Wahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten

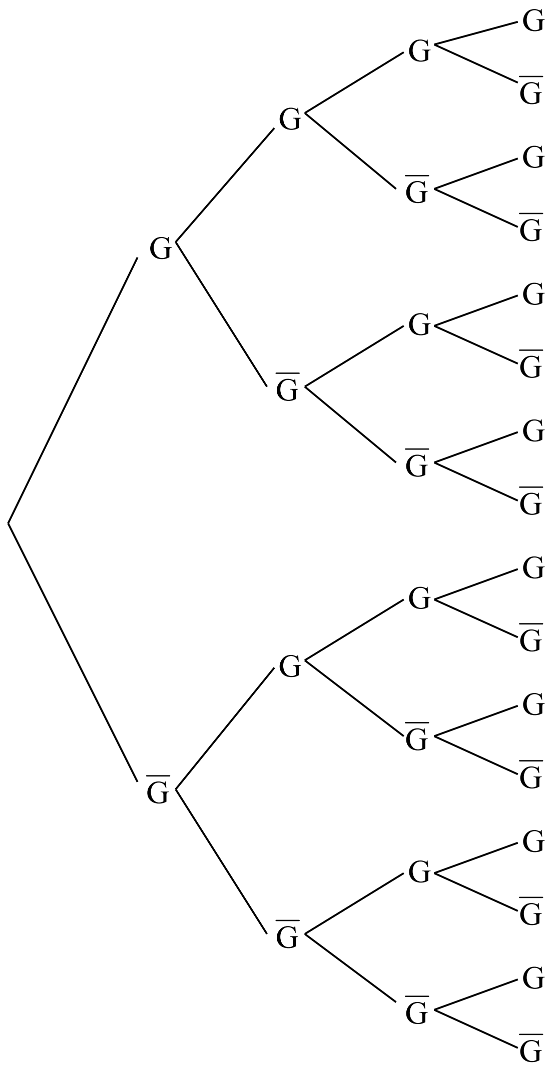
Definitionen: Ein Zufallsexperiment, das nur zwei Ergebnisse hat („Treffer“ und „Niete“), heißt <u>Bernoulli-Experiment</u>. Die Wahrscheinlichkeiten werden mit $p = P(\{\text{Treffer}\})$ und $q = P(\{\text{Niete}\}) =$ bezeichnet. Werden n unabhängige, gleiche Bernoulli-Experimente nacheinander durchgeführt, so spricht man von einer <u>Bernoulli-Kette</u> der Länge n. Die Wahrscheinlichkeit für k Treffer wird mit $B(n; p; k)$ abgekürzt (siehe Tafelwerk S. 9–41).

Beispiele:

Gesucht ist nun eine Formel für die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer. Wir überlegen uns dies an einem Beispiel:

Bei einem Lieferanten ist schon bekannt, dass viele gelieferte Teile zerbrochen sind; nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 4/5$ ist ein Teil noch ganz (G). Es werden $n = 4$ Teile entnommen (mit Zurücklegen – ist zwar nicht sinnvoll, macht aber die Rechnung einfacher!) und geprüft. Wie groß sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten, dass 0 oder 1 oder ... oder 4 Teile ganz sind?

Diese Wahrscheinlichkeiten kann man mit einem Baumdiagramm bestimmen:



$\Omega = \{$ $\qquad$ $P(\{\omega\})$

$GGGG$

$GGG\overline{G}$

$GG\overline{G}G$

$GG\overline{GG}$

$G\overline{G}GG$

$G\overline{G}G\overline{G}$

$G\overline{GG}G$

$G\overline{GGG}$

$\overline{G}GGG$

$\overline{G}GG\overline{G}$

$\overline{G}G\overline{G}G$

$\overline{G}G\overline{GG}$

$\overline{GG}GG$

$\overline{GG}G\overline{G}$

$\overline{GGG}G$

$\overline{GGGG}\}$

Also ergibt sich:

P(„0 ganz“) = P({ }) =

P(„1 ganz“) = P({ })

=

P(„2 ganz“) = P({ })

=

P(„3 ganz“) = P({ })

=

P(„4 ganz“) = P({ }) =

Hier gilt also: P(„k Teile ganz“) =

Dabei gibt der Faktor die Anzahl der Möglichkeiten dafür an,

Satz: Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p gilt

P(„k Treffer“) = B(n;p;k) =

Vorsicht: Ist die Reihenfolge vorgegeben (z. B. „nur das zweite und dritte Stück sind brauchbar“), so gilt diese Formel nicht! Stattdessen gilt dann nur

P(„k Treffer an bestimmten Stellen“) =

besonders einfache Ereignisse:

1) P(„nur Treffer“) =

2) P(„nur Nieten“) =

3) P(„mindestens eine Niete“) =

4) P(„mindestens ein Treffer“) =

Jakob I Bernoulli (1655–1705)

(Quelle: Wikipedia; CC BY-SA 4.0)