Basis und Dimension

a) Basis

Definition: Ein Erzeugendensystem (einer Ursprungsgerade / -ebene / des Raums) ist eine Menge von Vektoren, sodass man jeden Vektor (der Ursprungsgerade / -ebene / des Raums) als Linearkombination dieser Vektoren darstellen kann.

Beispiele:

1) Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sind ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$, also der x-y-Ebene.

2) Ebenso sind die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$.

Im ersten Beispiel sind die Vektoren linear unabhängig, im zweiten nicht. Deshalb definiert man weiter:

Definition: Eine Basis ist ein Erzeugendensystem aus linear unabhängigen Vektoren.

Anders gesagt: Eine Menge von Vektoren heißt Basis, wenn man jeden Vektor eindeutig als Linearkombination dieser Vektoren darstellen kann.

b) Dimension

Wie viele Basisvektoren braucht man eigentlich?

Zunächst sollte klar sein: Für eine Basis des $\mathbb{R}^2$ braucht man mindestens zwei Vektoren, für den $\mathbb{R}^3$ mindestens drei Vektoren.

Andererseits: Ist $\vec{x}$ ein beliebiger Vektor des $\mathbb{R}^2$ und $\vec{a}, \vec{b}$ zwei linear unabhängige Vektoren, so hat die Gleichung $\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ immer eine eindeutige Lösung. Also kann man jeden Vektor des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ darstellen, d. h. nach Definition: $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{x}$ sind für jeden Vektor $\vec{x}$ immer linear abhängig. Damit folgt: Drei (oder mehr) beliebige Vektoren sind im $\mathbb{R}^2$ immer linear abhängig. Ebenso ergibt sich: vier (oder mehr) beliebige Vektoren sind im $\mathbb{R}^3$ immer linear abhängig.

Also folgt: Jede Basis des $\mathbb{R}^2$ muss genau zwei Vektoren enthalten, jede Basis des $\mathbb{R}^3$ genau drei Vektoren!

Satz und Definition: Die Anzahl der Basisvektoren eines Vektorraums ist immer gleich und heißt die Dimension des Vektorraums.

➔ überprüfen, ob n Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^m$ bilden:

1) zunächst muss n = m sein (*und die Vektoren müssen n Komponenten haben – außer, es geht um einen Unterraum eines gegebenen Vektorraums!*)
2) überprüfe, ob die Vektoren l.u. sind (Determinante $\neq 0$)