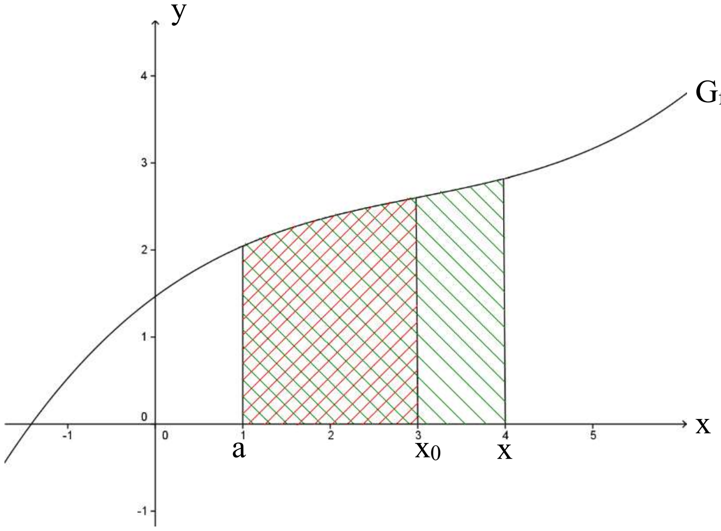
Beweis: Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion A_a ist gleich der „Randfunktion“ f

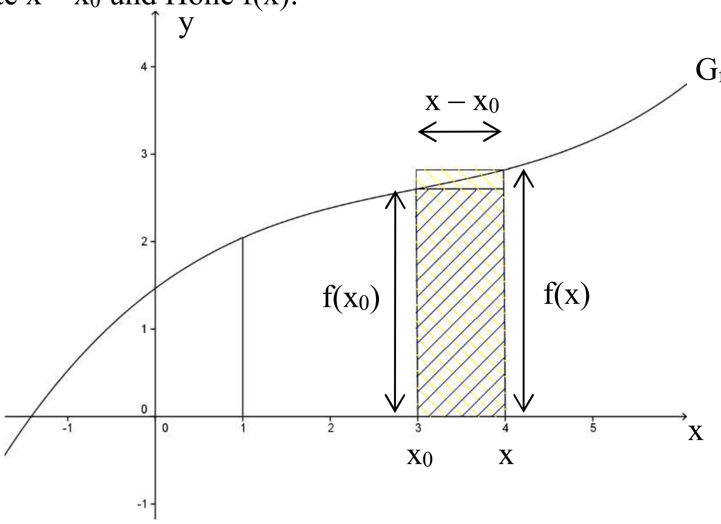
Im Folgenden wird der Beweis nur für stetige, monoton zunehmende Funktionen geführt, die oberhalb der x-Achse verlaufen. Betrachten wir den Graphen einer beliebigen Funktion f mit den eben genannten Eigenschaften, z. B.:



Betrachten wir nun einerseits den Inhalt der Fläche zwischen a und einem beliebigen x-Wert x_0, also $A_a(x_0)$ (im Graph oben rot schraffiert) und andererseits den Inhalt der Fläche zwischen a und dem allgemeinen Wert x, also $A_a(x)$ (im Graph oben grün schraffiert). Den Unterschied zwischen diesen beiden Flächeninhalten (also der Teil, der nur grün schraffiert ist) bezeichnen wir mit A, also:

$$A = A_a(x) - A_a(x_0) \qquad (*)$$

Diesen Flächeninhalt kann man nun aber abschätzen: er ist offensichtlich größer gleich als der eines Rechtecks (blau schraffiert) mit Breite $x - x_0$ und Höhe $f(x_0)$, aber kleiner gleich als der eines Rechteck (gelb schraffiert) mit Breite $x - x_0$ und Höhe f(x):



(Hier wird verwendet, dass die Funktion monoton zunehmend ist: Deshalb ist $f(x) > f(x_0)$ und deshalb wiederum ist das gelbe Rechteck größer als das blaue.)

Es gilt also: $(x-x_0)\cdot f(x_0) \le A \le (x-x_0)\cdot f(x)$

Setzen wir den Zusammenhang (*) von oben ein: $(x-x_0)\cdot f(x_0) \le A_a(x) - A_a(x_0) \le (x-x_0)\cdot f(x)$

und teilen alles durch $x-x_0$: $f(x_0) \le \frac{A_a(x)-A_a(x_0)}{x-x_0} \le f(x)$

Diese Ungleichungen gelten für beliebige Rechteckbreiten. Betrachten wir nun schließlich „unendlich schmale“ Rechtecke, bilden also den Limes für x gegen x_0. In diesem Limes bleibt ganz links einfach $f(x_0)$ stehen (hängt ja nicht von x ab), ganz rechts ergibt sich (hier wird die Stetigkeit benötigt!) auch $f(x_0)$. In der Mitte steht ein Differenzenquotient; bildet man von diesem den Limes, so ergibt sich ein Differenzialquotient – also die Ableitung! Also insgesamt:

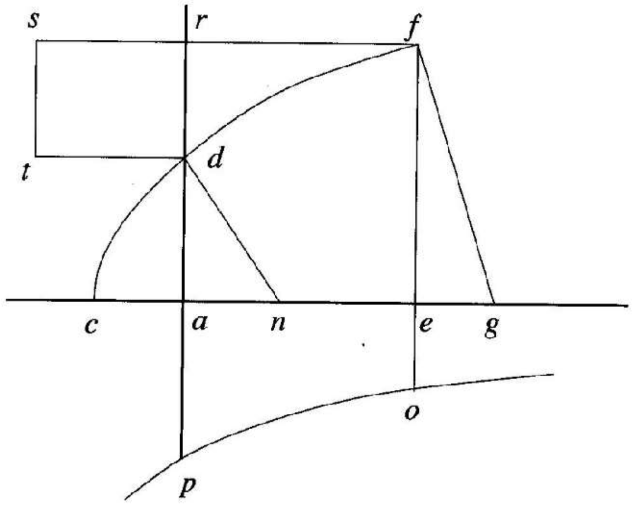
$$f(x_0) \le A'_a(x_0) \le f(x_0)$$

$A'_a(x_0)$ soll also gleichzeitig größer gleich als $f(x_0)$ und kleiner gleich als $f(x_0)$ sein – das geht aber offensichtlich nur dann beides gleichzeitig, wenn beide gleich sind! Und genau das war zu zeigen.

Historisches dazu:

Der erste, der diesen Zusammenhang grob erkannte (aber noch nicht deutlich formulierte), war wahrscheinlich der englische Geistliche und Mathematiker Isaac Barrow (1630-1677), der an der Universität von Cambridge einer der Lehrer Newtons war. Erstmals in erkennbarer Form veröffentlicht wurde der Satz (oder 1668) vom schottischen Mathematiker und Astronom James Gregory (1638-1675) in seinem Buch „ Geometriae pars universalis‘‘, aber auch er erkannte die grundlegende Bedeutung dieses Satz anscheinend noch nicht. Diese Wichtigkeit wurde erst vom englischen Physiker, Astronom und Mathematiker Sir Isaac Newton (1642-1726) im Jahre 1666 erkannt (er veröffentlichte dies aber erst 1686!) und unabhängig davon vom deutschen Philosophen, Juristen, Historiker und Mathematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) im Jahre 1677. Dies führte in den folgenden Jahrzehnten dann zu einem sehr erbittert geführten Streit zwischen den beiden, weil beide jeweils behaupteten, der andere hätte die Ideen von ihm abgeschrieben.

Newton formulierte den Satz in einer Form, der mit der heutigen Schreibweise praktisch nichts zu tun hat; man muss sehr viel Arbeit investieren, um im folgenden Bild und dem Text dazu den Satz wiederzuerkennen…



„was die Natur der krummen Linie po zeigt. Ist dt = ap, dann ist drst=eoap, denn unter der Annahme, dass sich eo gleichförmig von ap wegbewegt, bewegt sich rs weg von dt mit einer Geschwindigkeit die im gleichen Verhältnis kleiner wird wie sich eo verkürzt.“

(w^{ch} shews y^{e} nature of y^{e} crooked line *po*. now if *dt* = *ap*. y^{n} *drst*= *eoap*. for supposeing *eo* moves uniformely from *ap* & *rs* moves from *dt* wth motion decreaseing in y^{e} same proportiō y^{t} y^{e} line *eo* doth shorten.)

Die Schreibweise, die Leibniz einführte, war deutlich klarer und wird prinzipiell auch heute noch verwendete; siehe dazu „Der Grund für die Integralschreibweise‘‘.

Ausführlich dargestellt wird all dies z. B. im Buch „Die Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton‘‘ von Thomas Sonar (Springer-Verlag, 2015; daraus habe ich auch das obige Bild und den Text entnommen).