Graphen: siehe z. B. FT12, Analysis II!

Lösungen VI.1

2007 – AI/2.1 $\quad a(t) = \dfrac{F_S}{m - \mu t}$; $\quad a(0) \approx 18$; $\quad a(150) \approx 30$

2005 – AI/2.1

$V = 1000 = a^2h \Rightarrow h = \dfrac{1000}{a^2}$

$F = (h + 2\cdot 0{,}5a + 2\cdot 1)\cdot(4\cdot a + 1) = 4a^2 + 9a + 2 + 4ah + h = 4a^2 + 9a + 2 + \dfrac{4000}{a} + \dfrac{1000}{a^2}$

2003 – AI/2.1

$V = 100\text{ l} = 100\,000\text{ cm}^3 = Gh = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\,a^2\cdot h \Rightarrow h = \dfrac{100\,000\,\text{cm}^3}{\frac{3}{2}\sqrt{3}a^2}$

$A = G + 6\cdot ah = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\,a^2 + 6ah = \dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a^2 + \dfrac{400\,000\,\text{cm}^3}{\sqrt{3}a}$

2004 – AII/3.1

$V = Gh = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

$O = G + M = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$

aus Schulbuch:

$V = 2r\cdot r\cdot l + \dfrac{1}{2}\cdot\pi r^2 l = \dfrac{1}{2}(4 + \pi)r^2 l \Rightarrow l = \dfrac{2V}{(\pi + 4)r^2}$

$O = 2r\cdot l + 2\cdot 2r\cdot r + 2\cdot r\cdot l + 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\pi r^2 + \dfrac{1}{2}\cdot 2\pi rl = 4rl + \pi rl + 4r^2 + \pi r^2$

$= (\pi + 4)r^2 + (\pi + 4)rl = (\pi + 4)r^2 + \dfrac{2V}{r}$

2000 – AII/2

2.1 $y = mx + b$; P einsetzen $\Rightarrow b = 3 - 5m \Rightarrow y = mx + 3 - 5m$

2.2 $y = 0 \Rightarrow mx + 3 - 5m = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5m - 3}{m} \Rightarrow A_m\left(\dfrac{5m-3}{m}\middle|0\right)$; $\quad x = 0 \Rightarrow y = 3 - 5m \Rightarrow B_m(0|3-5m)$

2.3 Pythagoras: $\ell^2(m) = (3 - 5m)^2 + \left(\dfrac{5m-3}{m}\right)^2 = (3 - 5m)^2 + \dfrac{(3-5m)^2}{m^2} = (3 - 5m)^2\cdot\left(1 + \dfrac{1}{m^2}\right)$

Lösungen VI.2

1) a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1{,}5\}$ $\quad$ b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}\}$ $\quad$ c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\pm\sqrt{3}\}$ $\quad$ d) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\quad$ e) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$

f) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1; -2\}$ $\quad$ g) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\quad$ h) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0{,}5;-1\}$

2) a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$; $x_1 = \frac{2}{3}$ einfach b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0;2\}$; $x_1 = 1{,}5$ einfach

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0;3\}$; ($x_1 = 3 \notin \mathbb{D}$) $x_2 = -1{,}5$ einfach d) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1;2\}$; ($x_1 = 2 \notin \mathbb{D}$) $x_2 = -\frac{4}{3}$ einfach

3) a) $2x + 1$ b) $x^2 + 1$ c) $x^2 - 2x + 4$ d) $-3x^2 + x + 2$ e) $\frac{1}{8}x - 1$ f) $0{,}3x + 0{,}2$ g) $0{,}2x + 4$
h) $4x + 8$

Lösungen VI.3

4) a) $x + \frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4x}$ c) $x + 2 + \frac{2}{x-1}$ d) $-\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x - \frac{66}{125} + \frac{\frac{139}{125}}{4-5x}$ e) $-2x^3 - \frac{1}{3-4x}$
f) $x^4 - 2 + \frac{1}{x^2-1}$ g) $2x + a + \frac{a^2}{x-a}$ h) $r + \frac{2r^2x}{(x-r)^2}$

5) a) ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$; keine s. A.;) w. A.: $y = 1$; $x_{1,2} = \pm 1$ beide einfach
b) ($\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$; $x_1 = -2$ ist SHD, $x_2 = 2$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. $x = 2$;) w. A. $y = 1$; $x_1 = 0$ einfach
c) ($\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; $x_1 = 2$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. $x = 2$;) sch. A. $y = x + 2$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ beide einfach
d) ($\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; $x_{1,2} = \pm 1$ sind Pole 1. Ordnung ➔ s. A. $x = -1$ und $x = 1$;) sch. A. $y = x$; $x_1 \approx -1{,}32$
e) ($\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1;-0{,}5\}$; $x_1 = 1$ ist SHD; $x_2 = -0{,}5$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. $x = -0{,}5$;) w. A. $y = 0$; keine Nullstellen
f) ($\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$; $x_1 = -2$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. $x = -2$;) sch. A. $y = \frac{2}{3}x - 3$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2{,}5$ beide einf.
g) ($\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; $x_1 = 1$ ist Pol 1. Ordnung für alle $a > 0$ ➔ s. A. $x = 1$;) w. A. $y = a$; $x_1 = -\frac{1}{a}$ für alle $a > 0$
h) ($\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{4}{\sqrt{a}}\}$ für $a > 0$, sonst: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; für $a > 0$: $x_2 = \frac{4}{\sqrt{a}}$ ist Pol 1. Ordnung ➔ s. A. $x = \frac{4}{\sqrt{a}}$;
$x_1 = -\frac{4}{\sqrt{a}}$ ist SHD für $a = 4^{2/3}$, sonst Pol 1. Ordnung ➔ s. A. $x = -\frac{4}{\sqrt{a}}$;) w. A. $y = \frac{1}{a}$ für $a \neq 0$, sonst keine w. A.; $x_1 = 0$; $x_2 = -a$; doppelt für $a = 0$, sonst beide einfach

Lösungen VI.4

6) a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; $x_1 = 1$ ist Pol 1. Ordnung b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$; $x_1 = 2$ ist Pol 1. Ordnung; $x_2 = -2$ ist SHD
c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-3;-4\}$; $x_1 = -3$ und $x_2 = -4$ sind Pole 1. Ordnung d) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0;3\}$; $x_1 = 0$ ist SHD; $x_2 = 3$ ist Pol 1. Ordnung e) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0{,}5;-4\}$; $x_1 = 0{,}5$ ist Pol 1. Ordnung; $x_2 = -4$ ist SHD
f) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0; 2\}$; $x_1 = 0$ ist Pol 1. Ordnung; $x_2 = 2$ ist SHD

7) a) $x_1 = -0{,}4$ ist Pol 1. Ordnung b) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ sind Pole 1. Ordnung c) $x_1 = 1$ ist Pol 1. Ordnung; $x_2 = -1$ ist SHD d) $x_1 = -2$ ist SHD e) $x_1 = 1$ ist SHD; $x_2 = -2$ ist Pol 1. Ordnung f) $t_1 = -1$ ist SHD
g) $x_1 = 1$ ist Pol 1. Ordnung h) $x_1 = -2$ ist SHD

8) a) $x_1 = 0$ Pol 1. Ordnung; s. A. $x = 0$; w. A. $y = -1$
b) $x_1 = 0$ Pol 1. Ordnung; s. A. $x = 0$; w. A. $y = 2$
c) $x_1 = 0$ Pol 1. Ordnung; s. A. $x = 0$; sch. A. $y = 0{,}5x$
d) $x_1 = 0$ Pol 1. Ordnung; s. A. $x = 0$; sch. A. $y = 0{,}5x$
e) $x_1 = 0$ Pol 2. Ordnung; s. A. $x = 0$; w. A. $y = 1$
f) $x_1 = 0$ Pol 2. Ordnung; s. A. $x = 0$; w. A. $y = 2$

g) $x_1 = 0$ Pol 2. Ordnung; s. A. x = 0; sch. A. y = x
h) $x_1 = 0$ Pol 2. Ordnung; s. A. x = 0; sch. A. y = x
i) $x_1 = 0$ Pol 1. Ordnung; s. A. x = 0; sch. A. y = –0,5x
j) $x_1 = 0$ Pol 2. Ordnung; s. A. x = 0; sch. A. y = 2x
k) $x_1 = 0$ Pol 2. Ordnung; s. A. x = 0; sch. A. y = 0,5x + 1
l) $x_1 = 0$ Pol 2. Ordnung; s. A. x = 0; sch. A. y = –x + 1

9) a) s. A. x = 0; w. A. y = 0 b) s. A. x = 0; w. A. y = 0 c) s. A. x = 1; w. A. y = 0
d) s. A. x = 2; w. A. y = 0 e) s. A. x = 0; sch. A. y = x f) s. A. x = 0; sch. A. y = 0,5x + 1
g) s. A. x = –1; sch. A. y = 2x h) s. A. x = 0; w. A. y = –3 i) s. A. x = –2; A.k. $y = x^2$
j) keine s. A.; w. A. y = 0 k) s. A. t = –0,5; w. A. y = 2 l) s. A. a = –0,2; w. A. y = 0,4
m) s. A. x = 0, $x = -\frac{1}{6}$; w. A. y = 0,5 n) s. A. x = 1; sch. A. y = x + 1
o) s. A. x = –1; sch. A. y = –2x + 2 p) s. A. $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$; sch. A. y = –0,5x

10) a) N: $x_1 = 2$ einfach; P: $x_1 = -0{,}5$ 1. O.; s. A. x = –0,5; w. A. y = 0
b) N: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ beide einfach; P: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ 1. O.; s. A. x = 2, x = –1; w. A. y = 3
c) N: $x_{1,2} = 0$ doppelt; P: $x_1 = 1$ 1. O.; s. A. x = 1; w. A. y = 0
d) N: $x_1 = \pm 1$ beide einfach; keine P; keine s. A; w. A. y = 1
e) N: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ beide einfach; P: $x_1 = -1$ 1. O.; s. A. x = –1; sch. A. y = x – 4
f) N: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ beide einfach; P: $x_{1,2} = \pm 1$ 1. O.; s. A. x = –1, x = 1; w. A. y = 1
g) keine N: $x_1 = 2$ einfach; keine P; keine s. A.; w. A. y = 1
h) N: $x_1 = -3$ einfach; keine P; keine s. A. (sch. A. y = x + 3) f(x) = x + 3 !
i) keine N; keine P; keine s. A.; keine w./sch. A. $f(x) = x^2 + 1$!

Lösungen VI.5

11) a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$ c) $f(x) = -2 + \frac{1}{x(x-2)}$ d) $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$
e) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-3}$ f) $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2+1}$ g) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{1}{x^2-4}$ h) $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x^2+1}$

12) a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = -x + \frac{1}{x^2}$ c) $f(x) = x - \frac{1}{x-2}$

13) a) $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-4)(x+5)} = \frac{x^2+x-2}{x^2+x-20}$ b) $f(x) = \frac{(x-0{,}5)x}{(x-\sqrt{2})(x+1)} = \frac{x^2-0{,}5x}{x^2+(1-\sqrt{2})x-\sqrt{2}}$

14) a) $f(x) = 1 - x + \frac{1}{x+1}$ b) $f(x) = 3 + \frac{3}{x-2}$

Lösungen VI.6

2000 – AI

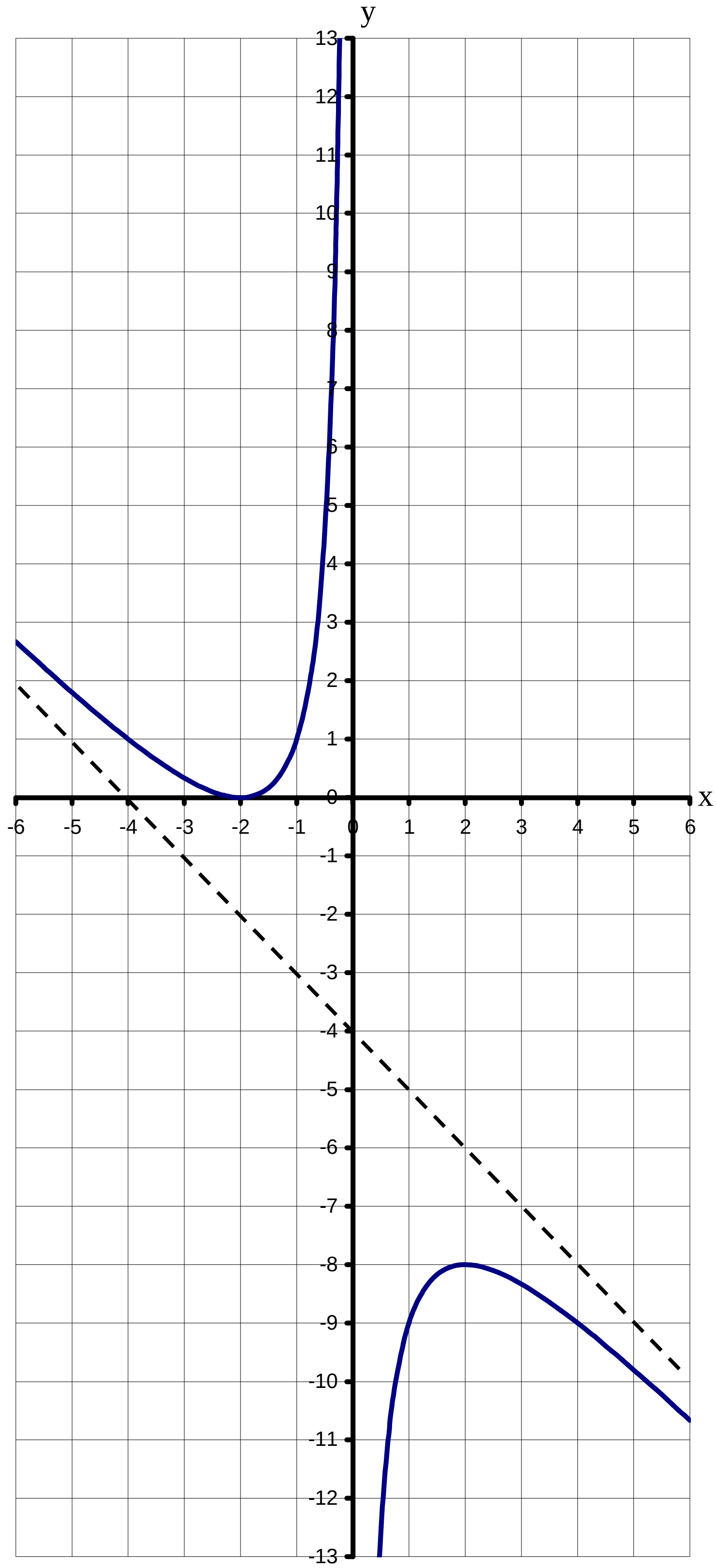
1.1 a = 0: $x_1 = 0$ ist SHD; sonst Pol 1. Ordnung

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+a}$ beide einfach für $a > -4$, $a \neq 0$; $x_1 = -4$ einfach für a = 0;

$x_{1,2} = -2$ doppelt für $a = -4$; sonst keine Nullstellen

1.2 s. A. x = 0 (nur für $a \neq 0$!), sch. A. $y = -x - 4$

1.7

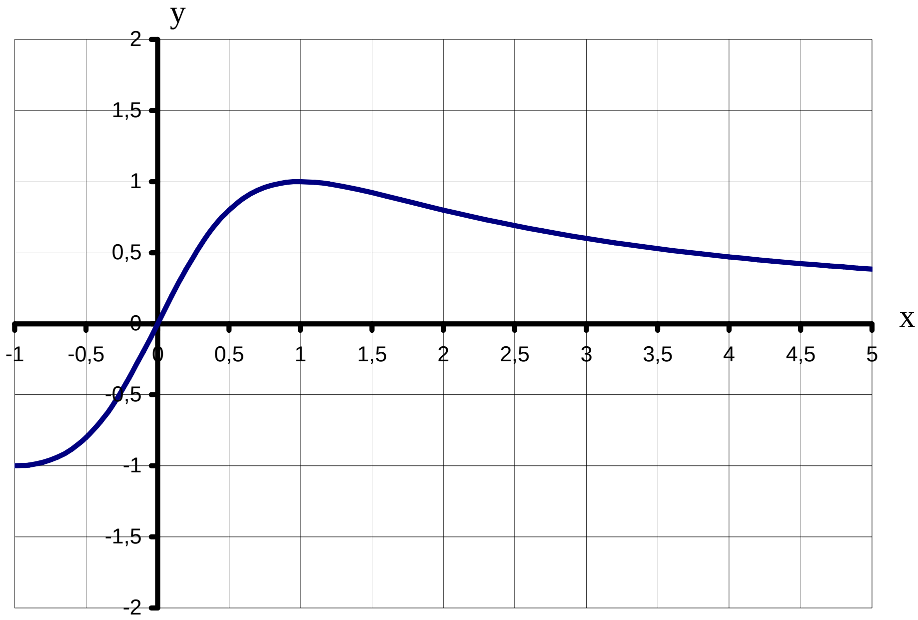


2001 – AII

2.1 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ für k > 0; $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ für k = 0; $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\pm\sqrt{k}\}$ für k < 0

2.2 symmetrisch zum Ursprung; w. A. y = 0

2.4



2002 – AI

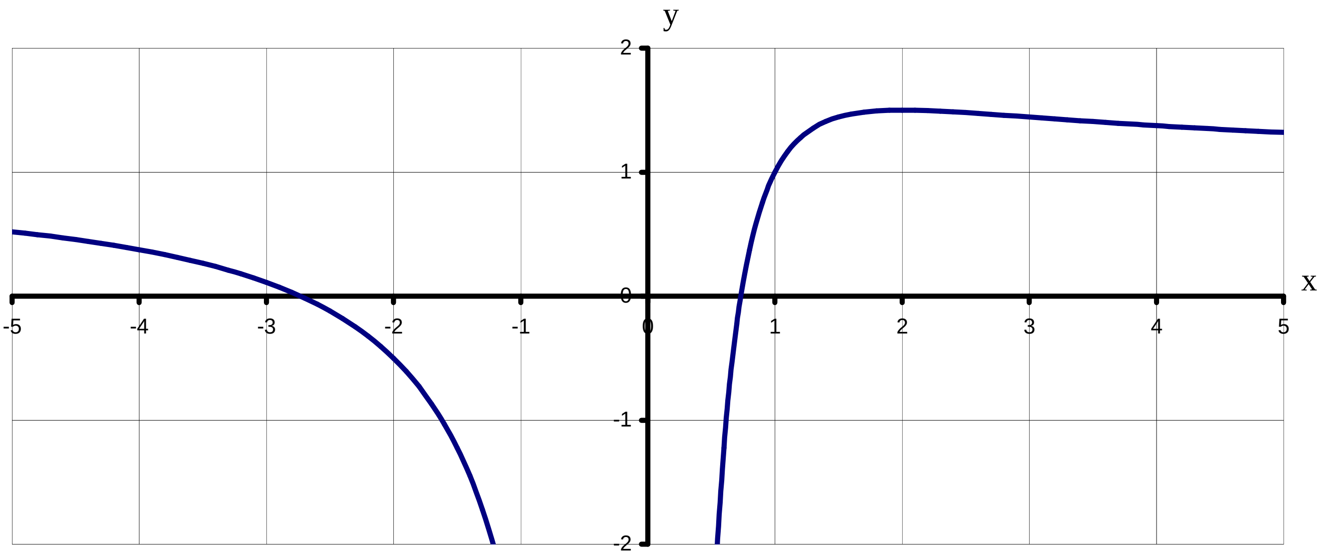
1.1 für t = 0: $x_1 = 0$ ist SHD; sonst: Pol 2. Ordnung

$x_{1,2} = \dfrac{t \pm \sqrt{t^2 - 4t}}{2}$ beide einfach für t > 4 oder t < 0; $x_{1,2} = 2$ doppelt für t = 4;

keine Nullstellen für $0 \leq t < 4$

1.2.1 $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ ➔ $x_1 \approx 0{,}7$; $x_2 \approx -2{,}7$ beide einfach; s. A. x = 0; w. A. y = 1

1.2.4



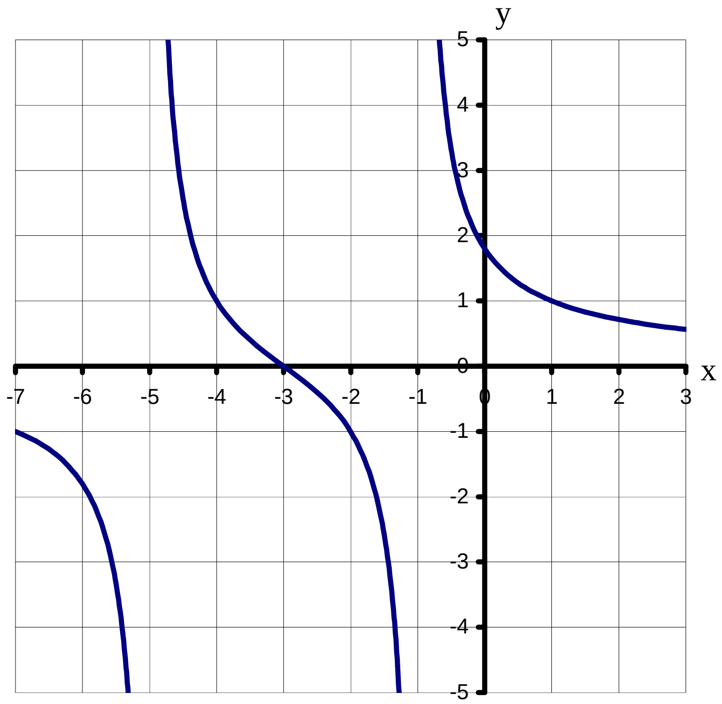
2003 – AII

1.1 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ für a > 9; $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$ für a = 9; $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-3 \pm \sqrt{9-a}\}$ für a < 9

a > 9: keine Definitionslücken; a = 9: $x_1 = -3$ ist SHD; a < 9: $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-a}$ sind Pole 1. Ordnung

$a \neq 9$: $x_1 = -3$; sonst keine Nullstelle

1.4 s. A. x = –5 und x = –1; w. A. y = 0

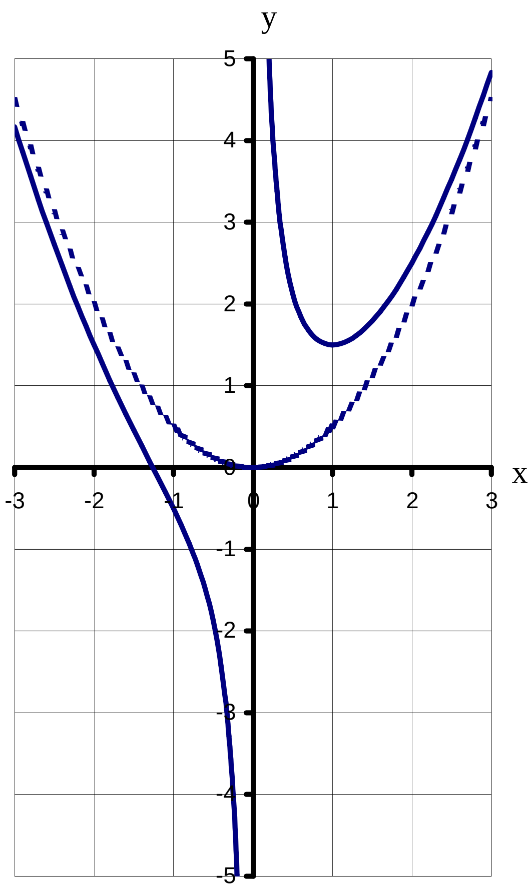


2004 – AI

1.1 s. A. x = 0; w. a. y = 0

1.2 $x_1 = \sqrt[3]{-2k}$ für k < 0; $x_1 = -\sqrt[3]{2k}$ für $k \geq 0$

1.4.3



1.4.4 $|f_1(x) - p(x)| < 0{,}05$ ➔ $\left|\frac{1}{x}\right| < 0{,}05$ ➔ x > 20 oder x < –20

2006 – AII

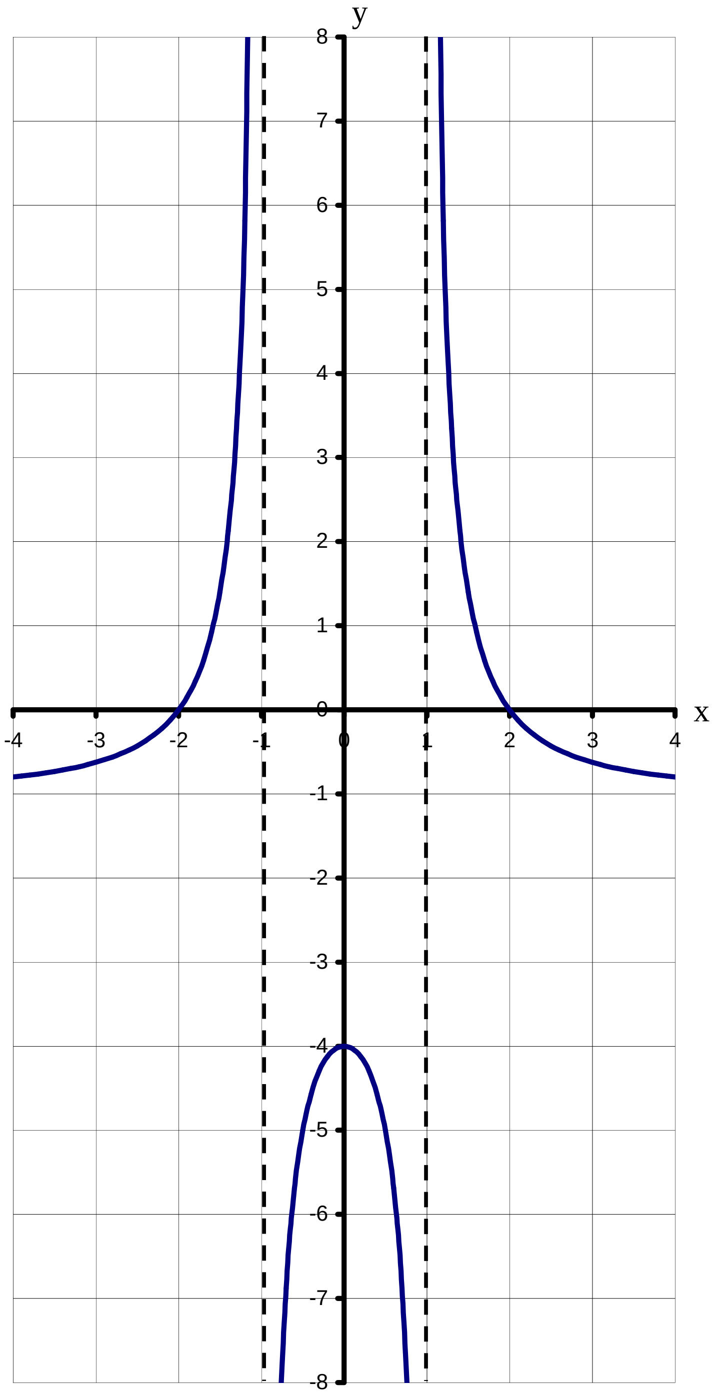
1.1 $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; a = 1: $x_{1,2} = \pm 1$ sind SHD; sonst: $x_{1,2} = \pm 1$ sind Pole 1. Ordnung

1.2 $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$ beide einfach für $a \neq 1$, keine Nullstellen für a = 1

symmetrisch zur y-Achse (nur gerade Exponenten)

1.3.1 w. a. y = –1 (z = n ➔ Quotient der Leitkoeffizienten); s. A. x = –1 und x = 1 (an Polstellen)

1.3.4



2004 – AII

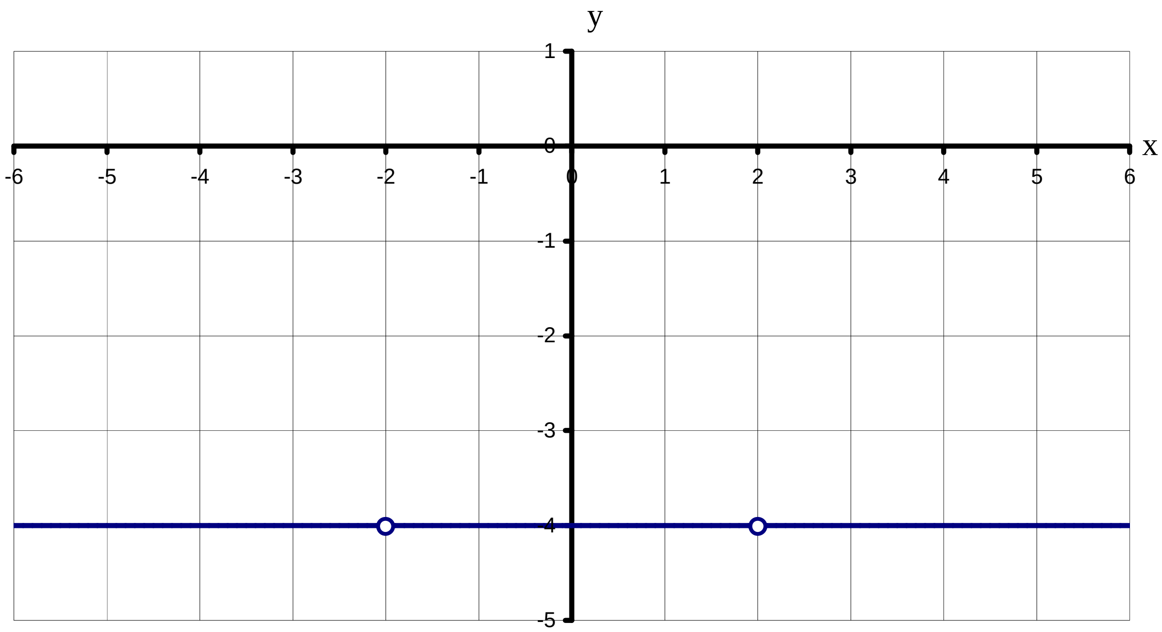
2.1 keine Nullstelle für $0 < a \leq 0{,}5$ (bei a = 0,5: beachte $\mathbb{D}$!); $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{a}}$ für a > 0,5 oder a < 0

2007 – AI

1.1 $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\sqrt{k}\}$ für k > 0; $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ für k = 0; $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ für k < 0

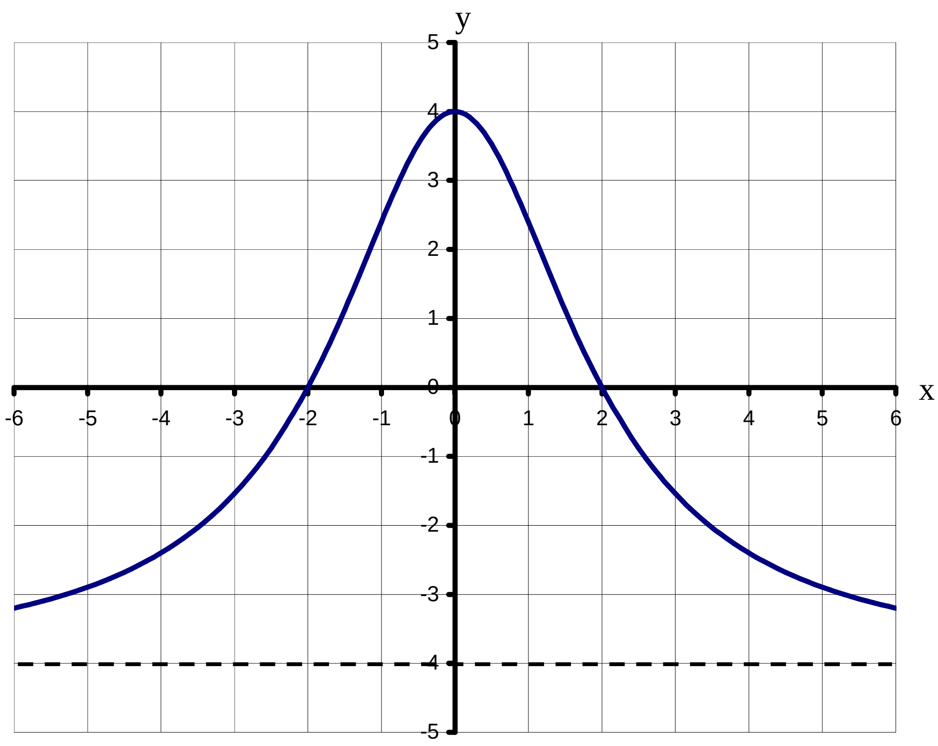
1.2 symmetrisch zur y-Achse (nur gerade Exponenten)

1.3 $x_{1,2} = \pm 2$ sind SHD



1.4 $x_{1,2} = \pm 2 \in \mathbb{D}$ für $k \neq 1$ (beide einfach); w. A. $y = -4$

1.6.2



2009 – AII

1.1 $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\pm\sqrt{-a}\}$ für $a < 0$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ für $a > 0$

$a < 0$: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$ sind Pole 1. Ordnung; $a > 0$: keine Definitionslücken

1.2 symmetrisch zum Ursprung (Zähler ungerade, Nenner gerade)

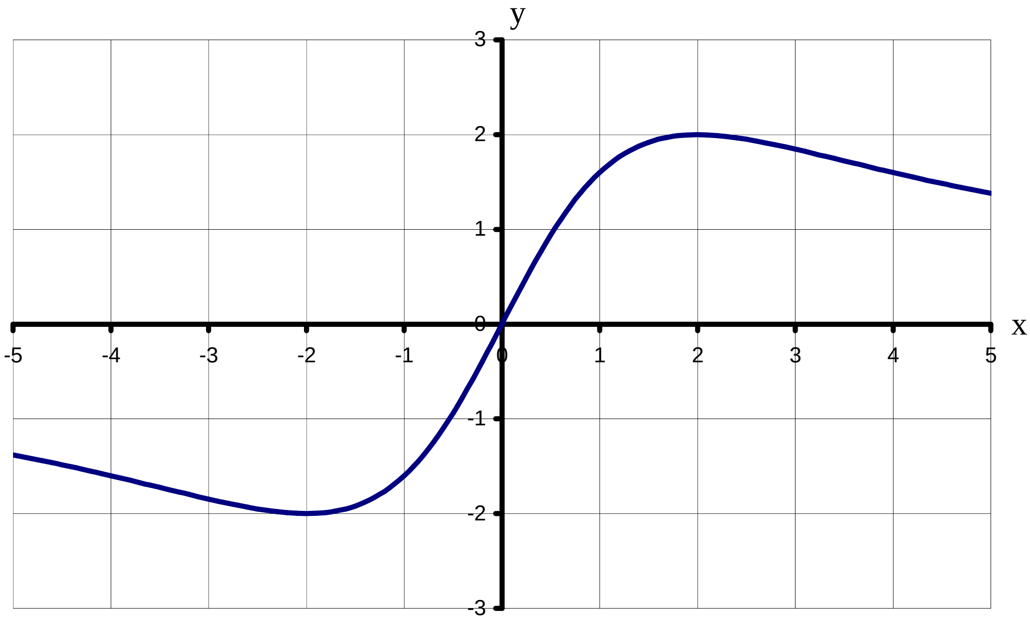
w. A. $y = 0$; s. A. $x = \sqrt{-a}$ und $x = -\sqrt{-a}$ für $a < 0$, sonst keine s. A.

1.4.6 $\frac{8x}{x^2+4} = mx \Leftrightarrow x\,(mx^2 + 4m - 8) = 0$ ➔ $x_1 = 0$ ist immer Lösung

➔ $mx^2 + 4m - 8 = 0$ darf keine Lösung haben; dies ist der Fall für $m = 0$ oder für $\frac{8-4m}{m} < 0$

➔ .... $m \leq 0$ oder $m > 2$

1.4.3



2010 – AII

1.1 $a = 2$: $x_{1,2} = 1$ doppelt; $a = -2$: $x_{1,2} = -1$ doppelt; $-2 < a < 2$: keine Nullstellen;

$a < -2$ oder $a > 2$: $x_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ beide einfach

1.2 $x_1 = 0$ ist Pol 2. Ordnung ➔ s. A. $x = 0$; w. A. $y = 1$

1.5