

Wahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten

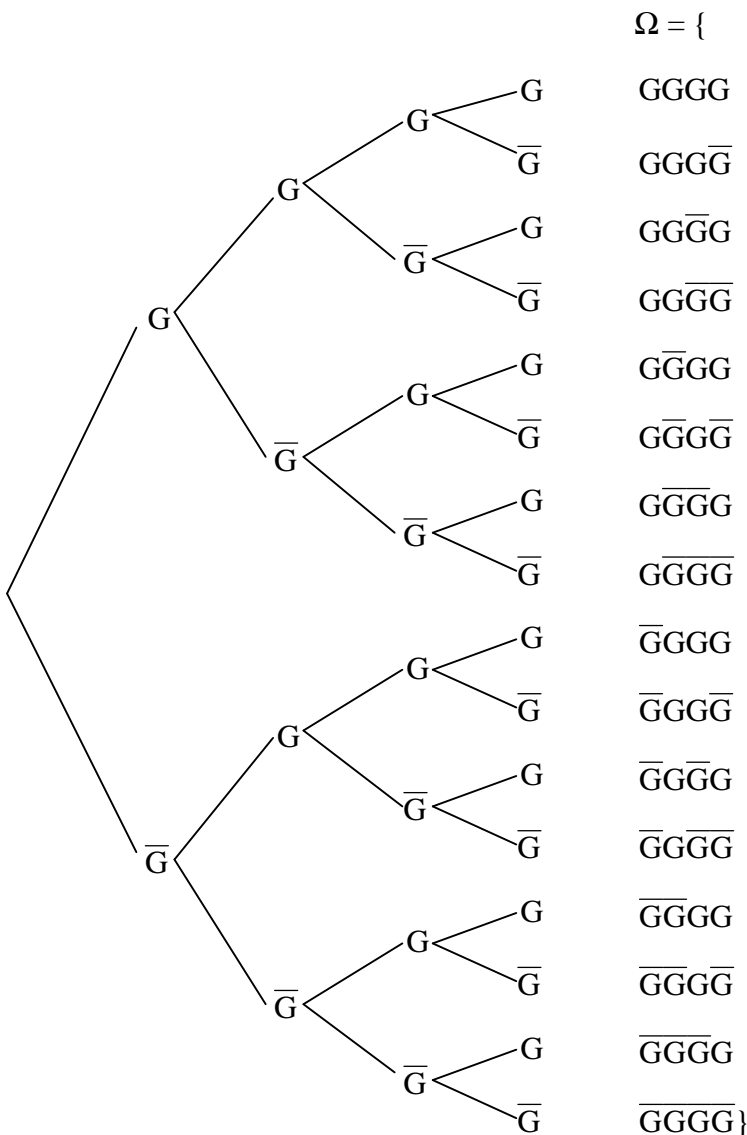
Definitionen: Ein Zufallsexperiment, bei dem nur interessiert, ob ein bestimmtes Ereignis eintritt („Treffer“) oder nicht („Niete“), heißt Bernoulli-Experiment. Die Wahrscheinlichkeiten werden mit $p = P(\{\text{Treffer}\})$ und $q = P(\{\text{Niete}\}) =$ bezeichnet. Werden n unabhängige, gleiche Bernoulli-Experimente nacheinander durchgeführt, so spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n . Die Wahrscheinlichkeit für k Treffer wird mit $B(n; p; k)$ abgekürzt (siehe Tafelwerk S. 9–41).

Beispiele:

Gesucht ist nun eine Formel für die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer. Wir überlegen uns dies an einem Beispiel:

Bei einem Lieferanten ist schon bekannt, dass viele gelieferte Teile zerbrochen sind; nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 4/5$ ist ein Teil noch ganz (G). Es werden $n = 4$ Teile entnommen (mit Zurücklegen – ist zwar nicht sinnvoll, macht aber die Rechnung einfacher!) und geprüft. Wie groß sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten, dass 0 oder 1 oder ... oder 4 Teile ganz sind?

Diese Wahrscheinlichkeiten kann man mit einem Baumdiagramm bestimmen:



Also ergibt sich:

$$P(\text{„0 ganz“}) = P(\{ \}) =$$

$$P(\text{„1 ganz“}) = P(\{ \}) \\ =$$

$$P(\text{„2 ganz“}) = P(\{ \}) \\ =$$

$$P(\text{„3 ganz“}) = P(\{ \}) \\ =$$

$$P(\text{„4 ganz“}) = P(\{ \}) =$$

Hier gilt also: $P(\text{„k Teile ganz“}) =$

Dabei gibt der Faktor die Anzahl der Möglichkeiten dafür an,

Satz: Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p gilt

$$P(\text{„k Treffer“}) = B(n;p;k) =$$

Vorsicht: Ist die Reihenfolge vorgegeben (z. B. „nur das zweite und dritte Stück sind brauchbar“), so gilt diese Formel nicht! Stattdessen gilt dann nur

$$P(\text{„k Treffer an bestimmten Stellen“}) =$$

besonders einfache Ereignisse:

1) $P(\text{„nur Treffer“}) =$

2) $P(\text{„nur Nieten“}) =$

3) $P(\text{„mindestens eine Niete“}) =$

4) $P(\text{„mindestens ein Treffer“}) =$