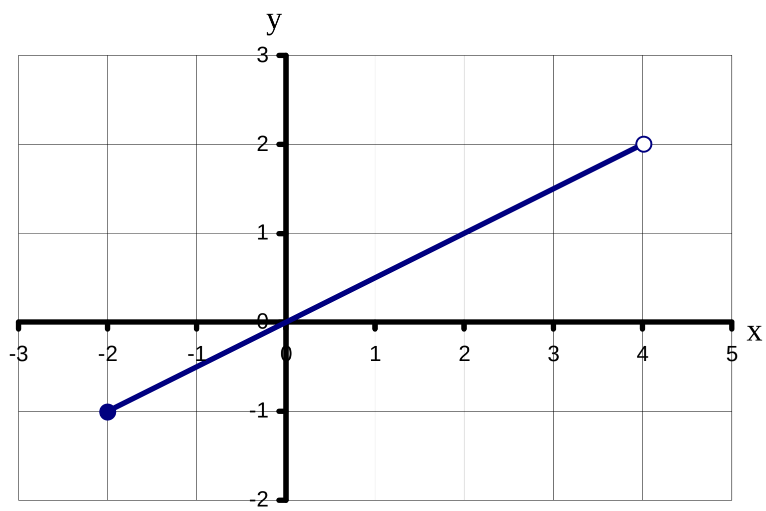
Beschränktheit

Bei quadratischen Funktionen mit a > 0 (und $\mathbb{D} = \mathbb{R}$) ist der Graph eine nach oben geöffnete Parabel; deshalb hat die Funktion einen kleinsten Wert. Es gibt also eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle Funktionswerte f(x) gilt, dass $f(x) \geq c$ ist. Entsprechend gibt es bei quadratischen Funktionen mit a < 0 (und $\mathbb{D} = \mathbb{R}$) eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle Funktionswerte f(x) gilt, dass $f(x) \leq c$ ist.

Definition: Gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, sodass $\left\{ \begin{matrix} f(x) \geq c \\ f(x) \leq c \end{matrix} \right\}$ für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt, so heißt f <u>nach $\left\{ \begin{matrix} \text{unten} \\ \text{oben} \end{matrix} \right\}$ beschränkt</u>; die Zahl c heißt entsprechend $\left\{ \begin{matrix} \text{untere} \\ \text{obere} \end{matrix} \right\}$ Schranke. Ist f gleichzeitig nach unten und nach oben beschränkt, so heißt f <u>beschränkt.</u>

Beachte: Ist eine Funktion nach unten bzw. oben beschränkt, so gibt es unendlich viele untere bzw. obere Schranken! Die größte untere Schranke nennt man das „Infinum" der Funktion, die kleinste obere Schranke das „Supremum" der Funktion. Wird das Infinum C von der Funktion tatsächlich angenommen (gibt es also ein $x \in \mathbb{D}$ mit f(x) = C), dann nennt man es das <u>Minimum</u> der Funktion; wird das Supremum tatsächlich angenommen, nennt man es das <u>Maximum</u> der Funktion.

Beispiel: f(x) = 0,5x mit $\mathbb{D} = [-2;4[$
Graph:



Die Funktion ist durch –1 nach unten beschränkt (weil alle Funktionswerte größer oder gleich –1 sind), aber z. B. auch durch –2, –3, ..., –100, ..., –1,5, ..., $-\sqrt{2}$ usw. Die größte untere Schranke ist –1. Da dieser Wert von der Funktion tatsächlich auch angenommen wird (es ist f(–2) = –1), ist –1 das Minimum der Funktion. Außerdem ist die Funktion durch 2 nach oben beschränkt (weil alle Funktionswerte kleiner 2 sind; gleich 2 kommt hier nicht vor!), aber z. B. auch durch 3, 4, ... Die kleinste obere Schranke ist 2. Dieser Wert wird von der Funktion aber nicht angenommen (es wäre f(4) = 2, aber 4 gehört nicht zu $\mathbb{D}$!), deshalb ist 4 nur das Supremum der Funktion; sie hat kein Maximum.

Alle Funktionen, die wir in der 11. Klasse sehen werden, haben normalerweise ein Minimum und/oder Maximum, kein Infinum und/oder Supremum; in der 12. Klasse gibt es aber durchaus Funktionen, die z. B. zwar ein Infinum, aber kein Minimum haben! (z. B. hat $f(x) = 1/(x^2+1)$ das Infinum 0, aber kein Minimum).

In Prüfungen wird Beschränktheit praktisch nie gefragt. Was aber öfters gefragt wird, ist die Wertemenge einer Funktion. Diese kann man aus dem Infinum und Supremum ablesen – aber auch einfach aus dem Graph! (Im Beispiel oben ist die Wertemenge offensichtlich [–1;2[.)

Beschränktheit rechnerisch zeigen:

Beispiel 1: $f(x) = 0{,}5x$ mit $\mathbb{D} = [-2;4[$; man soll zeigen, dass a) –3 eine untere Schranke und b) 3 eine obere Schranke von f ist.
a) Es ist zu zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt, dass $f(x) \geq -3$ ist, also $0{,}5x \geq -3$.
Wir teilen beide Seiten der Ungleichung durch 0,5: $x \geq -6$ (*)
Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt, dass sie ≥ -2 sind, also sind sie automatisch auch ≥ -6. Die Ungleichung (*) ist also eine wahre Aussage. Durch Multiplikation mit 0,5 erhält man aus (*) aber wieder die ursprüngliche Ungleichung $0{,}5x \geq -3$. Also ist auch das eine wahre Aussage. Das war zu zeigen.
b) Es ist zu zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt, dass $f(x) \leq 3$ ist, also $0{,}5x \leq 3$.
Wir teilen beide Seiten der Ungleichung durch 0,5: $x \leq 6$ (*)
Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt, dass sie < 4 sind, also sind sie automatisch auch ≤ 6. Die Ungleichung (*) ist also eine wahre Aussage. Durch Multiplikation mit 0,5 erhält man aus (*) aber wieder die ursprüngliche Ungleichung $0{,}5x \leq 3$. Also ist auch das eine wahre Aussage. Das war zu zeigen.

(Beachte: Hier wird benutzt, dass sich bei Multiplikation mit bzw. Division durch 0,5 die Lösungsmenge der Ungleichung nicht ändert; deshalb sind beide Ungleichungen jeweils äquivalent (gleichbedeutend) zueinander!)

Beispiel 2: $f(x) = 0{,}5x$ mit $\mathbb{D} = [-2;4[$; man soll die größte untere Schranke von f finden
Wir suchen das größtmögliche c, sodass für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt, dass $f(x) \geq c$ ist, also $0{,}5x \geq c$.
Wieder beide Seiten durch 0,5 teilen: $x \geq 2c$.
Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt, dass sie ≥ -2 sind (und dies ist auch die größte untere Schranke für x). Deshalb muss $2c = -2$ sein, also $c = -1$. Die größte untere Schranke von f ist also –1.

Beispiel 3: $f(x) = x^2 - 1$ mit $\mathbb{D} = [-3;4]$; man soll zeigen, dass 24 eine obere Schranke ist.
Es ist zu zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt, dass $f(x) \leq 24$ ist, also $x^2 - 1 \leq 24$. Löst man diese quadratische Ungleichung mit den üblichen Methoden, so ergibt sich, dass $-5 \leq x \leq 5$ (*) sein muss. Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt aber $-3 \leq x \leq 4$, also gilt auch automatisch für sie $-5 \leq x \leq 5$. Die Ungleichung (*) ist also eine wahre Aussage. Diese Ungleichung ist aber wieder äquivalent zur ursprünglichen Ungleichung $x^2 - 1 \leq 24$. Also ist auch das eine wahre Aussage. Das war zu zeigen.