Wahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten

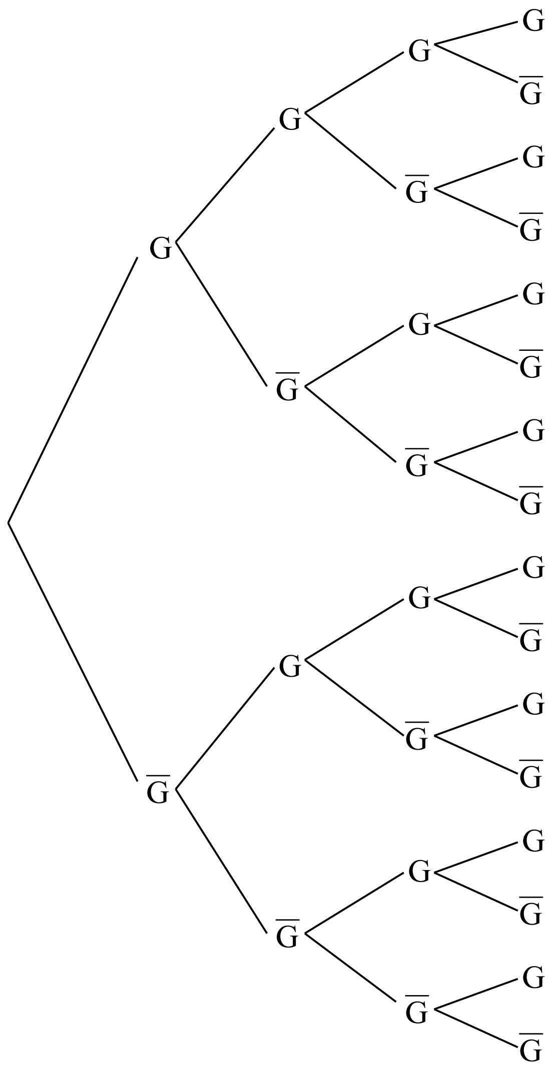
Definitionen: Ein Zufallsexperiment, das nur zwei Ergebnisse hat („Treffer“ und „Niete“), heißt Bernoulli-Experiment. Die Wahrscheinlichkeiten werden mit p = P({Treffer}) und q = P({Niete}) = bezeichnet. Werden n unabhängige, gleiche Bernoulli-Experimente nacheinander durchgeführt, so spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n. Die Wahrscheinlichkeit für k Treffer wird mit B(n; p; k) abgekürzt (siehe Tafelwerk S. 9–41).

Beispiele:

Gesucht ist nun eine Formel für die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer. Wir überlegen uns dies an einem Beispiel:

Bei einer Fußballmannschaft sei bekannt, dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 2/3 ihre Spiele gewinnt (G). Bei einem Turnier werden spielt die Mannschaft n = 4 mal. Wie groß sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten, dass sie in 0 oder 1 oder ... oder 4 Spielen gewinnt?

Diese Wahrscheinlichkeiten kann man mit einem Baumdiagramm bestimmen:



$\Omega = \{$	$P(\{\omega\})$
$GGGG$	
$GGG\overline{G}$	
$GG\overline{G}G$	
$GG\overline{GG}$	
$G\overline{G}GG$	
$G\overline{G}G\overline{G}$	
$G\overline{GG}G$	
$G\overline{GGG}$	
$\overline{G}GGG$	
$\overline{G}GG\overline{G}$	
$\overline{G}G\overline{G}G$	
$\overline{G}G\overline{GG}$	
$\overline{GG}GG$	
$\overline{GG}G\overline{G}$	
$\overline{GGG}G$	
$\overline{GGGG}\}$	

Also ergibt sich:

P(„0mal gewonnen") = P({ }) =

P(„1mal gewonnen") = P({ })

=

P(„2mal gewonnen") = P({ })

=

P(„3mal gewonnen") = P({ })

=

P(„4mal gewonnen") = P({ }) =

Hier gilt also: P(„k-mal gewonnen") =

Dabei gibt der Faktor die Anzahl der Möglichkeiten dafür an,

Satz: Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p gilt

P(„k Treffer") = B(n;p;k) =

Vorsicht: Ist die Reihenfolge vorgegeben (z. B. „nur das zweite und dritte Spiel wird gewonnen"), so gilt diese Formel nicht! Stattdessen gilt dann nur

P(„k Treffer an bestimmten Stellen") =

besonders einfache Ereignisse:

1) P(„nur Treffer") =

2) P(„nur Nieten") =

3) P(„mindestens eine Niete") =

4) P(„mindestens ein Treffer") =

Jakob I Bernoulli (1655–1705)