Beweis für die Scheitelformel

Mit der allgemeinen Form der Parabelgleichung wird die übliche quadratische Ergänzung durchgeführt:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Damit ist der Funktionsterm in die Scheitelform umgeformt, und man kann direkt ablesen: Die x-Koordinate des Scheitelpunkts ist $x_S = -\frac{b}{2a}$. (und die y-Koordinate ist $y_S = -\frac{b^2}{4a} + c$)

Beweis zur Lösungsformel

oben wurde gezeigt: $ax^2 + bx + c = 0$ ist äquivalent zu $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \quad | + \frac{b^2}{4a} - c$

$$\Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c \quad | \cdot 4a$$

$$\Rightarrow \quad 4a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = b^2 - 4ac \quad | \pm\sqrt{}$$

$$\Rightarrow 2a\left(x_{1,2} + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{| Klammer auflösen}$$

$$\Rightarrow 2ax_{1,2} + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \quad | - b$$

$$\Rightarrow 2ax_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \quad | : (2a)$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beweis zum Satz von Vieta

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \cdot \left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{4a^2}$$

mit der dritten binomischen Formel wird das zu:

$$= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Beweis zur Linearfaktorform

$$a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = a\,(x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2) = a\,(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$$

Nun wird der Satz von Vieta verwendet:

$$= a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c$$