Basis: Wirtschaftliche Anwendung

Ein Betrieb stellt drei Produkte A, B, C her. Ein Kunde bestellt achtmal das Produkt A, 12mal B und 20mal C. Diese Bestellung kann man als einen Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ darstellen, ebenso auch jeweils die einzelnen Produkte: $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Betrieb möchte die Produkte aber nun nicht extra einzeln zusammenpacken, sondern möglichst bereits vorbereitete Warenpakete verwenden. Paket X enthält dabei einmal A, zweimal B und einmal C; Paket Y enthält nur dreimal B und einmal C, Paket Z enthält nur einmal A und dreimal C. Diese Pakete kann man wiederum als Vektoren darstellen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgaben:

a) Wie viele Pakete X, Y, Z muss die Lieferung jeweils enthalten?
b) Warum ist die Frage aus (a) nicht mehr eindeutig zu beantworten, wenn Paket Z stattdessen sechsmal B und zweimal C enthält?
c) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe des Fachbegriffs „Basis“.

Lösungen

(a) Um die Bestellung aus den Paketen zusammenzustellen, braucht man x Exemplare von Paket X, y Exemplare von Paket y und z Exemplare von Paket z. Insgesamt muss dann gelten:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

was mal wieder auf ein lineares Gleichungssystem führt. Die Lösungen sind: x = 3, y = 2, z = 5.

(b) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat keine Lösung. Das liegt letztlich einfach daran, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ offensichtlich Vielfache voneinander sind, und damit sind die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig.

(c) Interpretation:

(a) Man stellt hier den Bestellvektor bezüglich der Basis der Warenkorb-Vektoren dar. *(Streng genommen bilden die drei Warenkorb-Vektoren hier aber nicht wirklich eine Basis, denn man kann nicht wirklich alle möglichen Bestellvektoren durch sie darstellen – in vielen Fällen müssten die Koeffizienten negative oder sogar nicht-ganze Zahlen sein, also wären die nötigen Anzahlen der Warenkörbe dann eben keine natürlichen Zahlen!)*
Die einzelnen Produkte bilden hier dagegen die Standardbasis; bezüglich dieser hat man die offensichtliche Darstellung

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 20 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) In diesem Fall bilden die drei Vektoren keine Basis, deshalb kann man den Bestellvektor nicht bezüglich dieser drei Vektoren darstellen.