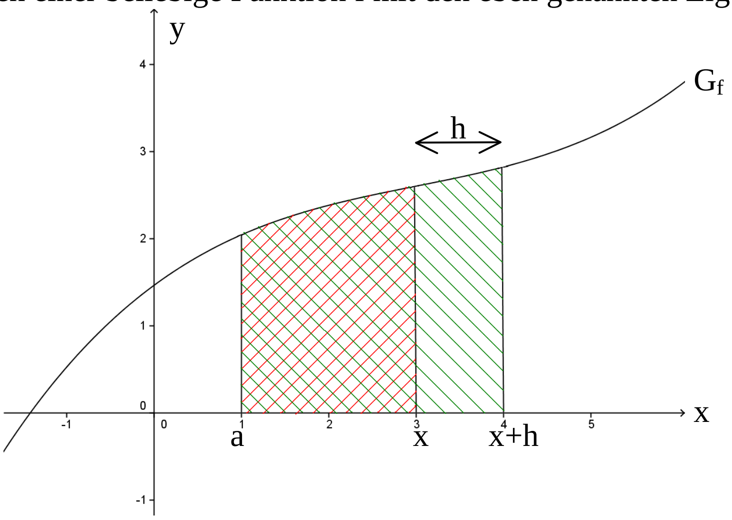
<u>Beweis: Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion A_a ist gleich der „Randfunktion“ f</u>

Im Folgenden wird der Beweis nur für stetige, monoton zunehmende Funktionen geführt, die oberhalb der x-Achse verlaufen; der allgemeine Beweis für stetige Funktionen findet sich im Buch auf S. 79f.

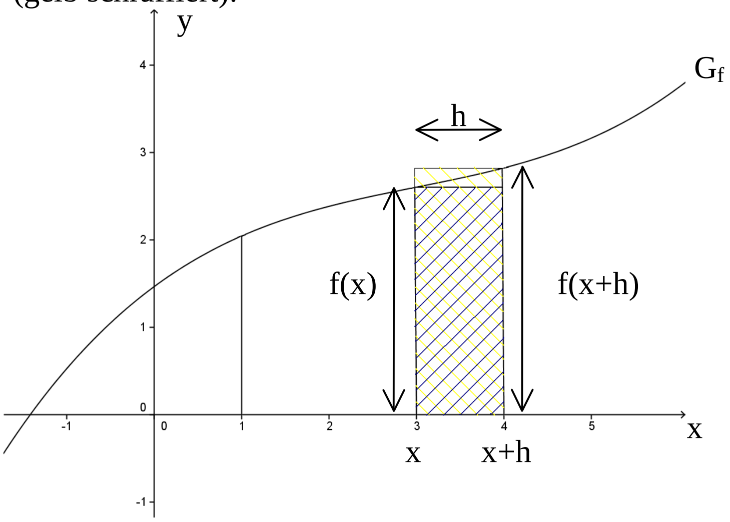
Betrachten wir den Graphen einer beliebige Funktion f mit den eben genannten Eigenschaften, z. B.:



Betrachten wir nun einerseits den Inhalt der Fläche zwischen a und einem beliebigen x-Wert, also $A_a(x)$ (im Graph oben rot schraffiert) und andererseits den Inhalt der Fläche zwischen a und dem Wert x + h, also $A_a(x+h)$, mit einem beliebigen h (im Graph oben grün schraffiert). Den Unterschied zwischen diesen beiden Flächeninhalten (also der Teil, der nur grün schraffiert ist) bezeichnen wir mit A, also:

$$A = A_a(x+h) - A_a(x) \qquad (*)$$

Diesen Flächeninhalt kann man nun aber abschätzen: er ist offensichtlich größer gleich als der eines Rechtecks mit Breite h und Höhe f(x) (blau schraffiert), aber kleiner gleich als der eines Rechteck mit Breite h und Höhe f(x+h) (gelb schraffiert):



Es gilt also: $h \cdot f(x) \leq A \leq h \cdot f(x+h)$

Setzen wir den Zusammenhang (*) von oben ein: $h \cdot f(x) \leq A_a(x+h) - A_a(x) \leq h \cdot f(x+h)$

und teilen alles durch h: $f(x) \leq \dfrac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h} \leq f(x+h)$

Diese Ungleichungen gelten für beliebige Werte von h (beliebige Rechteckbreiten). Betrachten wir nun schließlich „unendlich schmale“ Rechtecke, bilden also den Limes für h gegen 0. In diesem Limes bleibt ganz links einfach f(x) stehen (hängt ja nicht von h ab), ganz rechts ergibt sich (hier wird die Stetigkeit benötigt!) f(x+0), also auch f(x). In der Mitte steht ein Differenzquotient; bildet man von diesem den Limes, so ergibt sich ein Differenzialquotient – also die Ableitung! Also insgesamt:

$$f(x) \leq A'_a(x) \leq f(x)$$

$A'_a(x)$ soll also gleichzeitig größer gleich als f(x) und kleiner gleich als f(x) sein – das geht aber offensichtlich nur dann beides gleichzeitig, wenn beide gleich sind! Und genau das war zu zeigen.