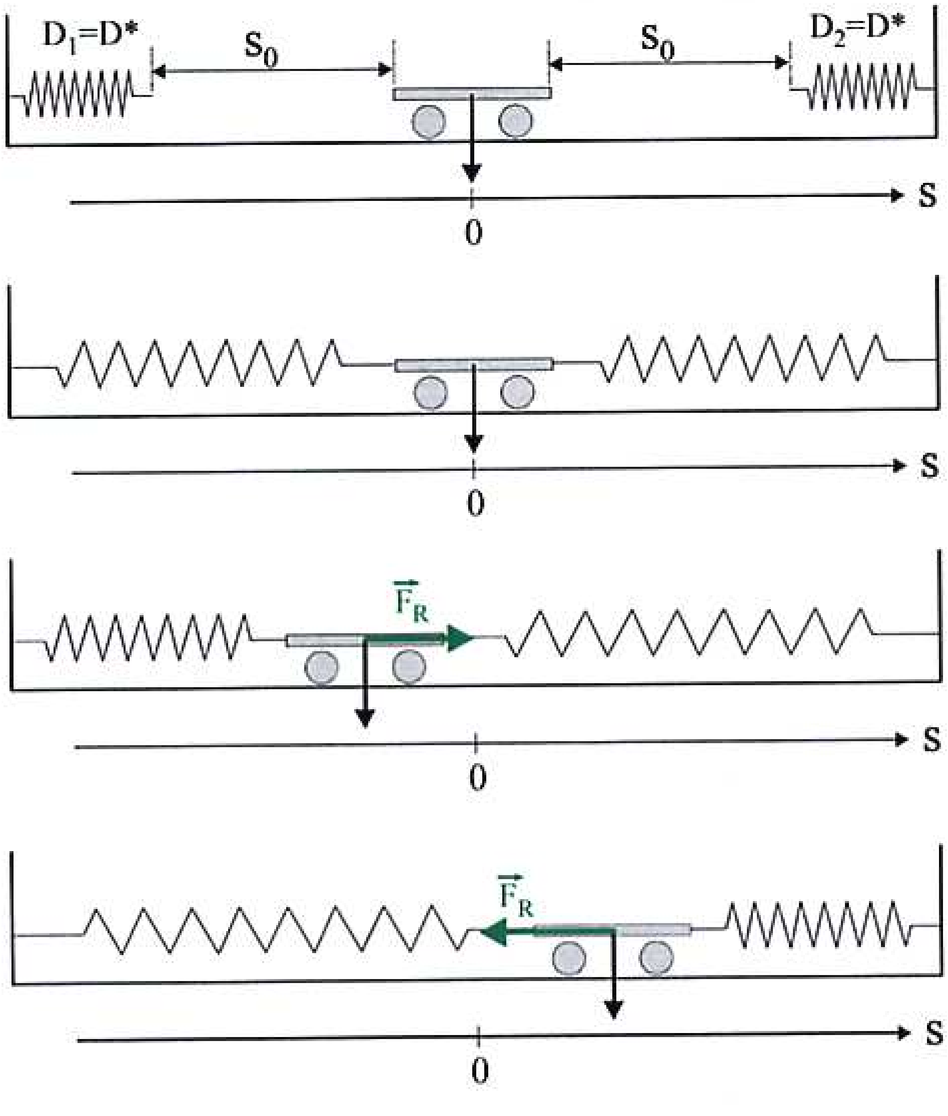
# Weitere Beispiele zu harmonischen Schwingungen

1 . Schwingung eines Wagens zwischen zwei horizontal gespannten, gleichartigen Federn

Beide Federn besitzen die Federhärte $D^*$ und werden nur auf Zug belastet; ihre Masse ist vernachlässigbar. Die Auslenkung ist so klein, dass die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird.




Bei verschiedenen Elongationen ist die resultierende Kraft eingezeichnet. Zeichnen Sie in die unteren drei Bilder jeweils alle auf den Wagen wirkenden Teilkräfte ein, so dass sich die Rückstellkraft $\vec{F}_R$ ergibt.

Nachweis der harmonischen Schwingung:

Es handelt sich um eine lineare Bewegung in s -Richtung. Für die Koordinaten der Kräfte $\vec{F}_R$, $\vec{F}_{li}$ und $\vec{F}_{re}$ in s-Richtung wird die Schreibweise $F_{R,} F_{li,} F_{re}$ verwendet. Die Gewichtskraft und die Gegenkraft der Unterlage heben sich immer auf, sie haben keinen Einfluss auf $\vec{F}_R$. Wir setzen $|s| < s_0$ voraus.

Es gilt: $F_R$ =

Die Dehnung der linken Feder ist , die der rechten Feder

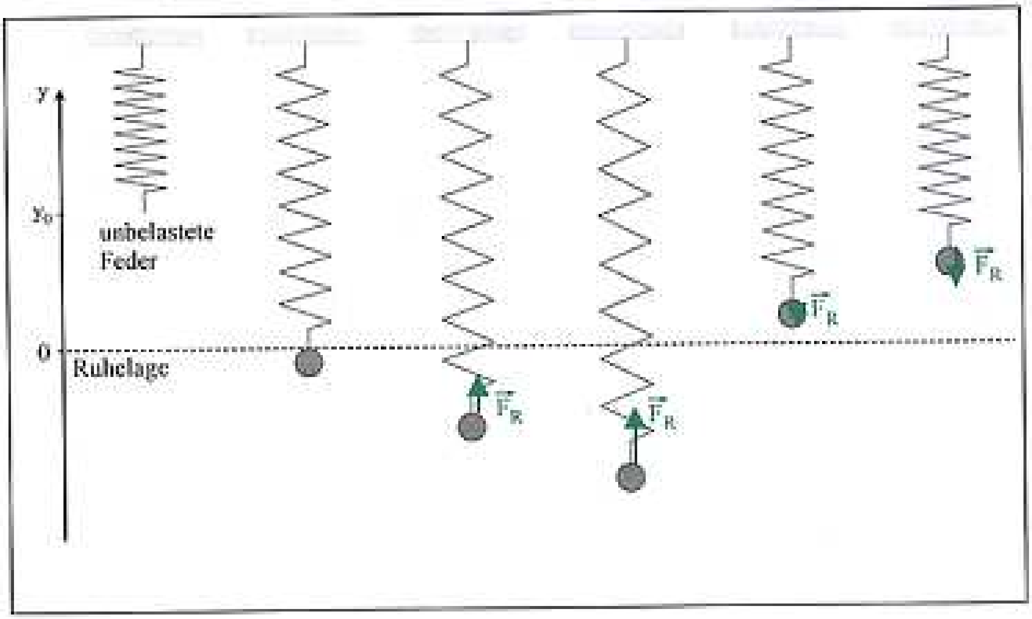
➔ $F_R$ = =

➔ $F_R$

Da die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist, ergibt sich eine harmonische Schwingung. Die Richtgröße ist doppelt so groß wie die Federhärte $D^*$ einer Einzelfeder. Es handelt sich also um eine <u>Parallelschaltung</u> von zwei gleichartigen Federn.

2. Die vertikale Federschwingung
Die Feder der Federhärte D wird nur auf Zug belastet; ihre Masse ist vernachlässigbar.
Die Auslenkung ist so klein, dass die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird.

Zeichnen Sie an den Körper für jede Federstellung die Teilkräfte ein, welche die Rückstellkraft $\vec{F}_R$ hervorrufen:




Nachweis der harmonischen Schwingung unter Benutzung der Koordinaten:

Es handelt sich um eine lineare Bewegung in y-Richtung. Für die Koordinaten der Kräfte $\vec{F}_R$, $\vec{F}_G$ und $\vec{F}_F$ in y-Richtung schreiben wir einfach $F_R, F_G, F_F$ (da diese Kräfte nur eine y-Komponente besitzen, wird auf den Index „y" verzichtet).

Schwingt die Oberkante des Pendelkörpers durch die Ruhelage, dann gilt:
= 0 ➔ = 0. (I)

In einer beliebigen Position gilt:

$F_R$ =

Die Dehnung der Feder, wenn sich der Körper bei der Position y befindet, ist

➔ $F_F$ =

➔ $F_R$ = =

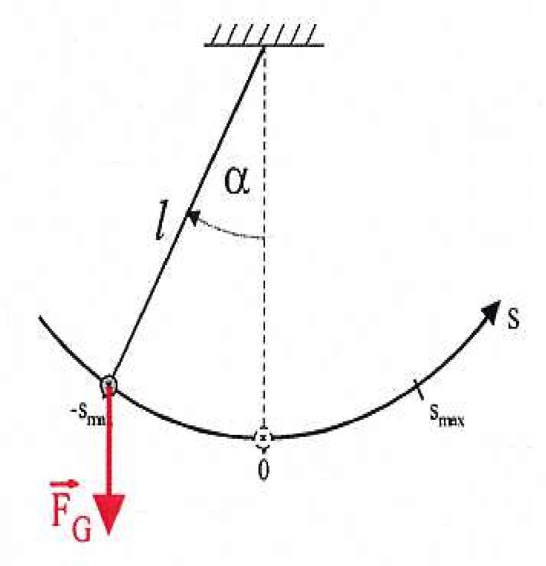
Mit der Gleichgewichtsbedingung (I) folgt: $F_R$ =

$\vec{F}_R$ ist also eine rücktreibende Kraft, die proportional zur Auslenkung ist, also liegt eine harmonische Schwingung vor. Die Richtgröße dieser Schwingung ist die Federhärte D.

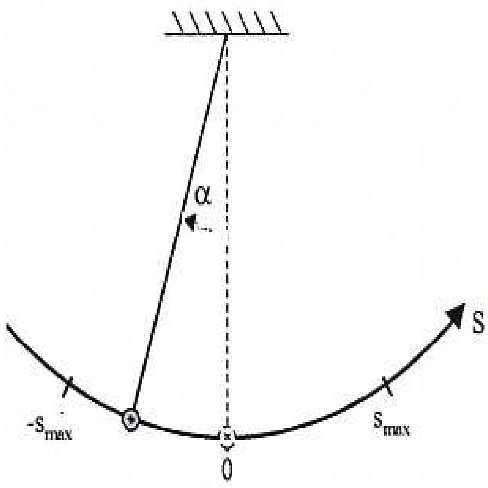
## 3. Das Fadenpendel

Wir betrachten ein Pendel, bei dem die Masse des Fadens gegenüber der Masse des angehängten Körpers vernachlässigbar ist. Der angehängte Körper wird als punktförmig betrachtet (mathematisches Pendel). Die Länge des Fadens wird mit *l* bezeichnet. Den Ort des Massenpunktes beschreiben wir durch die gekrümmte Koordinate s bzw. durch den orientierten Winkel $\alpha$.

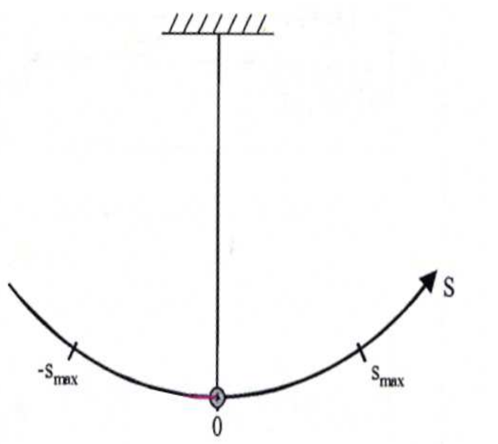
1. Der Körper befindet sich im linken Umkehrpunkt



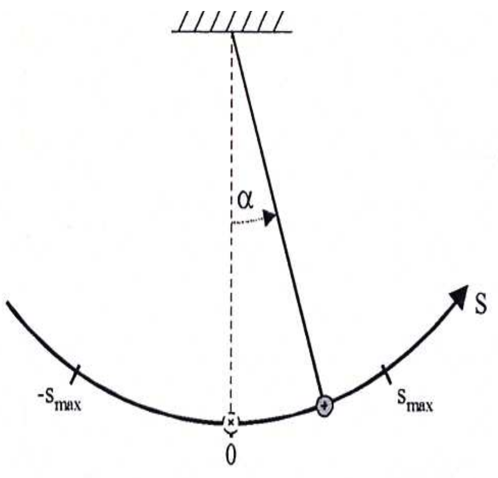

2. Die Elongation s ist negativ, aber $|s| < s_{max}$




3. Der Körper befindet sich in der Ruhelage




4. Die Elongation s ist positiv, aber $|s| < s_{max}$




Bei den Bildern 1. bis 4. soll der Körper bei verschiedenen Elongationen s als ruhend betrachtet werden. ***?????*** Zeichen Sie jeweils alle auf den Pendelkörper wirkenden Kräfte ein, sodass sich die Rückstellkraft $\vec{F}_R$ ergibt.

Die Tatsache, dass die Kraft rücktreibend ist, entnehmen wir in diesem Fall der Zeichnung.

Für den Betrag der rücktreibenden Kraft gilt dann: ($\alpha$ im Bogenmaß!)

$$\left|\vec{F}_R\right| = \left|\vec{F}_G\right| \cdot \sin|\alpha| = \left|\vec{F}_G\right| \cdot \sin\frac{|s|}{l}$$

Diese rücktreibende Kraft ist nicht proportional zur Auslenkung s. Für kleine Winkel kann aber die Näherung $\sin\alpha \approx \alpha$ verwendet werden. Dann gilt:

$$\left|\vec{F}_R\right| \approx \left|\vec{F}_G\right| \cdot |\alpha| = \left|\vec{F}_G\right| \cdot \frac{|s|}{l}$$

$\vec{F}_R$ ist immer entgegengesetzt zur Auslenkung s gerichtet. In Koordinatenschreibweise gilt:

$$F_R = m \cdot \ddot{s} = -\left|\vec{F}_G\right| \cdot \frac{s}{l} = -m \cdot |\vec{g}| \cdot \frac{s}{l};$$

Die Schwingungsdifferentialgleichung lautet damit:

$$\ddot{s} + \frac{|\vec{g}|}{l} \cdot s = 0$$

Analog zum Federpendel erhält man die Lösung

$$s = s_0 \cdot \sin(\omega t + \phi_0)$$

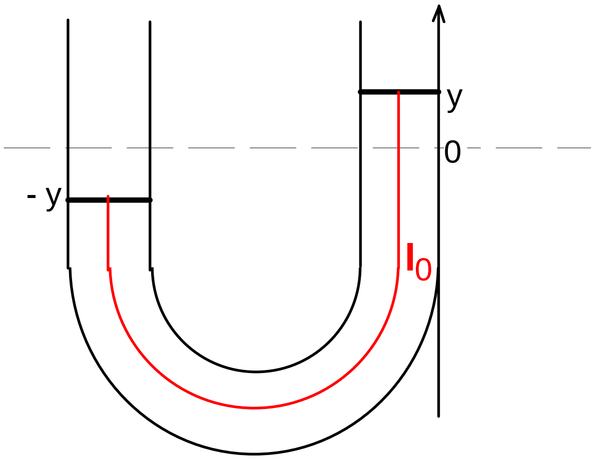
mit $\omega = \sqrt{\frac{|\vec{g}|}{l}}$ ; $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{|\vec{g}|}{l}}$ ; $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{|\vec{g}|}}$

Zusammenfassung:

Für kleine Auslenkungen führt das Fadenpendel harmonische Schwingungen aus.

- Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Masse des schwingenden Körpers.
- Mit Hilfe der Schwingungsdauer eines Fadenpendels kann man sehr präzise die Fallbeschleunigung messen.
- Für große Auslenkwinkel ist die Schwingungsdauer nicht mehr unabhängig von der Amplitude. Abhilfe: Zykloidenpendel nach Huygens

4. Schwingende Flüssigkeitssäule im U-Rohr




4.1 Zeigen Sie, dass die in einem U-Rohr von konstantem Querschnitt A pendelnde Wassersäule eine harmonische Schwingung ausführt, solange der Wasserspiegel in beiden Schenkeln über dem gekrümmten Teil des Rohres bleibt! Vergleichen Sie dazu (für y > 0) die rücktreibende Gewichtskraft der Wassersäule der Höhe 2y mit der Auslenkung y dieser Wassersäule aus der Ruhelage!

4.2 Zeigen Sie, dass für die Richtgröße D dieser Schwingung die Beziehung $D = 2\,\rho \cdot A \cdot |\vec{g}|$ gilt, wenn ρ die Dichte der Flüssigkeit ist.

4.3 Zeigen Sie, dass sich für die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{2|\vec{g}|}}$ ergibt, wobei $\ell_0$ die gesamte Länge der schwingenden Wassersäule ist.