des Wendepunkts (und m_W ist die Steigung im Wendepunkt). *(Wendepunkte werden später noch genauer besprochen!)* Aus dieser Form kann man übrigens auch ablesen, dass jeder Graph einer kubischen Funktion zu seinem Wendepunkt punktsymmetrisch ist.

Definiert man abkürzend $z = x - x_W$, so wird die Gleichung zu $a\,z^3 + m_W\,z + y_W = 0$. Abschließend teilen wir durch a und definieren noch abkürzend $p = m_W/a$ und $q = y_W/a$; dann bleibt die Gleichung

$$z^3 + pz + q = 0.$$

Dies nennt man die reduzierte Form der kubischen Gleichung. Sie sieht der Normalform der quadratischen Gleichung, die man für die Herleitung der p-q-Formel benutzt, sehr ähnlich!

2) Quadratische Resolvente und Diskriminante

Wir haben nun also die Gleichung $z^3 + pz + q = 0$ zu lösen. Wir setzen an, dass $z = u + v$ ist, mit unbekannten Werten u und v:

$$(u + v)^3 + p\,(u + v) + q = 0$$

(vgl. https://www.youtube.com/watch?v=N-KXStupwsc ab 20:45!) Klammer auflösen mit der binomischen Formel von oben:

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p\,(u + v) + q = 0$$

etwas umordnen:

$$u^3 + v^3 + q + 3uv\,(u + v) + p\,(u + v) = 0$$

und wieder $z = u + v$ einsetzen :

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)\,z = 0$$

Man erhält also eine Lösung für die Gleichung, wenn gilt :

$$u^3 + v^3 = -q \;\; \text{(I)} \quad \text{und} \quad 3uv = -p \;\; \text{(II)}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $v^3 = -\frac{1}{u^3}\left(\frac{p}{3}\right)^3$. Setze dies in die erste Gleichung ein:

$$u^3 - \frac{1}{u^3}\left(\frac{p}{3}\right)^3 = -q$$

Nach umformen bleibt

$$u^6 + q\,u^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Substituiere nun $t = u^3$; es bleibt

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Dies nennt man die quadratische Resolvente der kubischen Gleichung. Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{y_W}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m_W}{3a}\right)^3 = \left(\frac{\frac{2b^3}{27\;{}^2} - \frac{bc}{3a} + d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c - \frac{b^2}{3a}}{3a}\right)^3 = \left(\frac{2b^3}{54\;{}^3} - \frac{bc}{6a^2} + \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{54\;{}^3}\right)^2 + \left(-\frac{b^2 - 3ac}{9a^2}\right)^3 = \frac{1}{(54a^3)^2}(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - \frac{1}{(9a^2)^3}(b^2 - 3ac)^3 = \frac{(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 - 4(b^2 - 3ac)^3}{2916\;{}^6}$$

Den Zähler kürzen wir nun mit D ab; offensichtlich ist $D = 0$ genau dann, wenn der Bruch (also die Diskriminante der quadratischen Resolvente) = 0 ist.

3) Lösungen der Gleichung

Nun unterscheiden wir die üblichen drei Fälle für die Diskriminante.

D = 0: Dann ist einfach $t_{1,2} = -\frac{q}{2}$, also $u = \sqrt[3]{t} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ (Streng genommen müssten wir hier noch den Fall q > 0 extra behandeln, da unter einer Wurzel eigentlich nichts negatives stehen darf; bei einer dritten Wurzel kann man da aber auch mal ein Auge zudrücken, es funktioniert!). Eingesetzt in Gleichung (II) hat man dann

$$3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\cdot v = -p,$$

also $v = \frac{-p/3}{\sqrt[3]{-q/2}}$. Das kann man aber noch vereinfachen: Aus D = 0 folgt auch $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Da der erste Summand sicher positiv ist, folgt, dass der zweite negativ sein muss, d. h. p ist negativ. Es folgt $\frac{q}{2} = \pm\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \pm\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3$, also $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \mp\sqrt{-\frac{p}{3}}$ und damit $v = \mp\frac{-p/3}{\sqrt{-\frac{p}{3}}} = \mp\sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = u$.

Eine Lösung der reduzierten Gleichung ist also $z_1 = u + v = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = 2\sqrt[3]{-\frac{y_W}{2a}} = 2\sqrt[3]{-\frac{1}{2a}\left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)} = -2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2\cdot 27a^3}(2b^3 - 9abc + 27a^2d)}$

$= -\frac{2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3-9abc+27a^2d)}}{3a}$, und damit hat man schließlich für die ursprüngliche Gleichung

$$x_1 = z_1 + x_W = -\frac{2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3-9abc+27a^2d)}}{3a} - \frac{b}{3a} = \frac{-b-2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3-9abc+27a^2d)}}{3a}$$

Man könnte nun denken, das wäre die einzige Lösung. Allerdings hat die Gleichung $u^3 = t$ entgegen dem, was man in der Schule lernt, nicht nur die Lösung $u = \sqrt[3]{t}$, sondern noch zwei weitere „komplexe" Lösungen, sodass man noch zwei weitere Lösungen für z erhält. Da wir keine komplexen Zahlen kennen, machen wir mit bekannten Methoden weiter: Der Polynomdivision. Eine Lösung der reduzierten Gleichung kennen wir ja schon, also rechnen wir:

$(z^3 + pz + q) : (z - z_1) = (z^3 + 0\,z^2 - 3\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2}\,z + q) : (z - 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}) = \ldots\ldots\ldots = z^2 + 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\,z + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2} = (z + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}})^2$

Aus $(z + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}})^2 = 0$ folgt dann sofort noch eine doppelte Lösung $z_{2,3} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ und damit $x_{2,3} = \frac{-b+\sqrt[3]{\frac{1}{2}(2b^3-9abc+27a^2d)}}{3a}$

Insbesondere, wenn $2b^3 - 9abc + 27a^2d = 0$ ist (woraus wegen D = 0 dann auch $b^2 - 3ac = 0$ folgt), fallen alle drei Lösungen zusammen: $x_{1,2,3} = -\frac{b}{3a}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $y_W = 0$ ist und gleichzeitig $m_W = 0$. Der Wendepunkt liegt also auf der x-Achse, und der Graph hat dort eine waagrechte Tangente – es handelt sich also um einen Terrassenpunkt auf der x-Achse. Also ergibt sich eine dreifache Nullstelle – passt.

D > 0:
Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind dann

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{y_W}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{54a^3} = -\left(\frac{2b^3}{54a^3} - \frac{bc}{6a^2} + \frac{d}{2a}\right) \pm \frac{\sqrt{D}}{54a^3} = -\frac{1}{2}\,\frac{2b^3-9abc+27a^2d \mp \sqrt{D}}{27a^3}$$

Die Rücksubstitution ergibt:

$$u_1 = \sqrt[3]{t_1} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{D}}{27a^3}} = -\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{D}\right)}}{3a}$$

$$u_2 = \sqrt[3]{t_2} = -\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2b^3-9abc+27a^2d-\sqrt{D}\right)}}{3a}$$

(Und eigentlich gibt es auch hier erst mal noch zusätzlich zwei komplexe Lösungen…) Genauso gut hätte man Gleichung (II) aber auch nach u auflösen und dies dann in Gleichung (I) einsetzen können. Dies führt auf

$$v^6 + q\, v^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

also genau dieselbe Gleichung wie für u. Damit haben wir also auch

$$v_1 = -\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{D}\right)}}{3a} \quad \text{und} \quad v_2 = -\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2b^3-9abc+27a^2d-\sqrt{D}\right)}}{3a}$$

Nun muss „nur“ noch entschieden werden, welche Kombination(en) von u_1, u_2, v_1 und v_2 die ursprüngliche Gleichung lösen. Dies entscheidet man am Einfachsten mit der Gleichung (II). Beispielsweise ist (mit der 3. binomischen Formel)

$$3\, u_1\, v_2 = 3\,\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{D}\right)}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2b^3-9abc+27\ {}^2d-\sqrt{D}\right)}}{9a^2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(\left(2b^3-9abc+27a^2d\right)^2-D\right)}}{3a^2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(4\left(b^2-3ac\right)^3\right)}}{3a^2} = \frac{b^2-3ac}{3a^2} = -\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right) = -\frac{m_W}{a} = -p,$$

also erfüllen u_1 und v_2 die Gleichung (II), also ist $z = u_1 + v_2$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung; dies ist natürlich identisch zu $u_2 + v_1$. Man kann auch noch zeigen (z. B. wieder mit Polynomdivision; viel Spaß!), dass dies die einzige Lösung der reduzierten Gleichung ist; die beiden komplexen Lösungen für u ergeben keine Lösungen für z. Auch mit $u_1 + v_1$ und $u_2 + v_2$ erhält man keine Lösung.

Also ist $x_1 = z + x_W = u_1 + v_2 + x_W = -\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2b^3-9abc+27a^2d+\sqrt{D}\right)}}{3a} - \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(2b^3-9abc+27a^2d-\sqrt{D}\right)}}{3a} - \frac{b}{3a}$ die einzige (reelle) Lösung.

$D < 0$:

Prinzipiell könnte man diesen Fall genauso lösen wie den Fall $D > 0$ – allerdings müsste man dafür dann Wurzeln aus einer negativen Zahl ziehen. Das klappt nur, wenn man komplexe Zahlen benutzt (deshalb heißt dieser Fall auch "casus irreducibilis", d. h. "nicht-auflösbarer Fall"), aber mit einigen zusätzlichen Tricks geht es auch mit rein reellen Zahlen. Dafür benutzen wir, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha+\alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha) && \text{(Additionstheorem)}\\
&= (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin(\alpha) && \text{(Additionstheoreme)}\\
&= (2\cos^2(\alpha) - 1)\cos(\alpha) - 2(1-\cos^2(\alpha))\cos(\alpha) && \text{(trigonometrischer Pythagoras)}\\
&= 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha),
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\cos^3(\alpha) = \frac{1}{4}\cos(3\alpha) + \frac{3}{4}\cos(\alpha).$$

Nun machen wir den Ansatz $z = Z\cos(\alpha)$. Eingesetzt in die reduzierte Form der Gleichung ergibt dies

$$Z^3\cos^3(\alpha) + p\,Z\cos(\alpha) + q = 0,$$

also mit der obigen Formel

$$\frac{Z^3}{4}\cos(3\alpha) + \frac{3Z^3}{4}\cos(\alpha) + p\,Z\cos(\alpha) + q = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$\frac{Z^3}{4}\cos(3\alpha) + q = 0 \quad \text{und} \quad \frac{3Z^3}{4} + p\,Z = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort

$$Z = \pm 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

(Aus $D < 0$, also $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, folgt sofort $\left(\frac{-p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2 \geq 0$, also $\frac{-p}{3} \geq 0$, also kann man die Wurzel ziehen.)

Eingesetzt in die erste Gleichung erhalten wir

$$\pm 2\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}\cos(3\alpha) + q = 0,$$

also

$$\cos(3\alpha) = \mp\frac{q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}$$

Betrachten wir nun erst mal den Fall $Z < 0$, woraus $\cos(3\alpha) = +\frac{q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}$ folgt. Dies hat die Lösungen

$$\alpha_{1,k} = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}\right) + k\cdot\frac{2\pi}{3} \quad \text{und} \quad \alpha_{2,k} = -\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}\right) + k\cdot\frac{2\pi}{3},$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl ist. Für z benötigen wir aber nur $\cos(\alpha)$. Aus $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ folgt, dass jeweils $\cos(\alpha_{2,-k}) = \cos(\alpha_{1,k})$ ist; es genügt also, wenn wir uns auf die Lösungen $\alpha_{1,k}$ beschränken. Ebenso folgt im Fall $Z > 0$, dass wir von den Lösungen

$$\alpha'_{1,k} = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{-q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}\right) + k\cdot\frac{2\pi}{3} \quad \text{und} \quad \alpha'_{2,k} = -\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{-q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}\right) + k\cdot\frac{2\pi}{3},$$

nur die Lösungen $\alpha'_{1,k}$ brauchen. Diese können wir mit $\cos^{-1}(-\alpha) = \pi - \cos^{-1}(\alpha)$ umschreiben zu

$$\alpha'_{1,k} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}\right) + k\cdot\frac{2\pi}{3},$$

woraus wiederum

$$\alpha'_{1,-k+1} = \pi - \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}\right) + k\cdot\frac{2\pi}{3}$$

folgt. Mit $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ ergibt sich deshalb

$$\cos(\alpha'_{1,-k+1}) = -\cos(\alpha_k).$$

Daraus folgt: Aus z = Z cos(α) mit Z < 0 erhält man genau dieselben Lösungen wie aus z = Z cos(α') mit Z > 0 – also genügt es, wenn wir uns auf einen der beiden Fälle beschränken; nehmen wir zunächst den zweiten. In diesem berücksichtigen wir nun noch die Periodizität der Kosinus; deswegen brauchen wir nur drei der unendlich vielen Lösungen mitzunehmen, zum Beispiel

$$\alpha'_{1,0} = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{-q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}\right) \quad \text{und} \quad \alpha'_{1,1} = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{-q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}\right) + k\cdot\frac{2\pi}{3} \quad \text{und} \quad \alpha'_{1,-1} = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{-q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}\right) - k\cdot\frac{2\pi}{3}$$

Damit haben wir die drei Lösungen

$$z_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{-q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}\right)\right) \quad \text{und} \quad z_{2,3} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{-q/2}{\sqrt{(-p/3)^3}}\right) \pm \frac{2\pi}{3}\right).$$

Setzen wir nun für p und q ein, zunächst mal nur in z_1:

$$z_1 = 2\sqrt{\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a}}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2a}\left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)}{\sqrt{\left(\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a}\right)^3}}\right)\right) = \frac{2\sqrt{b^2-3ac}}{3|a|}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2\cdot 27a^3}(2b^3-9abc+27a^2d)}{\frac{1}{27|a|^3}\sqrt{(b^2-3ac)^3}}\right)\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{b^2-3ac}}{3|a|}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(-sgn(a)\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{2\sqrt{(b^2-3ac)^3}}\right)\right).$$

und entsprechend für $z_{2,3}$. Im ersten Fall (Z < 0) erhalten wir dagegen

$$z_1 = -\frac{2\sqrt{b^2-3ac}}{3|a|}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(sgn(a)\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{2\sqrt{(b^2-3ac)^3}}\right)\right).$$

und entsprechend für $z_{2,3}$. Da man in beiden Fällen (Z < 0 oder Z > 0) dieselben Lösungen erhält (siehe oben), ist es egal, welche der beiden Formeln man verwendet. Nehmen wir für a > 0 die erste und für a < 0 die zweite, so bleibt in beiden Fällen

$$z_1 = \frac{2\sqrt{b^2-3ac}}{3a}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(-\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{2\sqrt{(b^2-3ac)^3}}\right)\right)$$

und entsprechend für $z_{2,3}$ übrig. Mit $x = z + x_W$ erhalten wir dann schließlich die angegebenen Ergebnisse.

4) Quartische Ergänzung: Weil's so schön war, machen wir gleich weiter mit Gleichungen der Form $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

Zunächst teilen wir die Gleichung durch a, haben also

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

zu lösen. Falls b = d = 0 ist (biquadratische Gleichung), kann man dies mit der Substitution $u = x^2$ leicht lösen; im Folgenden kümmern wir uns um die komplizierteren Fälle. Bei Funktionen vierten Grades kann man ganz entsprechend zu den quadratischen und den kubischen Funktionen eine „quartische Ergänzung" machen. Dafür benutzt man die binomische Formel

$$(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 \text{ bzw. entsprechend für } (A - B)^4.$$

Bei den kubischen Funktionen hatten wir $z = x - x_W = x + \frac{b}{3a}$ gesetzt, bei den quadratischen Funktionen haben wir in der Scheitelform $x - x_S = x + \frac{b}{2a}$.

Entsprechend setzen wir hier nun $z = x + \frac{b}{4a}$, also $x = z - \frac{b}{4a}$:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = \left(z - \frac{b}{4a}\right)^4 + \frac{b}{a}\left(z - \frac{b}{4a}\right)^3 + \frac{c}{a}\left(z - \frac{b}{4a}\right)^2 + \frac{d}{a}\left(z - \frac{b}{4a}\right) + \frac{e}{a}.$$

Binomische Formeln anwenden:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}$$

$$= \left(z^4 - 4\frac{b}{4a}z^3 + 6\left(\frac{b}{4a}\right)^2 z^2 - 4\left(\frac{b}{4a}\right)^3 z + \left(\frac{b}{4a}\right)^4\right) + \frac{b}{a}\left(z^3 - 3\frac{b}{4a}z^2 + 3\left(\frac{b}{4a}\right)^2 z - \left(\frac{b}{4a}\right)^3\right) + \frac{c}{a}\left(z^2 - 2\frac{b}{4a}z + \left(\frac{b}{4a}\right)^2\right) + \frac{d}{a}\left(z - \frac{b}{4a}\right) + \frac{e}{a}.$$

Klammern auflösen und zusammenfassen:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}$$

$$= z^4 - \frac{b}{a}z^3 + \frac{3b^2}{8a^2}z^2 - \frac{b^3}{16a^3}z + \frac{b^4}{256a^4} + \frac{b}{a}z^3 - \frac{3b^2}{4a^2}z^2 + \frac{3b^3}{16a^3}z - \frac{b^4}{64\;{}^4} + \frac{c}{a}z^2 - \frac{bc}{2a^2}z + \frac{b^2c}{16a^3} + \frac{d}{a}z - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}$$

$$= z^4 + \left(-\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{c}{a}\right)z^2 + \left(\frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}\right)z - \frac{3b^4}{256a^4} + \frac{b^2c}{16\;{}^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}.$$

Hier verschwindet also der Summand mit der dritten Potenz, völlig analog zu den quadratischen und den kubischen Funktionen, wo auch jeweils der Summand mit der um eins niedrigeren Potenz verschwunden ist.

Die beiden Ausdrücke in den Klammern und die konstanten Summanden hinten werden wieder passend abgekürzt; dann bleibt die Gleichung

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0.$$

Dies nennt man die reduzierte Form der quartischen Gleichung. Sie sieht wieder den Normalformen der kubischen und quadratischen Gleichungen ähnlich.

Falls nun q = 0 ist (das ist *nicht* nur der Fall für b = d = 0, sondern nun gibt es auch noch mehr Möglichkeiten!), kann man diese Gleichung mittels der Substitution $u = z^2$ lösen. Falls nicht, muss man nochmals weit komplizierter rechnen…

5) Kubische Resolvente

siehe auch https://www.youtube.com/watch?v=N-KXStupwsc ab 35:25
Die Idee ist nun zunächst, $z^4 + pz^2 + qz + r$ als Differenz zweier quadratischer Terme zu schreiben,

$$z^4 + pz^2 + qz + r = (\ldots)^2 - (\ldots)^2,$$

denn dann kann man ja die dritte binomische Formel anwenden, um gesamten Term in ein Produkt umzuschreiben (und hat dann wegen des Satzes vom Nullprodukt zwei einfachere Gleichungen).

Naheliegend wäre ein Ansatz folgender Art:

$$z^4 + pz^2 + qz + r = (z^2 + \tfrac{p}{2})^2 - (\alpha z + \beta)^2,$$

denn löst man die vordere Klammer mit der ersten binomischen Formel auf, so erhält man schon mal das z^4 und das pz^2, und aus der zweiten Klammer erhält man einen linearen und einen konstanten Summanden, wie wir es brauchen:

$$z^4 + pz^2 + qz + r = z^4 + pz^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - (\alpha^2 z^2 + \alpha\beta z + \beta^2)$$

Hier sieht man nun aber nun, dass es so „einfach‘‘ nicht funktioniert: aus dem zweiten quadratischen Term erhalten wir auch noch einen zusätzlichen Summanden mit z^2! Damit wir diesen wieder loswerden können, müssen wir auch aus dem *ersten* quadratischen Term einen Summanden mit z^2 erhalten, der sich eben mit dem Summanden aus dem zweiten Term dann wegheben muss. Deshalb setzen wir an:

$$z^4 + pz^2 + qz + r = (z^2 + \tfrac{p}{2} + \alpha)^2 - (\beta z + \gamma)^2. \quad (*)$$

Kurz zurück dazu, warum wir das eigentlich so machen. Mit der dritten binomischen Formel bedeutet dies:

$$z^4 + pz^2 + qz + r = (z^2 + \tfrac{p}{2} + \alpha + \beta z - \gamma)\,(z^2 + \tfrac{p}{2} + \alpha - \beta z + \gamma) = 0.$$

Daraus folgt mit dem Satz vom Nullprodukt:

$$z^2 + \beta z + \tfrac{p}{2} + \alpha - \gamma = 0 \quad \text{oder} \quad z^2 - \beta z + \tfrac{p}{2} + \alpha + \gamma = 0. \quad (**)$$

Wenn wir α, β, γ berechnet haben, dann haben wir also nur noch diese beiden quadratischen Gleichungen zu lösen. Damit haben wir dann z und daraus dann sofort $x = z - \frac{b}{4a}$.

Es bleibt noch, die Werte von α, β, γ aus (*) zu bestimmen. Lösen wir die Klammern auf und fassen zusammen:

$$z^4 + pz^2 + qz + r = z^4 + pz^2 + 2\alpha z^2 + \left(\frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - (\beta^2 z^2 + 2\beta\gamma z + \gamma^2)$$

$$= z^4 + pz^2 + (2\alpha - \beta^2)z^2 + 2\beta\gamma z + \left(\frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \gamma^2$$

Damit beide Seiten für alle Werte von z gleich sind, müssen also folgende drei Gleichungen gelten:

$$2\alpha - \beta^2 = 0 \quad \text{I}; \qquad 2\beta\gamma = q \quad \text{II}; \qquad \left(\frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \gamma^2 = r \quad \text{III}$$

Dieses Gleichungssystem muss nun noch gelöst werden. Die erste und die dritte Gleichung enthalten jeweils Quadrate von β und γ, die zweite Gleichung enthält diese beiden Variablen nur linear. Es ist also naheliegend, die zweite Gleichung zu quadrieren, die erste und dritte Gleichung nach diesen Quadraten der Variablen umzustellen und diese dann in die quadrierte zweite Gleichung einzusetzen:

$$\beta^2 = 2\alpha; \quad 4\beta^2\gamma^2 = q^2; \quad \gamma^2 = \left(\frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - r \quad \Rightarrow \quad 8\alpha\left(\left(\frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - r\right) = q^2$$

Auflösen der Klammern und Umstellen führt auf:

$$\alpha^3 + p\alpha^2 + \left(\frac{p^2}{4} - r\right)\alpha - \frac{q^2}{8} = 0$$

Wir haben nun also eine kubische Gleichung für α gewonnen, die sogenannte kubische Resolvente. Setzen wir auch noch die Abkürzungen p, q, r ein, so wird diese zu

$$\boxed{\alpha^3 + \left(-\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{c}{a}\right)\alpha^2 + \left(\frac{3b^4}{64a^4} - \frac{b^2c}{4a^3} + \frac{c^2 + bd}{4a^2} - \frac{e}{a}\right)\alpha - \frac{1}{8}\left(\frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}\right)^2 = 0}$$

multiplizieren mit $512a^6$: $\boxed{(8a^2\alpha)^3 + (-3b^2 + 8ca)(8a^2\alpha)^2 + (3b^4 - 16ab^2c + 16a^2c^2 + 16a^2bd - 64a^4e)8a^2\alpha - (b^3 - 4abc + 8a^2d)^2 = 0}$

Hieraus können wir mittels der vorher besprochenen Methoden α berechnen, dann aus den Gleichungen I und III die Werte von β und γ:

$$\beta = \pm\sqrt{2\alpha}; \quad \gamma = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - r} = \pm\sqrt{\left(-\frac{3b^2}{16a^2} + \frac{c}{2a} + \alpha\right)^2 + \frac{3b^4}{256a^4} - \frac{b^2c}{16a^3} + \frac{bd}{4a^2} - \frac{e}{a}}$$

Gleichung II bestimmt dabei über das Vorzeichen von q die relativen Vorzeichen von β, γ zueinander. Die beiden möglichen Lösungen entsprechen dann genau den beiden quadratischen Gleichungen (**). Die letzteren werden nun also zu:

$$z^2 + \sqrt{2\alpha}z - \frac{3b^2}{16a^2} + \frac{c}{2a} + \alpha - \sqrt{\left(-\frac{3b^2}{16a^2} + \frac{c}{2a} + \alpha\right)^2 + \frac{3b^4}{256a^4} - \frac{b^2c}{16a^3} + \frac{bd}{4a^2} - \frac{e}{a}} = 0$$

$$\text{oder} \quad z^2 - \sqrt{2\alpha}z - \frac{3b^2}{16a^2} + \frac{c}{2a} + \alpha + \sqrt{\left(-\frac{3b^2}{16a^2} + \frac{c}{2a} + \alpha\right)^2 + \frac{3b^4}{256a^4} - \frac{b^2c}{16a^3} + \frac{bd}{4a^2} - \frac{e}{a}} = 0,$$

und können wie üblich mit der „Mitternachtsformel" gelöst werden:

$$z_{1,2} = \frac{-\sqrt{2\alpha} \pm \sqrt{2\alpha - 4\left(-\frac{3b^2}{16a^2} + \frac{c}{2a} + \alpha - \sqrt{\left(-\frac{3b^2}{16a^2} + \frac{c}{2a} + \alpha\right)^2 + \frac{3b^4}{256a^4} - \frac{b^2c}{16a^3} + \frac{bd}{4a^2} - \frac{e}{a}}\right)}}{2}; \quad z_{3,4} = \frac{\sqrt{2\alpha} \pm \sqrt{2\alpha - 4\left(-\frac{3b^2}{16a^2} + \frac{c}{2a} + \alpha + \sqrt{\left(-\frac{3b^2}{16a^2} + \frac{c}{2a} + \alpha\right)^2 + \frac{3b^4}{256a^4} - \frac{b^2c}{16a^3} + \frac{bd}{4a^2} - \frac{e}{a}}\right)}}{2},$$

und damit erhalten wir schließlich, wenn wir den Bruch noch mit 2a erweitern und zusammenfassen, für x:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b - \sqrt{8a^2\alpha} \pm \sqrt{-8a^2\alpha + 3b^2 - 8ac + \sqrt{(-3b^2 + 8ac + 16a^2\alpha)^2 + 3b^4 - 16ab^2c + 64a^2bd - 256a^4e}}}{4a}};$$

$$\boxed{x_{3,4} = \frac{-b + \sqrt{8a^2\alpha} \pm \sqrt{-8a^2\alpha + 3b^2 - 8ac - \sqrt{(-3b^2 + 8ac + 16a^2\alpha)^2 + 3b^4 - 16ab^2c + 64a^2bd - 25\quad {}^4e}}}{4a}}$$

Prinzipiell könnte man also auch hier nun allgemeine Lösungsformeln entwickeln… Viel Spaß.

prinzipiell bis zu 12 Lösungen möglich! wie entscheidet man, welche davon die richtigen sind???

6) Geschichtliche Entwicklung

Die Geschichte der Cardanischen Formeln ist interessant – und reichlich verwickelt. Dass die Formeln heute den Namen des italienischen Mathematikers, Arztes und Philosophen Gerolamo Cardano, 1501–1576 (oder Girolamo; je nach Quelle sind für die meisten Persönlichkeiten dieser Zeit leicht unterschiedliche Namen überliefert), tragen, liegt vor allem daran, dass er sie als erste veröffentlicht hat (1545). Er leistete zwar auch Beiträge zur Lösung, sein Hauptverdienst ist es aber eher, die wichtigen Vorarbeiten von anderen zusammenzufassen und zu verallgemeinern.

Bereits im antiken Griechenland gab es Methoden, mit denen man zumindest manche kubischen Gleichungen lösen konnte; allerdings waren diese rein geometrisch. Die Gedanken der Griechen wurden von einigen arabischen Mathematikern wieder aufgegriffen und weiterentwickelt, aber auch diese kamen noch zu keinen allgemeinen Lösungsformeln.

Der persische Mathematiker, Astronom, Philosoph und Dichter Omar Chayyam, 1048–1131, sortierte dann die kubischen Gleichungen in 13 verschiedene Sorten ein. Heutzutage fasst man alle Sorten in eine zusammen, eben die allgemeine kubische Gleichung. Da damals aber die negativen Zahlen und die Null noch nicht allgemein als sinnvoll akzeptiert worden waren, konnte Chayyam in seinen Gleichungen nur positive Koeffizienten (und Lösungen!) zulassen. Deshalb waren für ihn beispielsweise

$$x^3 + 4x = 1 \quad \text{und} \quad x^3 - 4x = 1$$

zwei völlig unterschiedliche Arten von Gleichungen – denn die zweite konnte er nur in der Gestalt

$$x^3 = 4x + 1$$

hinschreiben, was natürlich eine andere Form als die erste Gleichung hat.

Erst dem italienischer Mathematiker Scipione del/dal Ferro, 1465–1526, gelang es, zwei der 14 Sorten zu lösen, nämlich die reduzierten Gleichungen

$$x^3 + px = q \quad \text{und} \quad x^3 = px + q.$$

(Nach anderen Quellen hat er sogar nur Gleichungen der ersten Art gelöst. Auch wann er das geschafft hat, ist in den Quellen unklar – um 1505 oder erst um 1515.) Immer noch waren die negativen Zahlen und die Null nicht allgemein akzeptiert; also ermittelte Ferro die Lösungen dieser beiden Gleichungen nur für positive p und q. Der wesentliche Ansatz aus (2) oben, nämlich $z = u + v$ anzusetzen, stammt aber bereits von ihm.

del Ferro veröffentlichte seine Lösung nie, gab sie aber auf dem Sterbebett an zwei seiner Schüler weiter: Hannibal (del) Nave (der auch sein Schwiegersohn war; auch: Annibale della Nave) und Antonio Maria Fior(e). Beide behielten die Lösungsmethode auch erst mal weiter für sich.

Unabhängig von del Ferro beschäftigte sich auch der venezianische Mathematiker Niccolò Tartaglia, um 1500–1557, mit dem Lösen von kubischen Gleichungen ("Tartaglia" war nicht sein Familienname, sondern bedeutet "Stotterer". Als Kind wurde er, während seine Heimatstadt Brescia in einem Krieg geplündert wurde, von einem Soldaten schwer im Gesicht verletzt und konnte einige Zeit lang kaum reden. Den Spitznamen, den er deshalb von anderen Kindern bekam, nahm er dann selbst als "Nachnamen" an.) Um 1534 hatte Tartaglia eine Lösungsmethode für Gleichungen der Form

$$x^3 + px^2 = q$$

gefunden (immer noch: $p, q > 0$).

Im Jahre 1535 traten Fior und Tartaglia dann in Venedig dann in einem öffentlichen Wettbewerb gegeneinander an – so etwas war damals üblich zwischen Mathematikern, die sich einen Namen machen wollten, und wohl recht beliebte Veranstaltungen. (Je nach Quellen wurde der Wettbewerb von anderen ausgeschrieben, und die beiden meldeten sich freiwillig; oder Fior forderte Tartaglia heraus.) Tartaglia wusste bereits, dass Fior Gleichungen des Typs

$$x^3 + px = q$$

lösen konnte, und setzte alles daran, selbst auch dafür ein Lösungsverfahren zu finden. Und nach einer durchgerechneten Nacht vom 12. auf den 13. Februar 1535, acht Tage vor dem Wettbewerb, hatte er tatsächlich ein allgemeines Lösungsverfahren für alle Arten von kubischen Gleichungen (mit positiven Koeffizienten) gefunden (nach anderen Quellen allerdings nicht für alle, sondern nur für die Spezialfälle von Fior). Letztlich lief es auf das oben in (1) diskutierte Verfahren hinaus, alle kubischen Gleichungen zunächst in die reduzierte Form zu bringen und dann diese zu lösen. Den "casus irreducibilis" (mit $D < 0$) konnte er allerdings noch nicht lösen.

Fior stellte Tartaglia dann, wie letzterer erwartet hatte, nur Aufgaben, die auf das Lösen einer Gleichung des einzigen Typs, der Fior bekannt war, hinausliefen. Umgekehrt stellt Tartaglia an Fior Aufgaben, die auf andere Typen von kubischen Gleichungen führten (und evtl. auch ganz andere mathematische Probleme). Dementsprechend konnte Tartaglia alle von Fiors Aufgaben schnell lösen – umgekehrt aber Fior keine einzige von Tartaglias Aufgaben, blamierte sich also völlig. Tartaglia lehnte aber großzügig den Wettgewinn (30 Festessen auf Fiors Kosten) ab.

Die Nachricht von Tartaglias überragendem Erfolg verbreitete sich wie ein Lauffeuer, und viele Mathematiker bedrängten ihn, seine Lösungsmethode preiszugeben. Er weigerte sich aber – wahrscheinlich, um in eventuell folgenden Wettbewerben weiterhin die Oberhand behalten zu können. (Das war wahrscheinlich auch der Grund, warum del Ferro seine Methode nie veröffentlichte.) Erst Cardano, der zu dieser Zeit selbst bereits ein berühmter Mathematiker war, gelang es 1539 nach langem Zureden, ihm das Geheimnis zu entlocken – allerdings nur gegen das Versprechen, es seinerseits für sich zu behalten. (Cardano soll gesagt haben: "Ich schwöre Euch bei den heiligen Evangelien und als wirklicher Edelmann, diese Eure Entdeckungen niemals zu veröffentlichen, falls Ihr sie mich lehrt.“)

Zunächst hielt Cardano auch (größtenteils) Wort: Er diskutierte die Methode nur mit seinem Schüler Lodovico Ferrari. Dabei stießen sie schnell auf das Problem des "casus irreducibilis" und merkten an Tartaglias ausweichenden Antworten, dass dieser die Lösung dafür wohl auch nicht kannte. Cardano und Ferrari merkten dann allerdings, dass man mithilfe des damals noch sehr neuen Konzepts der imaginären Zahlen auch solche Gleichungen lösen kann. Außerdem fand Ferrari aufbauend auf den Lösungsmethoden für kubische Gleichungen dann auch eine Möglichkeit, Gleichungen vierter Ordnung zu lösen.

Cardano und vor allem Ferrari waren also deutlich über Tartaglias Methoden hinausgelangt und hätten ihre Ergebnisse gerne veröffentlicht, auch, um den Ruf des noch jungen Ferraris als großen Mathematiker aufzubauen. Eine solche Veröffentlichung hätte aber zwangsläufig die Methoden von Tartaglia enthalten müssen – und Cardano hatte ja versprochen, diese nie zu veröffentlichen!

Cardano und Ferrari berieten sich mit ihrem Kollegen Hannibal Nave über dieses Problem – und waren rein zufällig an genau der richtigen Adresse gelandet: Nave hatte ja von seinem Schwiegervater del Ferro dessen Lösungsmethode erhalten! Als Cardano erfuhr, dass bereits del Ferro kubische Gleichungen lösen konnte (wenn auch nur wenige Arten...), fühlte er sich nicht mehr an das Tartaglia gegebene Versprechen gebunden – und veröffentlichte 1545 die allgemeinen Lösungsmethoden für kubische Gleichungen und auch solche vierten Grades in seinem Buch "Ars Magna" ("Die große Kunst").

Im Vorwort des Buches erwähnte Cardano zwar Tartaglias Leistung, stellte es aber so hin, als ob der Hauptverdienst del Ferro und Ferrari gebühre. Tartaglia war verständlicherweise alles andere als begeistert; es kam zu einem zehnjährigen, sehr hitzigen Prioritätsstreit, den Tartaglia leider letztlich verlor. (Unter anderem auch deswegen, weil Ferrari einfach der bessere Mathematiker war!)

Der mathematische Verdienst von Cardano ist letztlich also "nur", dass er die verschiedenen Lösungsmethoden vereinheitlichte und alle Arten von kubischen Gleichungen auf nur noch zwei Sorten, letztlich beide in reduzierter Form, zurückführte (weiterhin nur mit positiven Koeffizienten – nach anderen Quellen arbeitete er aber auch mit negativen). Wie oben schon erwähnt, hat allerdings nach einigen Quellen bereits Tartaglia dies erreicht. Cardano schreckte aber im Gegensatz zu allen seinen Vorgängern nicht vor den imaginären Zwischenergebnissen im "casus irreducibilis" zurück, sondern zeigte, dass man am Schluss auch dort wieder reelle Lösungen erhält. (Wie viele dieser Fortschritte Cardano selbst erreichte und wie viele Ferrari, ist erst recht unklar...)

Zum endgültigen Abschluss gelangte die Theorie des Lösens von kubischen Gleichungen erst um 1600: In diesem Jahr veröffentlichte der französische Mathematiker Franciscus Vieta (auch: François Viète), 1540–1603, die oben beschriebene Methode, um den "casus irreducibilis" auch ohne komplexe Zahlen (nämlich mit trigonometrischen Formeln) zu lösen.

Anmerkung:
Vieta ist heutzutage praktisch nur noch für den "Satz von Vieta" über die Lösungen von quadratischen Gleichungen bekannt (und selbst diesen Satz lernt man heutzutage leider anscheinend in fast keiner Schule mehr!), ist aber eigentlich der Vater der heutigen (Schul-)Algebra: Er führte die Formelschreibweise ein! Erstmals verwendete er konsequent (Groß-)Buchstaben A, B, C, ... für die Variablen und die Rechenzeichen + und –; für "mal" schrieb er "in", für = benutzte er "aequale" oder "aequetur". Potenzen schrieb er noch aus: "A quad" bedeutet A^2, "A cubus" entsprechend "A^3". Statt Summen einzuklammern, verband er die Terme mit einem Strich darüber.

Die heutige Schreibweise war also noch nicht ganz erreicht, dennoch war dies ein riesiger Fortschritt gegenüber früher. Einige wenige griechische und arabische Mathematiker hatten zwar bereits auch eine abkürzende Schreibweise verwendet, dies hatte sich aber nie durchgesetzt. Deshalb gaben praktisch alle Mathematiker vor Vieta ihre Lösungsmethoden rein verbal an. Tartaglia hatte seine Lösungsmethode für die kubischen Gleichungen beispielsweise in einem Gedicht (!) mit 21 (!) Zeilen formuliert: "Wenn der Kubus und das Coss' \ gleich einer diskreten Zahl sind, \ finden sich als Differenz zwei weitere in dieser ..." usw. usf. "Coss" bezeichnet dabei die unbekannte Variable (von italienisch "cosa" = "Ding", "Sache")

Die ganze Geschichte kann man ausführlich in "Das Geheimnis der Symmetrie" von Markus du Sautoy nachlesen; auch in "4000 Jahre Algebra" von Heinz-Wilhelm Alten u.a. steht viel dazu.