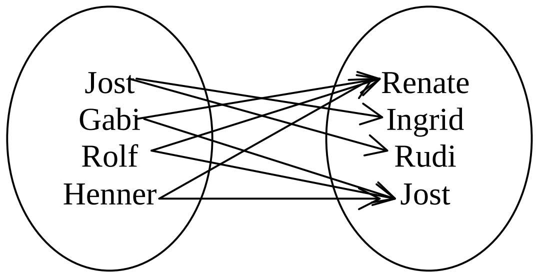
Lösungen IV.1

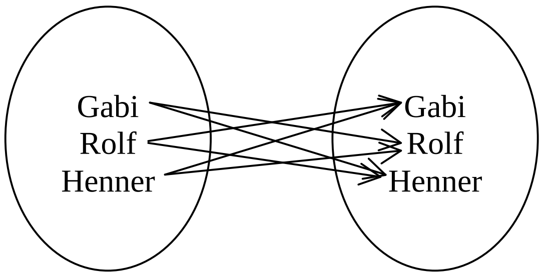
1) a) F b) F c) Z d) F e) R f) Z g) Z h) F i) Z j) F

2) a) (1) $x \mapsto x$ (2) $x \mapsto x + 1$ (3) $x \mapsto x^2$ (4) $x \mapsto 2x$ (5) $x \mapsto x + 3$ (6) $x \mapsto 3x - 1$
b) (1) $\mathbb{W} = \{1, 2, 3\}$ (2) $\mathbb{W} = \{2, 3, 4\}$ (3) $\mathbb{W} = \{1, 4, 9\}$ (4) $\mathbb{W} = \{2, 4, 6\}$ (5) $\mathbb{W} = \{4, 5, 6\}$
(6) $\mathbb{W} = \{2, 5, 8\}$

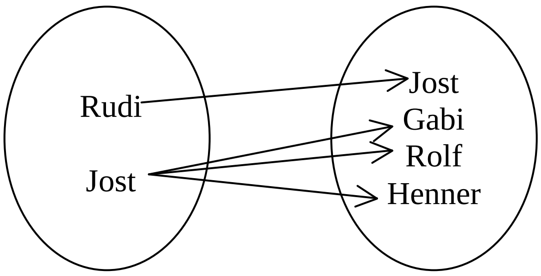
3) a)



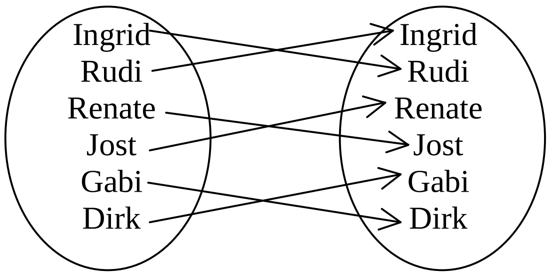
b)



c)



d)



4) a) nein (hängt vom Alter ab) b) nein (verschiedene Personen haben selben Namen)
c) ja d) nein e) ja f) nein g) ja H) ja i) ja k) ja l) nein m) ja

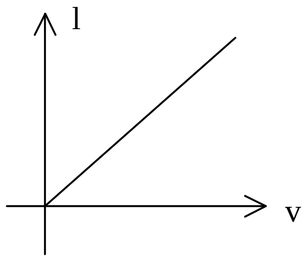
5) a) ja b) nein c) ja d) nein

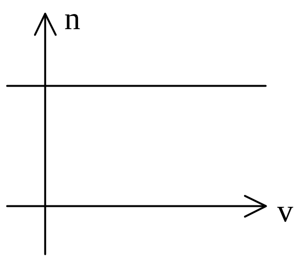
6) A2: Zeit, Geschwindigkeit; B4: Zeit, Geschwindigkeit; C1: Masse, Kosten; D3: Zeit, Anzahl

7) a) 10 km/h = $2,\overline{7}$ m/s ➔ etwa 2,3 Sprünge pro Sekunde
b)

v [km/h]	10	20	30	40	50
l [m]	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0
n [Sprünge/s]	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3

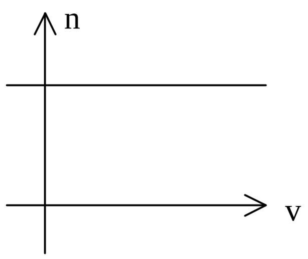
c)

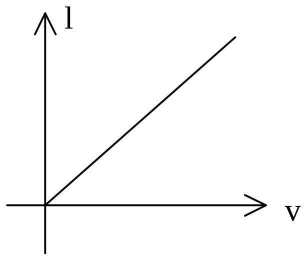




d) l ist gleich; n ist bei schnellerem Läufer größer

e)





Endkontroll-Blatt:
1) Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung (jedem Wert aus der Ausgangsmenge wird eindeutig ein Wert der Zielmenge zugeordnet).

2) a) ja b) nein c) ja d) nein e) ja f) ja g) nein h) ja i) ja j) ja k) ja

3) a) ja b) nein c) ja d) ja e) ja f) nein g) ja h) ja

Lösungen IV.2

Proportionalitäten:
1) a) ja (ohne Mengenrabatt) b) nein c) ja (bei konstanter Geschwindigkeit) d) ja (bei konstanter Geschwindigkeit, konstanter Steigung) e) ja (bei gleicher Zeit) f) ja (bei gleichem Durchfluss) g) ja h) nein i) nein k) nein

2) a)

x	$\frac{1}{3}$	1	5	10	15
y	1	3	15	30	45

b)

x	–3	–2	$\frac{1}{2}$	1	3
y	6	4	–1	–2	–6

c)

x	0	1	4	14	28
y	0	$\frac{1}{4}$	1	3,5	7

d)

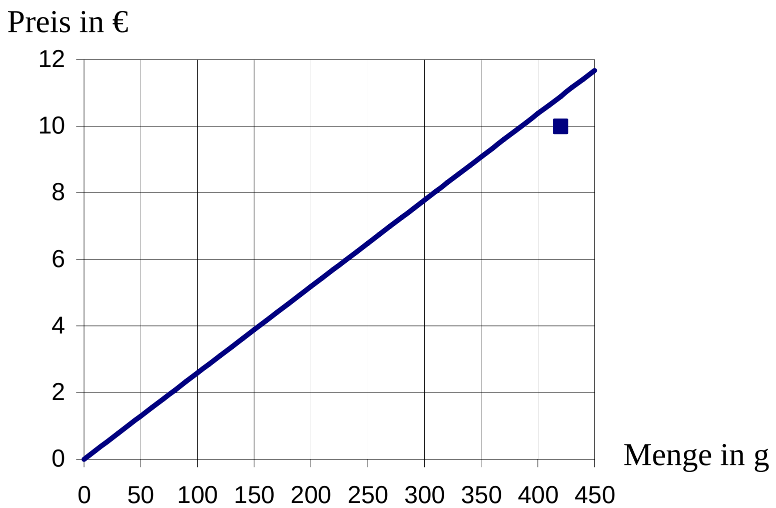
x	–2	1	$\frac{2}{3}$	4	–6
y	3	–1,5	–1	–6	9

3) a) 4 Kiwis $\mapsto$ 1,20 € ➔ 1 Kiwi $\mapsto$ 0,30 € ➔ 13 Kiwis $\mapsto$ 3,90 €

b) $\frac{x}{1{,}6\text{ kg}} = \frac{0{,}89\text{ €}}{1\text{ kg}}$ ➔ x = 1,424 €

c) 1,47 € = c · 3 Dosen ➔ c = $0{,}49\frac{\text{€}}{\text{Dose}}$ ➔ $0{,}49\frac{\text{€}}{\text{Dose}}\cdot 29$ Dosen = 9,31 €

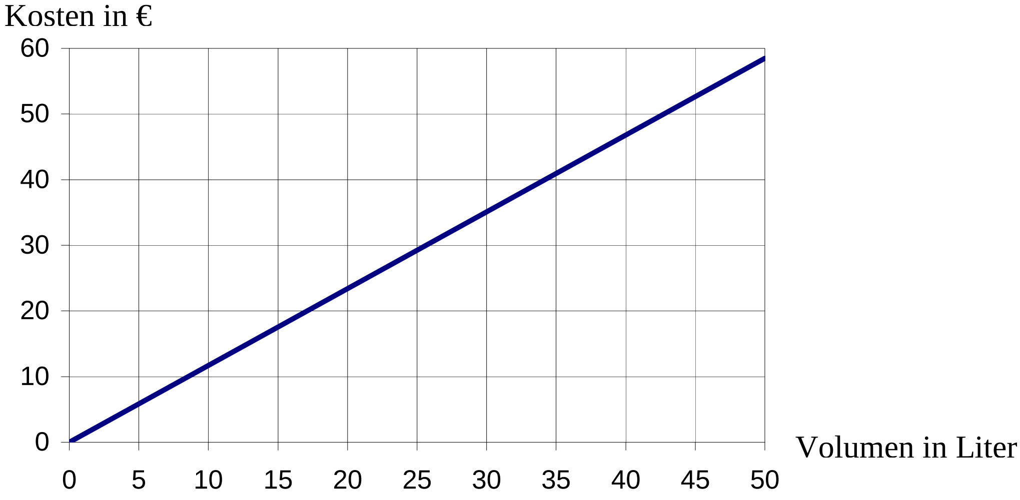
d)



4) a)

V	1	3	5	10	20	30	50
K	1,17	3,51	5,85	11,70	23,40	35,10	58,50

b)



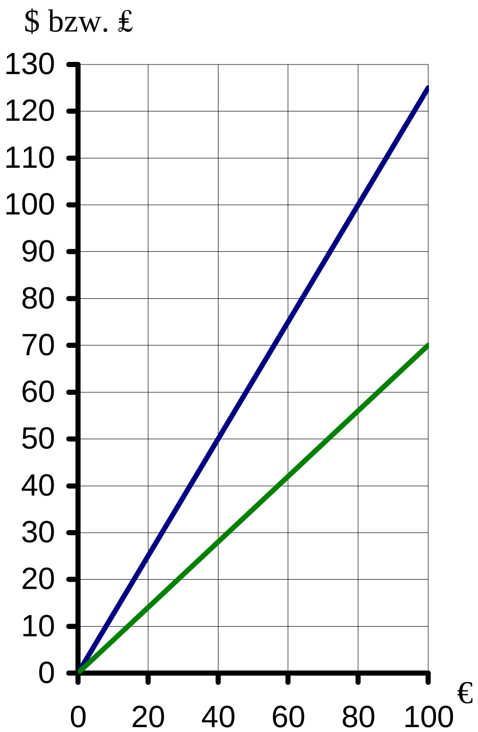
c) 15 Liter = 10 Liter + 5 Liter ➔ Kosten: 5,85 € + 11,70 € = 17,55 €
(oder: 15 Liter = 3 · 5 Liter ➔ 3 · 5,85 € = 17,55 €)
8 Liter = 5 Liter + 3 Liter ➔ Kosten: 5,85 € + 3,51 € = 9,36 €
(oder: 8 Liter = 8 · 1 Liter ➔ Kosten: 8 · 1,17 € = 9,36 €)

d) $K = P \cdot V$; hier: $K = 1{,}17 \frac{€}{\text{Liter}} \cdot V$; $\qquad 20\ € = 1{,}17 \frac{€}{\text{Liter}} \cdot V$ ➔ $V \approx 17{,}1$ Liter

5) a) allgemein: $K = P \cdot m$; $\qquad$ 1. Ware: $K = 0{,}40 \frac{€}{\text{kg}} \cdot m$; $\qquad$ 2. Ware: $K = 2{,}50 \frac{€}{\text{kg}} \cdot m$

b) ab 15 Stück gibt es Mengenrabatt: der Preis sinkt von $2{,}50 \frac{€}{\text{Stück}}$ auf $2{,}00 \frac{€}{\text{Stück}}$

6) a) 1 € ist mehr wert als 1 \$, aber weniger als 1 £
b)



c) in New York: 42 €; in London: 44 €

d)

	€	\$	₤
€	1	1,25	0,70
\$	0,8	1	0,56
₤	1,43	1,79	1

7) a) y = 2x + 1

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

b) y = 3x

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

c) y = ???

x	1	2	3	4	5
y	3	6	7	9	12

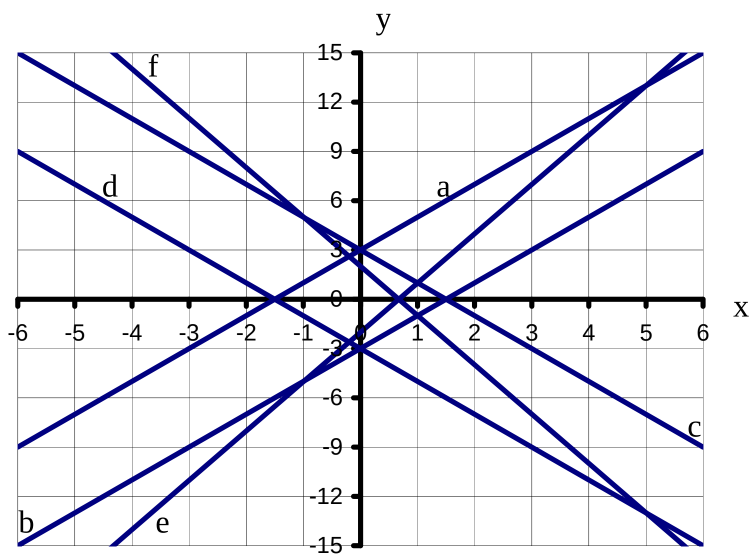
lineare Funktionen:

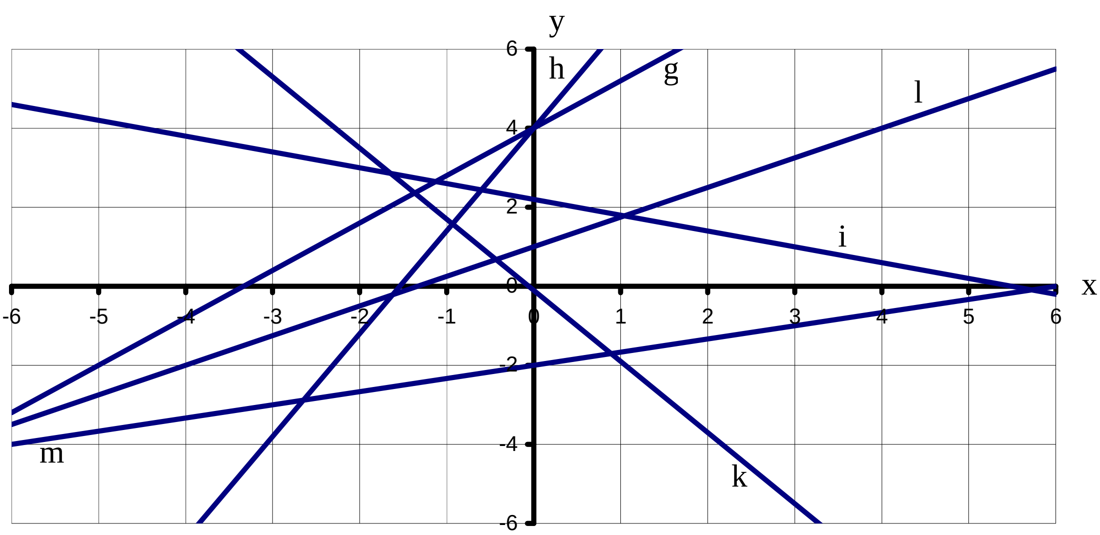
1) a) Pilatus-Bahn (geht auf sehr kurzer Länge sehr hoch hinauf)

b) $m_{Pilatus} \approx 0{,}418$ = 41,8%; $m_{Zugspitz} \approx 0{,}173$ = 17,3%;   Steigung von 100% entspricht Steigungswinkel 45°

c) kleiner (z. B. entspricht 45° dann nur einer Steigung von etwa 70,7%)

2)





3) a) A unter, B auf, C über b) A über, B auf, C unter c) A auf, B unter, C über

4) g_1: $y = \frac{2}{3}x$; g_2: $y = 4x - 2$; g_3: $y = x - 4$; g_4: $y = 3$; g_5: $y = -0{,}5x + 5$; g_6: $y = -3x - 3$

5) a) Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten (1. Winkelhalbierende) b) Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten (2. Winkelhalbierende) c) parallel zur x-Achse im Abstand 2 nach oben
d) parallel zur x-Achse im Abstand 1 nach unten e) parallel zur y-Achse im Abstand 3 nach rechts
f) parallel zur y-Achse im Abstand 2 nach links
Die Geraden in e und f sind keine Funktionsgraphen.
b) $y = -1 \cdot x + 0$ c) $y = 0 \cdot x + 2$ d) $y = 0 \cdot x - 1$

6) a) $x = 4$ b) $x = -1$ c) $x = -18$

7) a) $x = 0{,}5$ b) $x = -1$ c) $x = 10$ d) $x = 5$

8) a) $y = 2x - 6$ b) $y = \frac{1}{3}x - 1$ c) $y = -0{,}5x + 1{,}5$ d) $y = -4x + 12$

9) a) $S_x(-2|0)$; $S_y(0|4)$ b) $S_x(1{,}5|0)$; $S_y(0|-3)$ c) $S_x(3|0)$; $S_y(0|2)$ d) $S_x(-4|0)$; $S_y(0|-3)$
e) $S_x(-0{,}75|0)$; $S_y(0|0{,}6)$

10) a) $y = 1{,}5x - 1$ b) $y = 3x - 7$ c) $y = x - 2$ d) $y = -\frac{3}{8}x + \frac{31}{8}$ e) $y = -0{,}5x + 7$

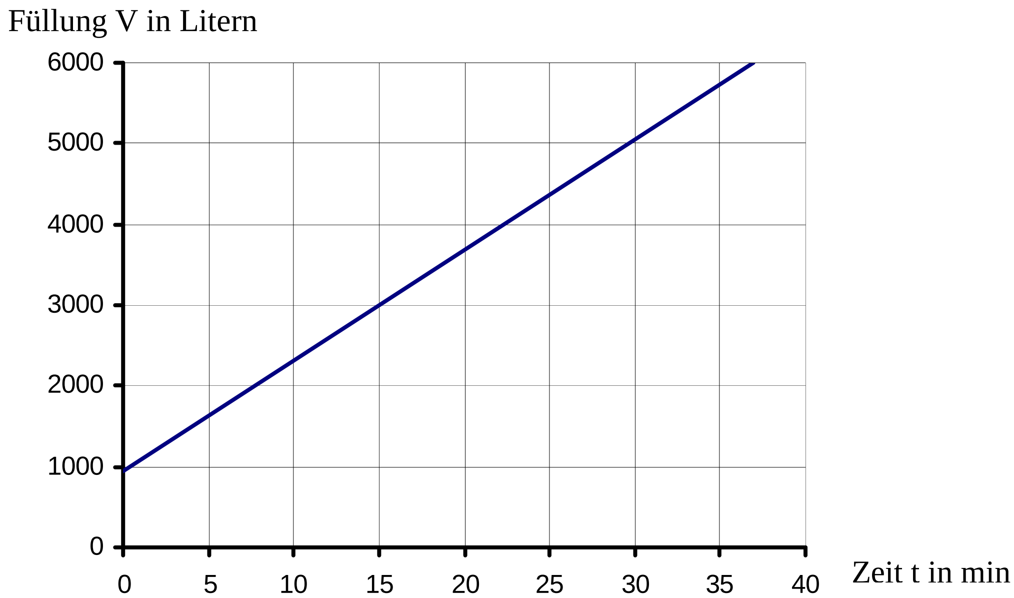
11) a) $y = 3x + 2$ b) $y = -x - 3$ c) $y = 0{,}5x + 1$ d) $y = 1{,}5x - 1$ e) $y = 2x + 1$ f) $y = 2x - 3$
g) $y = 0{,}5x - 1$ h) $y = -1{,}5x + 2$ i) $y = \frac{2}{3}x + 2$ k) $y = -2$ l) $y = -0{,}5x - 0{,}75$ m) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

12) a)

a	20	25	30	35	40	45	50
n	300	600	900	1200	1500	1800	2100

b) 60 Wörter pro Monat (Steigung!) c) –300 Wörter: Formel hier nicht anwendbar!
d) bis zum 2015. Monat, also 167 Jahre 11 Monate

13) a)



b) $V = 136\frac{4}{11}\frac{\text{Liter}}{\text{min}} \cdot t + 954\frac{6}{11}\ \text{Liter} \approx 136{,}36\frac{\text{Liter}}{\text{min}} \cdot t + 954{,}55\ \text{Liter}$ c) etwa 955 Liter d) 37 min

14) a) 6,048 Mio. m^3 pro Tag; so weit wie möglich geleert: 69 Mio. m^3

t in Tagen	0	2	4	6	8	10
V in Mio. m^3	69	81,096	93,192	105,288	117,384	139,48

c) V = 6,048 Mio. m^3/Tag · t + 69 Mio. m^3 d) etwa 12,4 Tage e) etwa 86,8 Tage bzw. 173,6 Tage
f) $111,\overline{1}$ % bzw. $55,\overline{5}$ %

15) a) Luftdruck ist in größerer Höhe niedriger ➔ Wasser kann leichter verdampfen
b) y = –0,00339 °C/m · x + 100°C c) etwa 95,1°C; etwa 99,3°C (Schwebheim: 213 m)
d) etwa 2950 m (Zugspitze) e) Höhe: etwa 7994 m ➔ noch etwa 850 m

16) a) etwa 20,3 cm b) 649 s bzw. 618 s ➔ etwa 5% darüber c) Geschwindigkeit nicht immer gleich; Kurve muss am Anfang steiler, am Ende flacher als Gerade verlaufen d) $h = -\frac{320}{240} \cdot t + 320$; sie treffen sich nach etwa 175 s, in einer Höhe von etwa 86,4 m, also etwa im 24. Stockwerk

17) a) S(–1|1) b) S(–1|3) c) S(2|4,5) d) S(2|0) e) – f) S(4,8|1,4)

18) a)

x in h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_1 in cm	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
h_2 in cm	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0

T(x) = 15 – x bzw. T(x) = 30 – 3x ➔ $h_1 = 15 - x$ bzw. $h_2 = 30 - 3x$
c) 7,5 h bzw. 15 h bzw. 10 h

19) a) $y = \frac{8}{3}x$ bzw. $y = -\frac{4}{3}x + 4$ ➔ $S(1|\frac{8}{3})$
c) $y = \frac{8}{d}x$ bzw. $y = -\frac{4}{d}x + 4$ ➔ $S(\frac{1}{3}d|\frac{8}{3})$

20) um 14:54 Uhr, 42 km von Bahnhof A

21) a) 0,00665 h = 23,94 s b) 665 m bzw. 532 m

22) a) $\mathbb{L} =]-\infty;\frac{2}{3}[$ b) $\mathbb{L} =]-\infty;1[$ c) $\mathbb{L} = [-1;\infty[$ d) $\mathbb{L} =]-\infty;3]$ e) $\mathbb{L} =]-\infty;4[$ f) $\mathbb{L} =]1;\infty[$

Terme aufstellen mit Hilfe von linearen Funktionen:
1.0 Gerade PQ: y = –0,75x + 30 ➔ $b = -0{,}75\ell + 30$ ➔ $A = \ell \cdot b = -0{,}75\ell^2 + 30\ell$
2.0 Gerade CD: y = –0,5x + 9 ➔ $y_P = -0{,}5(10 - a) + 9 = 0{,}5a + 4$ ➔ $A(a) = (10 - a) \cdot y_P = -0{,}5a^2 + a + 40$
3.0 Gerade durch (0|6) und (8|0): y = –0,75x + 6 ➔ obere rechte Ecke des Fensters hat y = –0,75a + 6
➔ Höhe des Fensters ist h = –0,75a + 5 ➔ $A(a) = 2a \cdot h = 10a - 1{,}5a^2$

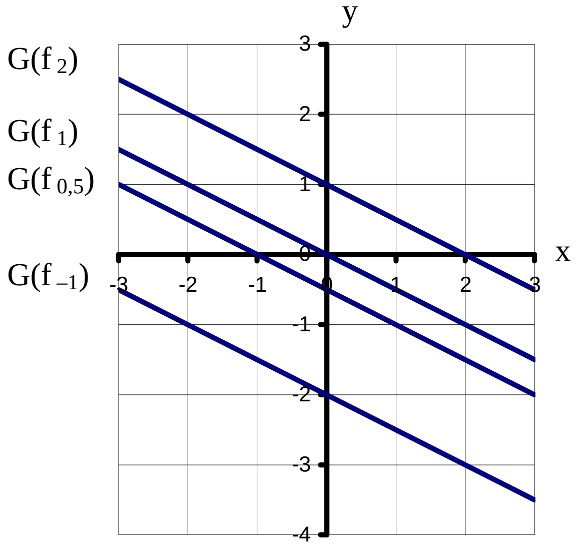
Lösungen IV.3

1) a) $f_{-1}(x) = -\frac{1}{2}x - 2$; $f_{0,5}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; $f_1(x) = -\frac{1}{2}x$; $f_2(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
b) x = 2a – 2 c) a = 3,5 d) x < 2a – 2

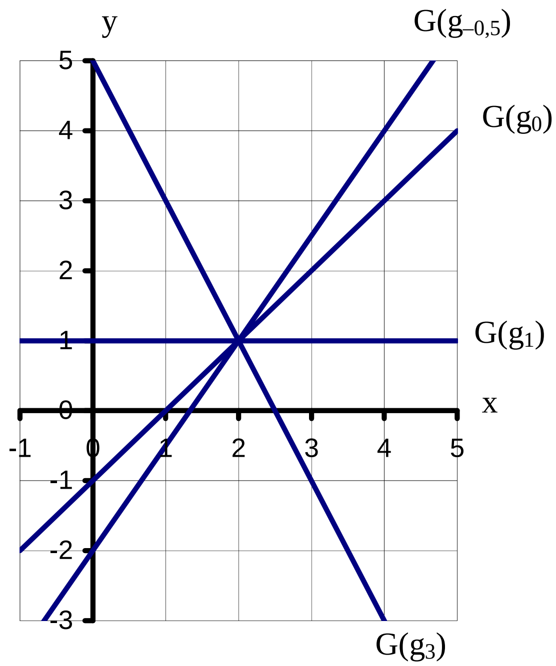
2) a) $g_{-0,5}(x) = 1{,}5x - 1$; $g_0(x) = x - 1$; $g_1(x) = 1$; $g_3(x) = -2x + 5$

b) k = 0,5 c) k = 1 d) k > 1 e) k = 2 f) B(2|1)

Graphen zu 1)

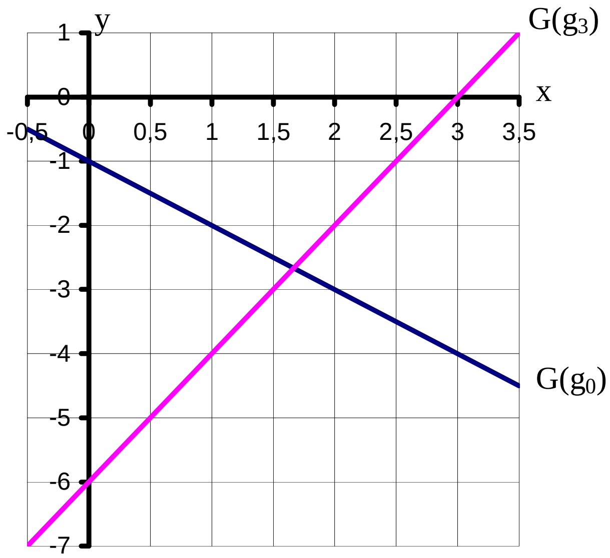


Graphen zu 2)



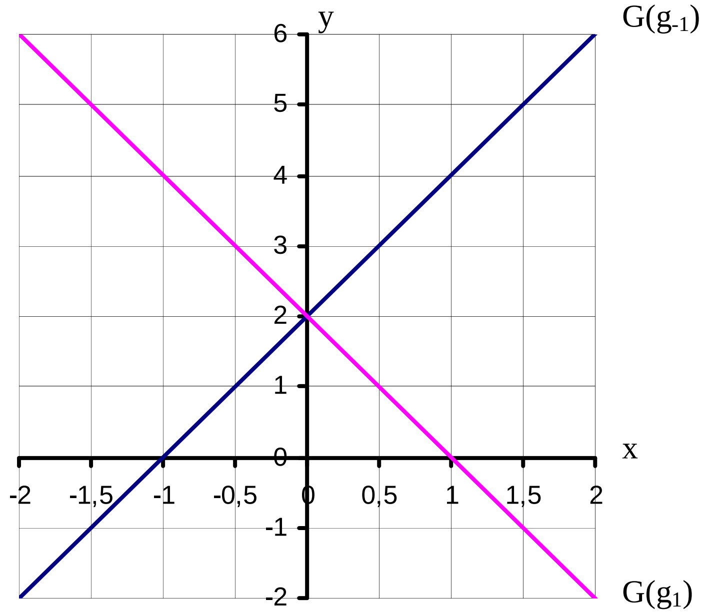
ausführliche Lösung zu 3–6: siehe „Übungen zu Kurvenscharen“ in Analysis I / 1–4

3) a) $g_0(x) = -x - 1$; $g_3(x) = 2x - 6$

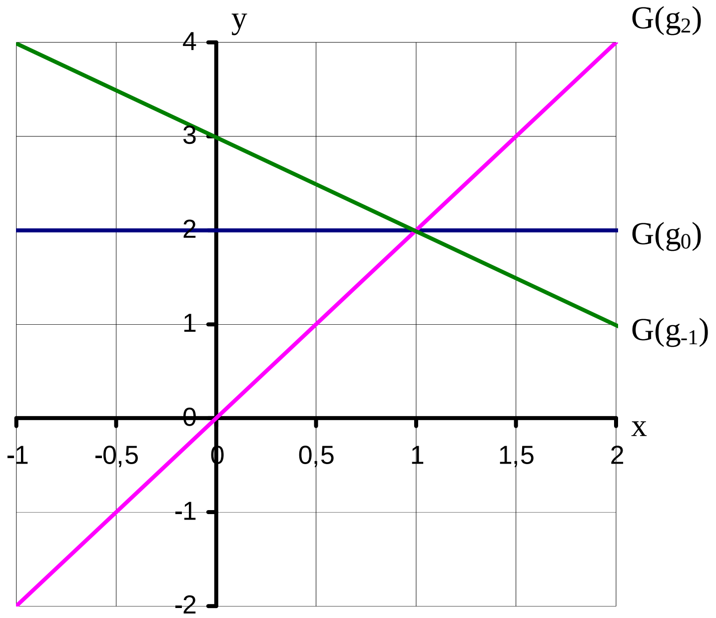


b) $S_x(3|0)$; $S_y(0|-6)$ c) $S(5/3|-8/3)$ d) $A = \frac{25}{6}$

4) a) $b_t = t^2 + 1$ b) $x = \frac{t^2+1}{2t}$ c) $t_{1,2} = \pm 2$ d) $g_{-1}(x) = 2x + 2$; $g_1(x) = -2x + 2$ e) $S(0|2)$



5) a) $g_0(x) = 2$; $g_2(x) = 2x$; $g_{-1}(x) = -x + 3$ b) $S(1|2)$ c) $g_m(1) = 2$, unabhängig von m

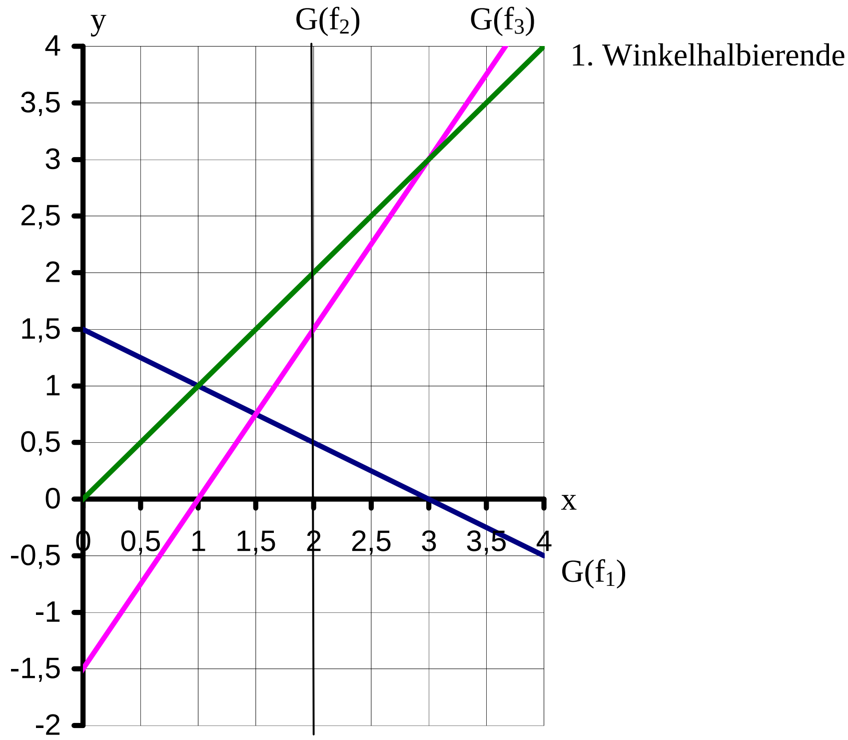


6) a) $f_1(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; f_2: $x = 2$; $f_3(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

b) $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$; $S_1(1|1)$; $S_2(2|2)$; $S_3(3|3)$ c) $A_1 = 1{,}5$; $A_2 = 2$; $A_3 = 1{,}5$

d) $x_t = 4 - t$; $S_t(t|t)$; $A(t) = -0{,}5\,t^2 + 2\,t$ e) $A(t) = 0$ für $t_1 = 0$; $t_2 = 4$; $A_{max} = 2$ für $t = 2$

Graphen zu 6)

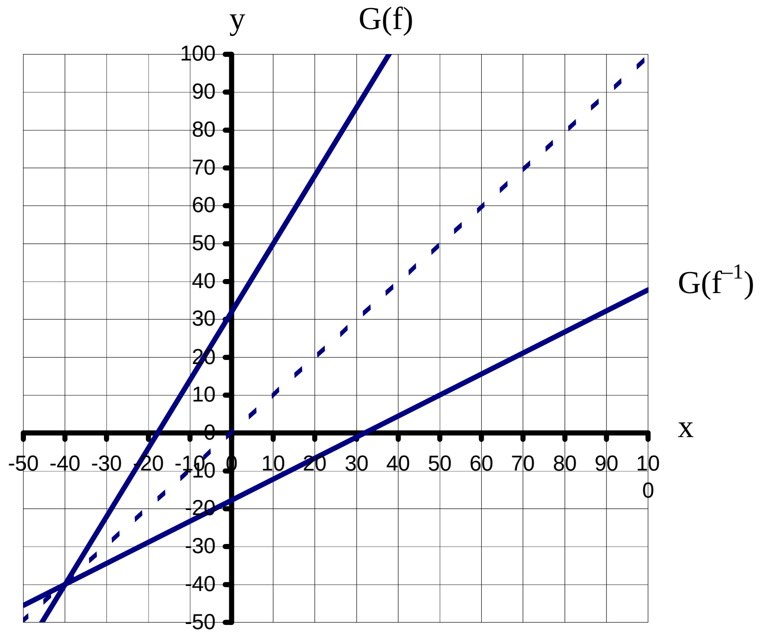


Lösungen IV.4

Arbeitsblatt:

1) x = g(y) = $\frac{5}{9}y - 17\frac{1}{9}$; $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}x - 17\frac{1}{9}$ 2) $f^{-1}(f(x)) = x$; $f(f^{-1}(x)) = x$

3)



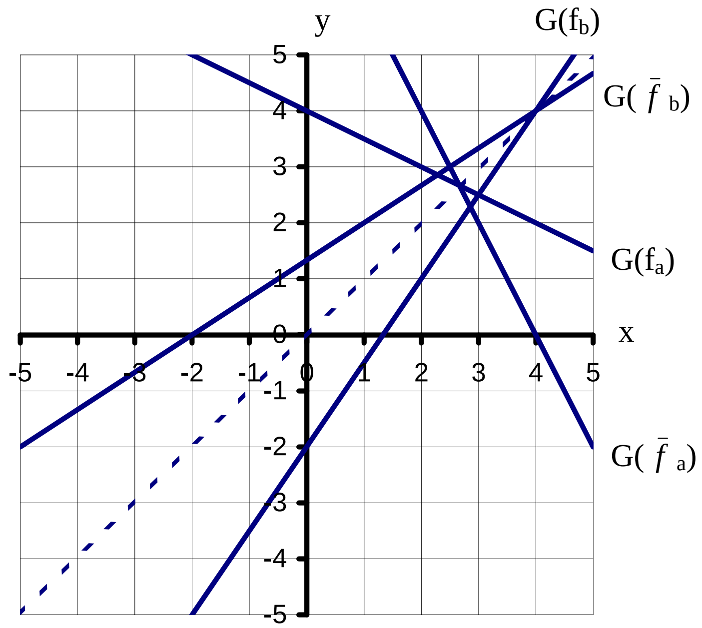
4) $f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{b}{m}$ ➔ $\overline{m} = \frac{1}{m}$

Übungen:

1) a) siehe Folie c) Graph darf nicht über/unter sich selbst verlaufen

b) 7.4., 13:30 oder 20:00; oder 8.4., 2:00 oder 8:30 oder 14:30 oder 21:00; oder 9.4., 2:30 oder 9:30

2) a) $\bar{f}(x) = -2x + 8$ b) $\bar{f}(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$



<u>Lösungen IV.5</u>

1) a) S(–2|6) b) S(2| –6) c) S(–2|–14) d) S(1|–16) e) S(4,5|–51,75) f) S(1|–1) g) S(–5|–18)
h) S(2,5|6,25) i) $S\left(-\frac{b}{2a}\middle|-\frac{b^2}{4a}+c\right)$ bzw. $S\left(-\frac{b}{2a}\middle|-\frac{D}{4a}\right)$

2) a) S(–1|4) b) S(–1,5|7) c) S(–1|10) d) S(–2|–15) e) S(1|–3) f) S(1|10) g) S(–1|–1)
h) S(1|3) i) S(–5|–180)

3) a) S(2|–5) b) S(3|1) c) S(–2|–5) d) S(5|–13,5) e) S(4|16) f) S(0|3) g) S(–3|–4,2)
h) S(4|0) i) S(1|8,5)

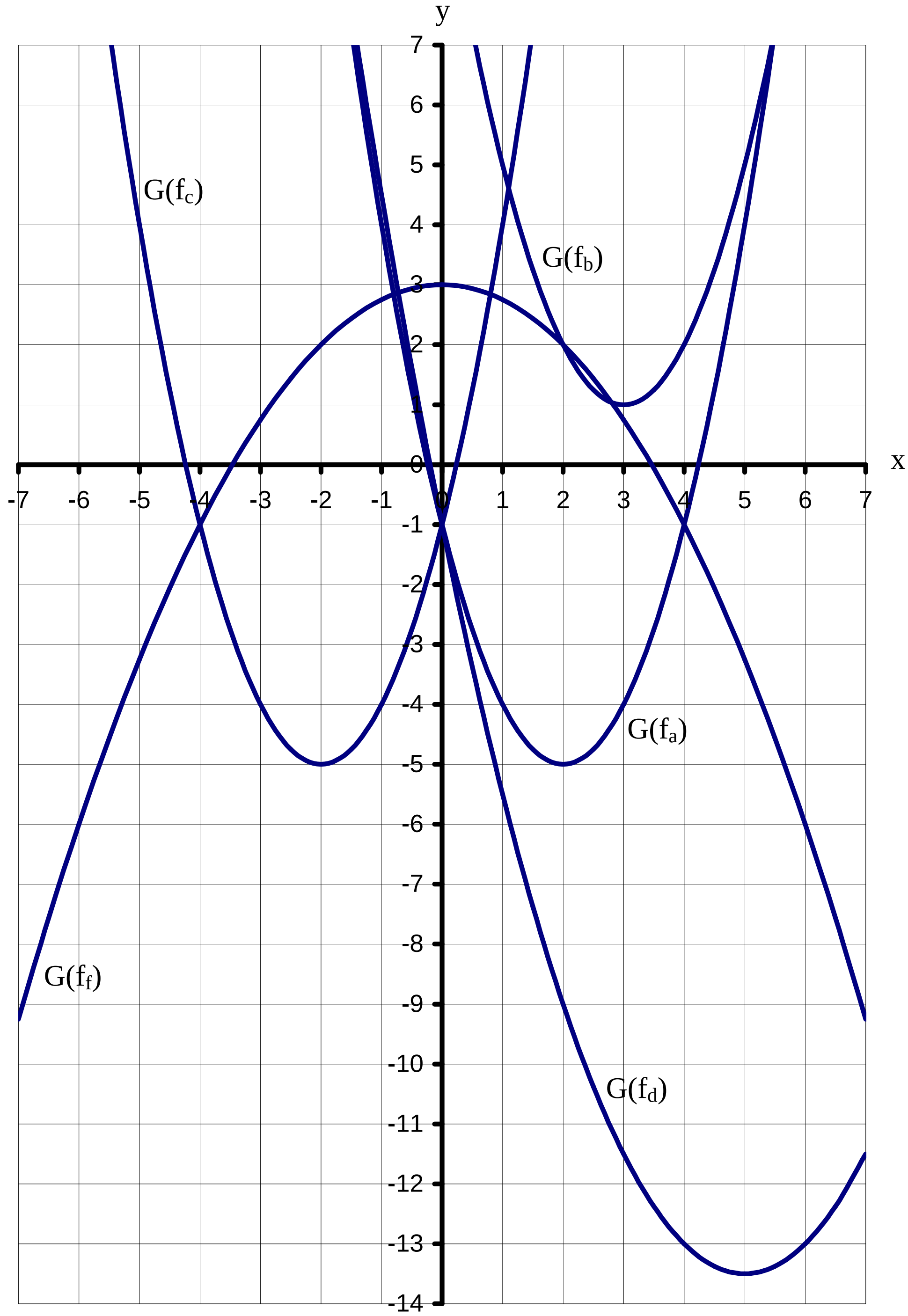
4) a) S(0|–4) b) S(1|5) c) S(–3|0) d) S(2|1) e) S(–3|6) f) S(4|–6)

5) a) S(1,5|0,5) b) $S\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)$ c) S(3|–0,5) d) S(–1,5|0,125) e) S(0|–1) f) $S\left(-\frac{1}{3}\middle|2\right)$

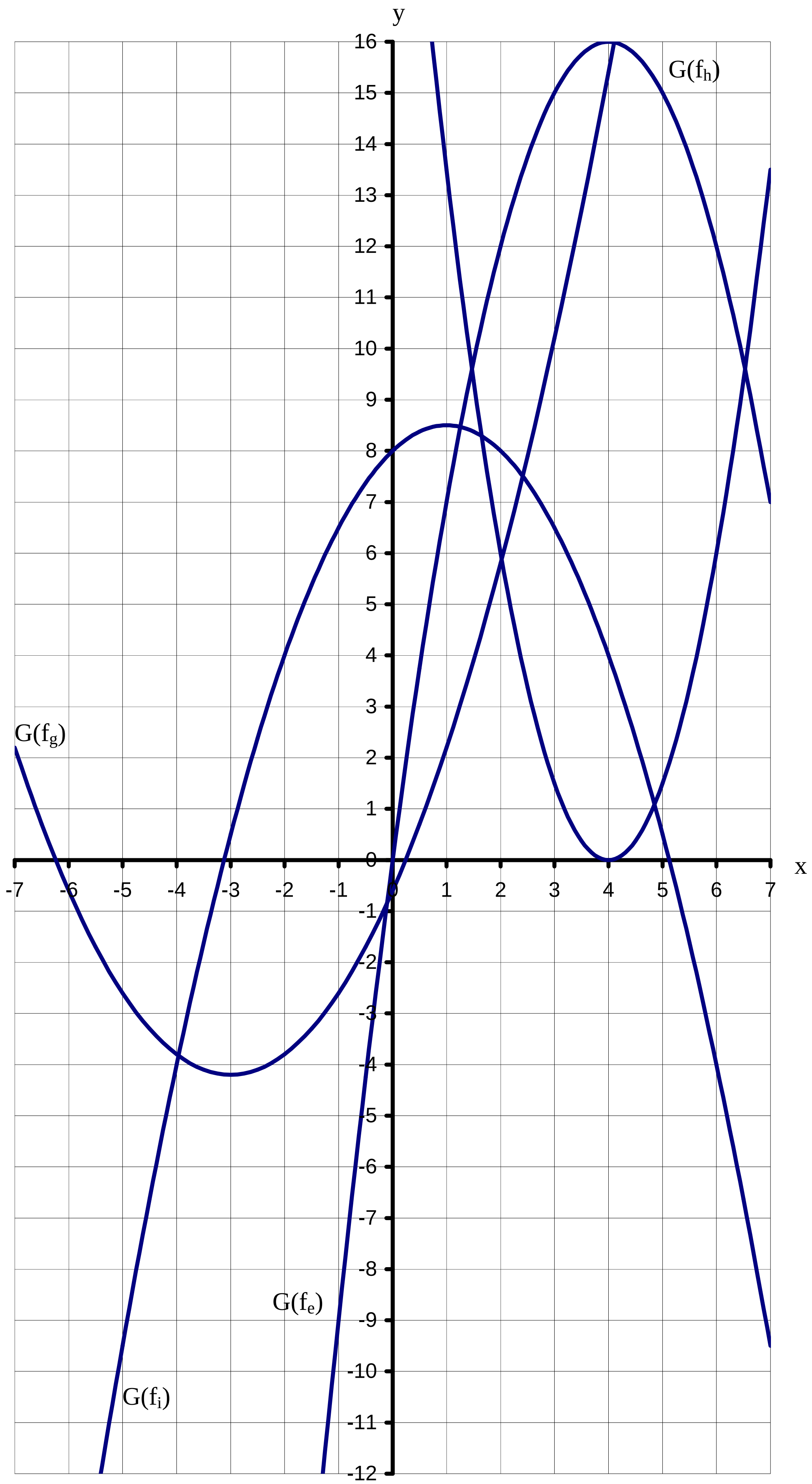
6) a) S(–1|–8); 2 Nullstellen; S_y(0|–6); $\mathbb{W}$ = [–8; ∞[; x = –1
b) S(2|9); 2 Nullstellen; S_y(0|5); $\mathbb{W}$ =]–∞;9]; x = 2
c) $S\left(\frac{1}{2}\middle|-25\right)$; 2 Nullstellen; S_y(0|–24); $\mathbb{W}$ = [–25; ∞[; x = $\frac{1}{2}$
d) S(–5|–6); keine Nullstellen; S_y(0|–81); $\mathbb{W}$ =]–∞;–6]; x = –5
e) S(1,2|3); 2 Nullstellen; S_y(0|1,92); $\mathbb{W}$ =]–∞;3]; x = 1,2
f) $S\left(3\middle|-\frac{18}{25}\right)$; 2 Nullstellen; S_y(0|3,78); $\mathbb{W}$ = [$-\frac{18}{25}$; ∞[; x = 3

7) a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$ $(f(x) = -x^2 - 4{,}5x - 4)$ b) $f(x) = \frac{1}{9}(x + 3)^2$ $(f(x) = \frac{1}{3}(x + 2)^2 - 3)$
c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4$ d) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2$ $(f(x) = \frac{2}{25}(x + 4)^2)$

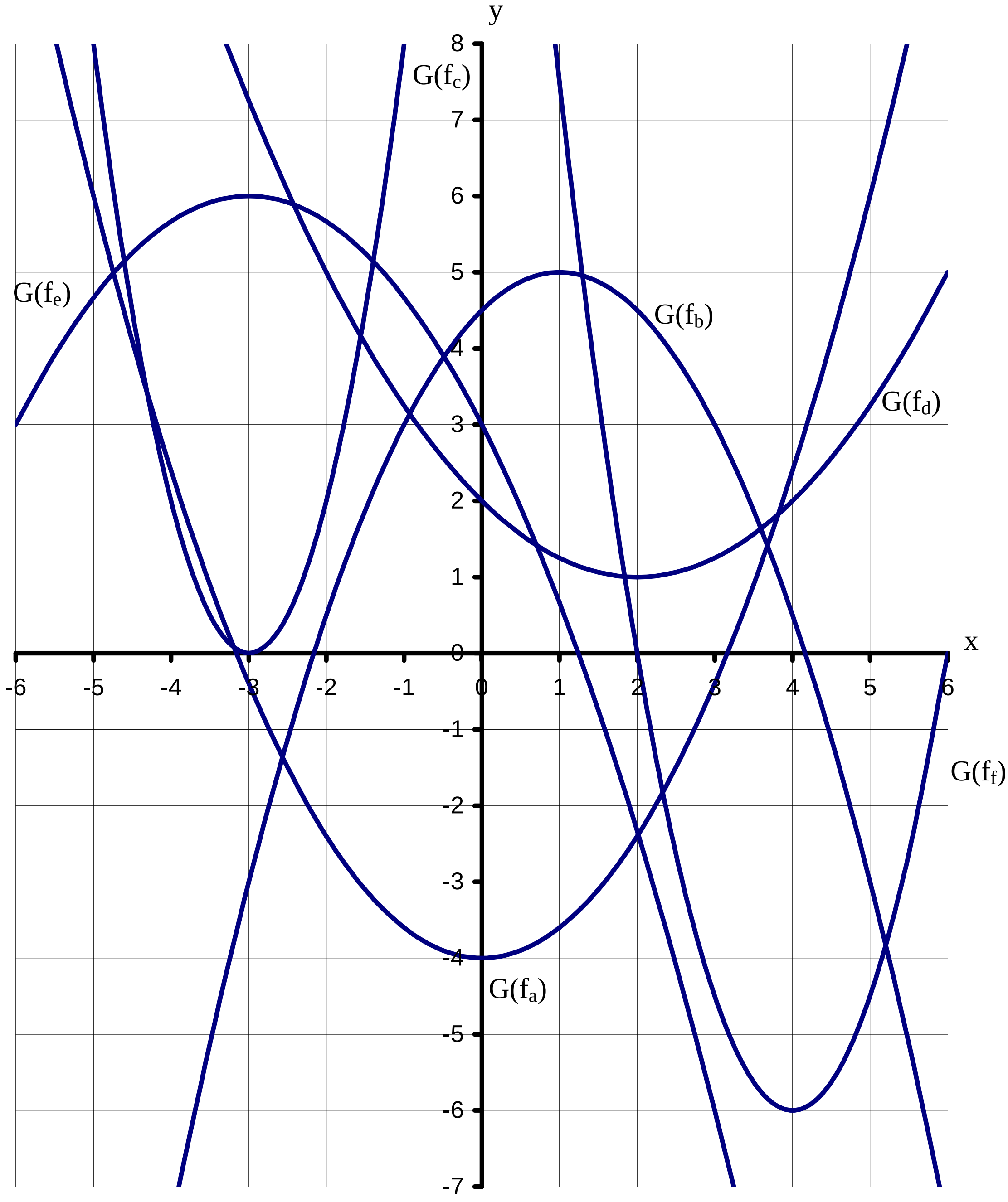
Graphen zu 3) a-d, f



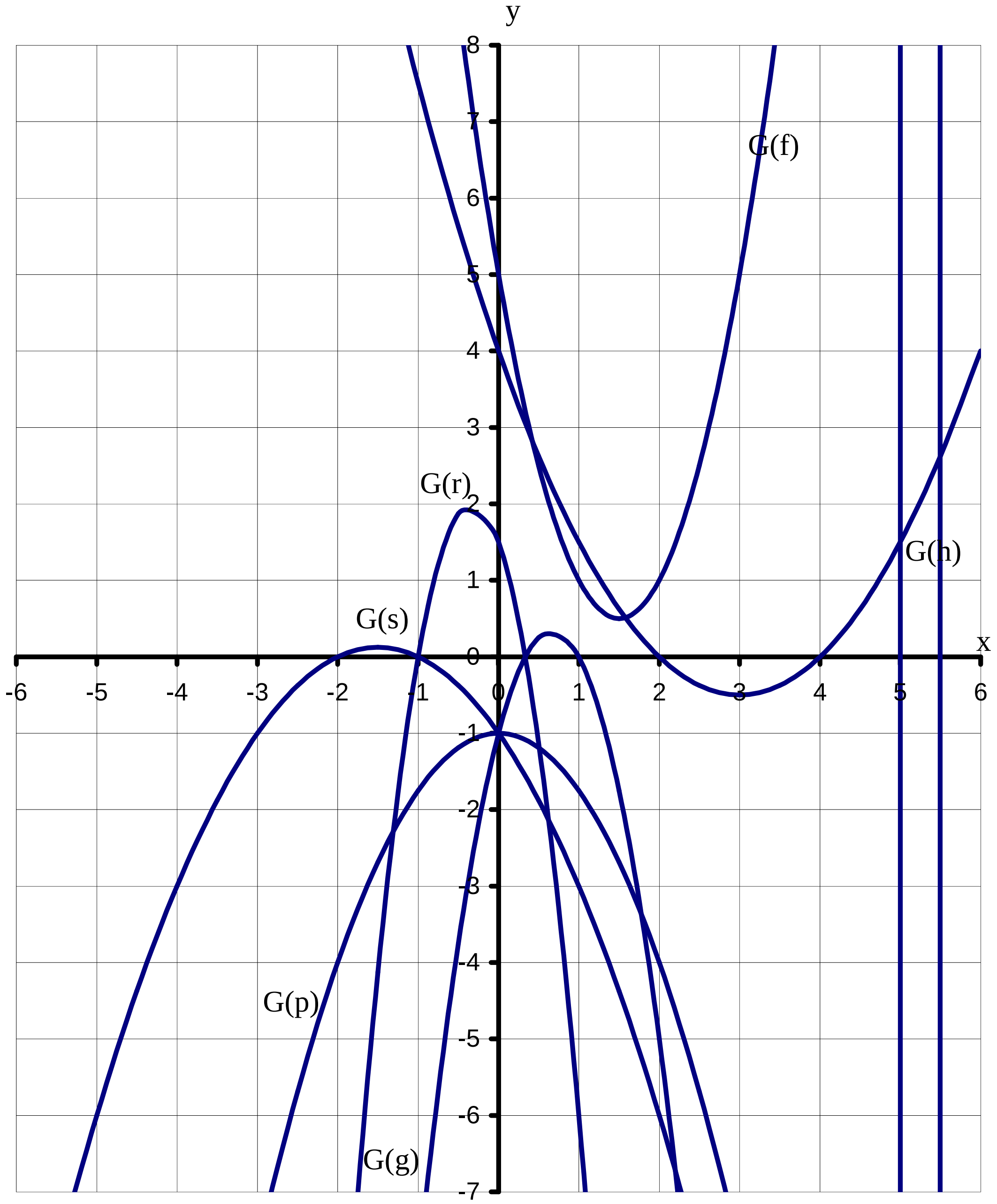
Graphen zu 3) e, g-h



Graphen zu 4)



Graphen zu 5)



8) a) $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ b) $f(x) = (x+1)^2 - 5$ c) $f(x) = 4(x+2)^2 - 3$ d) $f(x) = -(x-4)^2 + 12$
e) $f(x) = -2(x+2)^2 + 1$ f) $f(x) = 3(x-10)^2 - 1$

9) a) $f(x) = 2x^2 + 1$ b) $f(x) = -2x^2 + 4$ c) $f(x) = 5x^2 + 10x$

10) a) $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ b) $y = 0{,}5(x+1)^2 + 1$ c) $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 - 1$

11) a) $y = -3x^2 + 4x - 1$ b) $y = x^2 - 2{,}5x + 5{,}5$ c) $y = 3x^2 - x + 7$ d) $y = -5x^2 + 3x - 2$
e) $y = -x^2 + 4x + 3$ f) $y = 2x^2 + x - 13$

12) a) Max.: –90 b) Max.: 54 c) Min.: 0,2 d) Max.: $10\frac{1}{3}$ e) Min.: 8 f) Min.: 1,6

13) a) $x_{min} = 1{,}5$; $y_{min} = 3{,}5$ b) $x_{min} = -1$; $y_{min} = -5$ c) $x_{max} = 2$; $y_{max} = 2$ d) $x_{min} = -1$; $y_{min} = 0$
e) $x_{min} = -1$; $y_{min} = 9{,}5$ f) $x_{min} = 1$; $y_{min} = -10$ g) $x_{min} = 5$; $y_{min} = -3$ h) $x_{min} = -1$; $y_{min} = 0{,}9$
i) $x_{max} = 0{,}125$; $y_{max} = 4{,}0125$

14) a) $x_{min} = 7$; $y_{min} = 17$ b) $x_{max} = -4$; $y_{max} = -9$ c) $x_{min} = 0$; $y_{min} = 20$ d) $x_{min} = 4{,}5$; $y_{min} = -20{,}25$
e) $x_{max} = 4{,}5$; $y_{max} = 20{,}25$ f) $x_{max} = 6$; $y_{max} = 16$ g) $x_{max} = -0{,}25$; $y_{max} = 0{,}05$ h) $x_{min} = 1$; $y_{min} = 0$
i) $x_{min} = -5$; $y_{min} = -1{,}5$

15) a) fällt in $]-\infty;5]$, steigt in $[5;\infty[$ b) fällt in $]-\infty;-6]$, steigt in $[-6;\infty[$
c) fällt in $]-\infty;-\frac{1}{3}]$, steigt in $[-\frac{1}{3};\infty[$ d) steigt in $]-\infty;2]$, fällt in $[2;\infty[$
e) fällt in $]-\infty;-10]$, steigt in $[-10;\infty[$ f) steigt in $]-\infty;0]$, fällt in $[0;\infty[$
g) steigt in $]-\infty;0{,}2]$, fällt in $[0{,}2;\infty[$ h) fällt in $]-\infty;-24{,}5]$, steigt in $[-24{,}5;\infty[$
i) fällt in $]-\infty;0{,}5]$, steigt in $[0{,}5;\infty[$

16) a) $x = -2$; $y = 5$ b) $x = 2$; $y = -10$ c) $x = 0{,}2$; $y = \frac{1}{75}$; d) keine Lösung

17) a) $S_1(2|3)$; $S_2(-0{,}5|0{,}5)$ b) $S_1(-2|15)$; $S_2(1|3)$ c) $S_1(3|-4)$; $S_2\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{34}{9}\right)$
d) B(1|6) e) B(–2|5) f) keine gemeinsamen Punkte

18) a) g_{-1}: $y = 2x - 1$; B(1|1) b) h_{-2}: $y = -x - 2$; B(–2|–0,5) c) k_{-1}: $y = -1$; $B(-1|-1) = S_{Parabel}$
d) $t_{-8,5}$: $y = -3x - 8{,}5$; B(–4|3,5) e) l_4: $y = 4x - 5$; B(3|7) und l_{-2}: $y = -2x - 5$; B(–3|1) f) keine Lösung

19) a) $f(x) = -\frac{13}{75}x^2 - \frac{8}{3}$ b) $H = 17\frac{1}{3}$

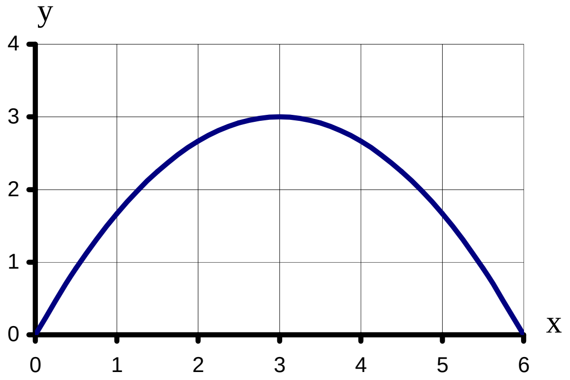
20) a) S(150|57,6) ➔ 150 m hoch b) $x_1 = 30$; $x_2 = 270$ ➔ 240 m lang c) y-Achsenabschnitt ➔ 32,4 m
d) C(0|–32,4); Symmetrie ➔ D(300|–32,4) ➔ CS: $y = 0{,}6x - 32{,}4$; DS: $y = -0{,}6x + 147{,}6$

21) $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 3 = -\frac{1}{3}x(x-6) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

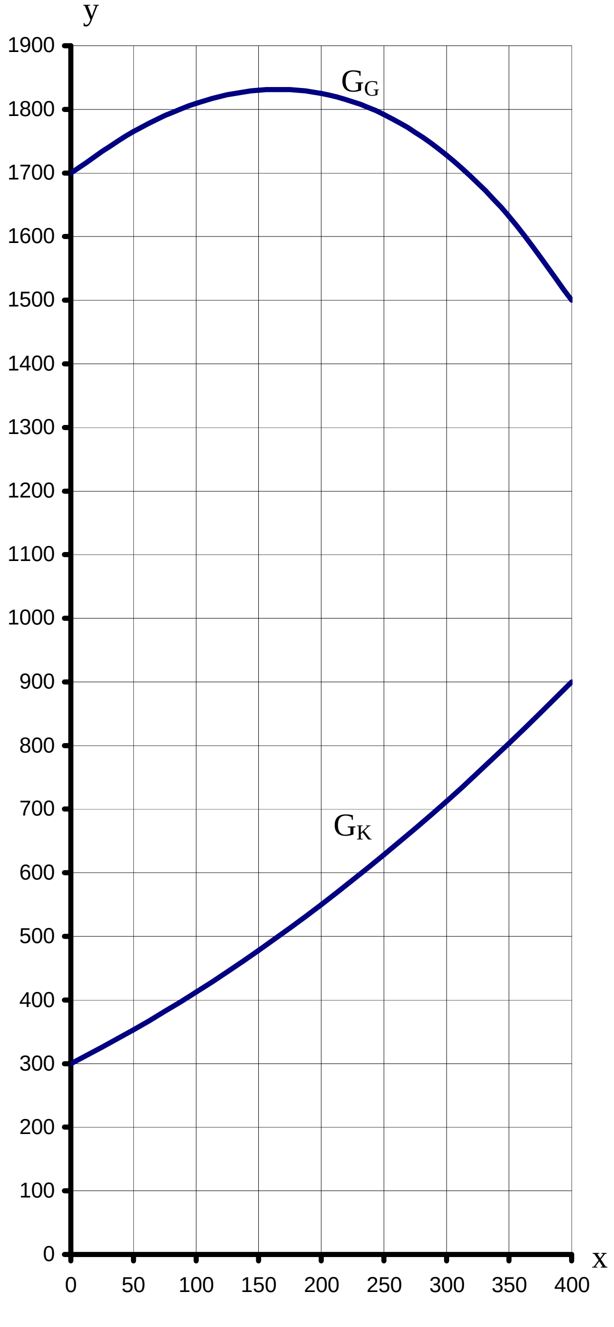
22) a) $x = 400$; $P(400) = 16$ b) $G(x) = -\frac{1}{320000}x^2 - \frac{3}{800}x + 1{,}5x + 1700$ d) etwa 370 kg

23) a) $A(a) = (3-a)\cdot y_P = \ldots = -a^3 + 3a^2 - \frac{8}{3}a + 8$; $\mathbb{D}_A = \mathbb{D}_g = \left[0;\sqrt{\frac{10}{3}}\right]$

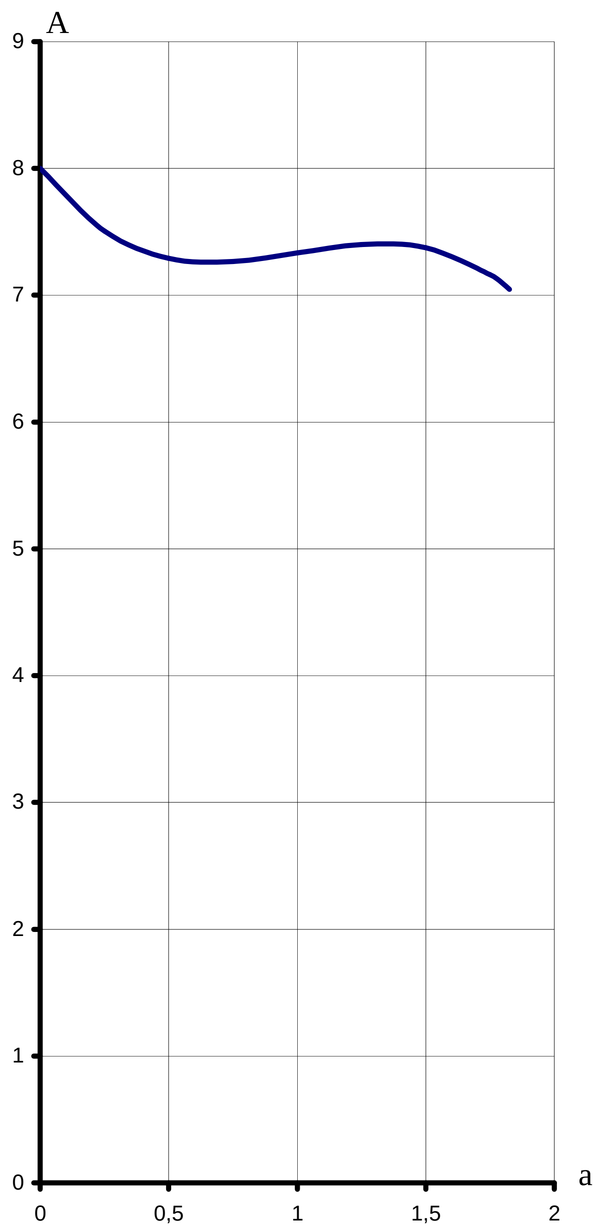
Graph zu 21)



Graphen zu 22)



Graph zu 23)



Lösungen IV.6

1) L_{max} = 28 125 W für 187,5 Umdrehungen / min 2) A_{max} = 36,125 m^2 für $\overline{AB}$ = 8,5 m

3) $\overline{PQ}_{min}$ = 2 für x = 2 ($\overline{PQ}_{min}$ = 2 für x = 1) 4) A(10) = 0,18; A(20) = 0,32; A_{max} = 0,5 für a = 50

5) minimale Kosten, nämlich 397,50 €, für Sandkastenbreite von 4 m

6) a) A(1) = 37; A(2) = 28; A(4) = 22; A_{min} = 21,875 für x = 3,75

7) größter Bauplatz, nämlich 1200 m^2, für eine Länge von 40 m und eine Breite von 30 m

8) größter Gewinn, nämlich 4625 €, für x = 350

9) a) 9,90 € bzw. 9,80 € bzw. 9,70 € bzw. (10 – x) €; 1020 bzw. 1040 bzw. 1060 bzw. 1000 + 200 x;
10098 € bzw. 10192 € bzw. 10282 € bzw. ($-200x^2 + 1000x + 10000$) €
b) größte Einnahmen für x = 2,5, nämlich 11250 €

Lösungen IV.7

1) a) $x^2 - 2x + 3 < 0$ für $-1 < x < 3$; $x^2 - 2x + 3 \geq 0$ für $x \leq -1$ oder $x \geq 3$
b) $x^2 - x + 12 < 0$: keine Lsg.; $x^2 - x + 12 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
c) $2x^2 - 3x + 14 < 0$ für $-2 < x < 3{,}5$; $2x^2 - 3x + 14 \geq 0$ für $x \leq -2$ oder $x \geq 3{,}5$

2) (vgl. III.10 !)
a) $\mathbb{L} =]3;4[$ b) $\mathbb{L} =]-\infty;-1[\cup]3;\infty[$ c) $\mathbb{L} = [-1;3]$ d) $\mathbb{L} =]-\infty;2] \cup [4;\infty[$ e) $\mathbb{L} = [-3;1]$
f) $\mathbb{L} =]-\infty;-3[\cup]4;\infty[$ g) $\mathbb{L} =]2;3[$ h) $\mathbb{L} =]-\infty;0,8] \cup [2,2;\infty[$ i) $\mathbb{L} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ k) $\mathbb{L} = \{\}$
l) $\mathbb{L} = [0,6;4,8]$ m) $\mathbb{L} =]2;3[$ n) $\mathbb{L} =]-\infty;-4[\cup]-2;\infty[$ o) $\mathbb{L} =]\frac{7-\sqrt{97}}{2};\frac{7+\sqrt{97}}{2}[$
p) $\mathbb{L} =]-\infty;-4] \cup [-2;\infty[$ (vgl. n) q) $\mathbb{L} = \mathbb{R}\backslash\{1,5\}$ r) $\mathbb{L} = [-4;1]$ s) $\mathbb{L} = [\frac{-18-\sqrt{279}}{2};\frac{-18+\sqrt{279}}{2}]$

3) a) $\mathbb{L} =]-4;0,5[$ b) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ 4) $\mathbb{L} =]1;4[$ 5) $\mathbb{L} =]-\infty;0[\cup]1;\infty[$ ( ]0;1[ )

6) keine Lösung ($\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{37}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{37}}{2};\infty\right[$) 7) $]8-2\sqrt{6};8+2\sqrt{6}[$ ( ]2;10[ )

8) $-a^2 + 4a \geq 3$ ➔ $1 \leq a \leq 3$

Lösungen IV.8

1) a) $f_1(x) = x^2 - 2x$; $f_2(x) = 2x^2 - 4x$; $f_{-1}(x) = -x^2 + 2x$; $f_{-2}(x) = -2x^2 + 4x$

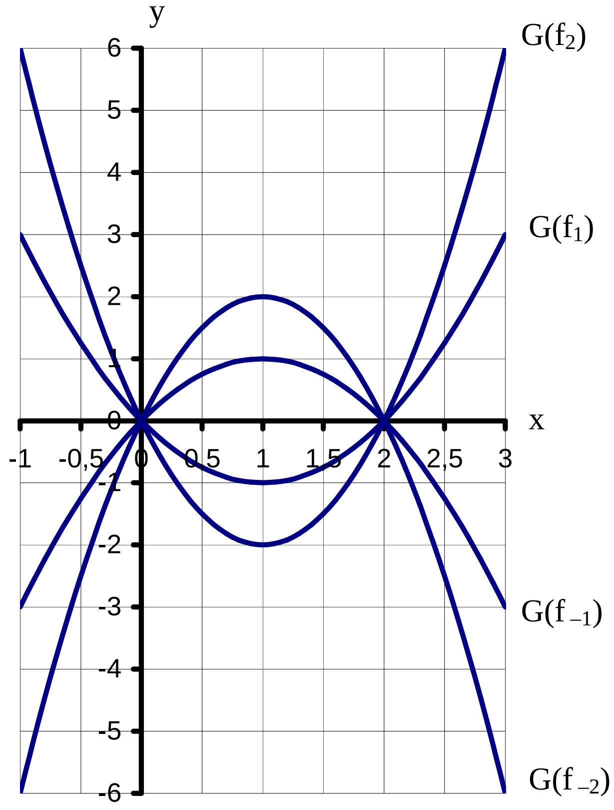
b) Maximum für t < 0; Minimum für t > 0 (weder noch für t = 0)

c) allgemein: S(1|–t) ➔ t = –1 (< 0, also Maximum)

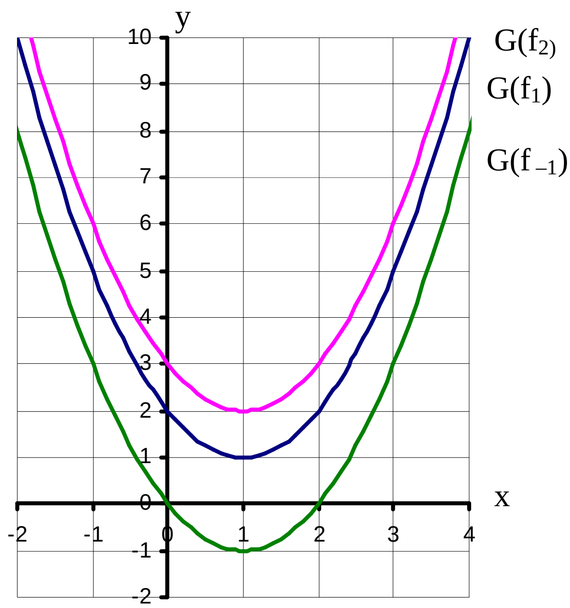
d) keine Lösung (t = –1, damit Scheitel bei y = 1, dann aber Maximum, kein Minimum!)

e) Normalparabel für |t| = 1; Gerade für t = 0

Graphen zu 1)



2) a) k < 0: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-k}$; k = 0: $x_{1,2}$ = 1; k > 0: keine Nullstelle; $S_k(1|k)$



b) es gibt für keinen Wert von a Nullstellen; $S_a(a|2)$

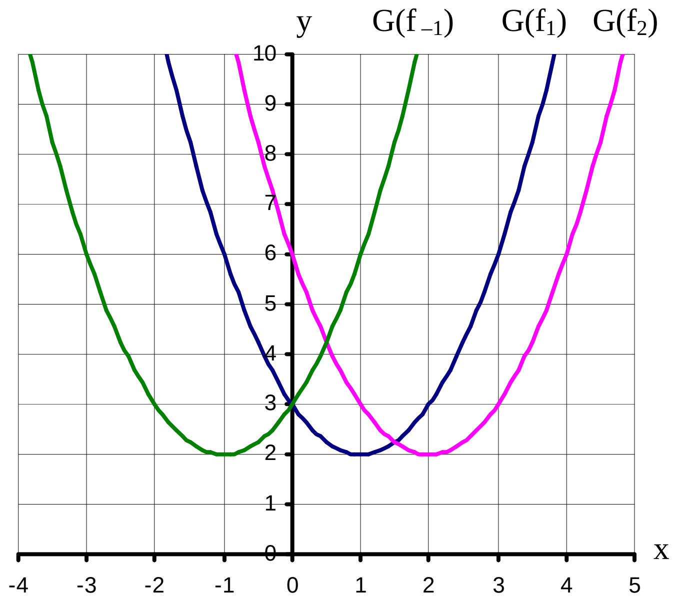
c) t < 0: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-2t}$; t > 0: keine Nullstelle (t = 0 ausgeschlossen!); $S_t(1|2)$

3) b) $x_{1,2} = = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4k}}{2}$

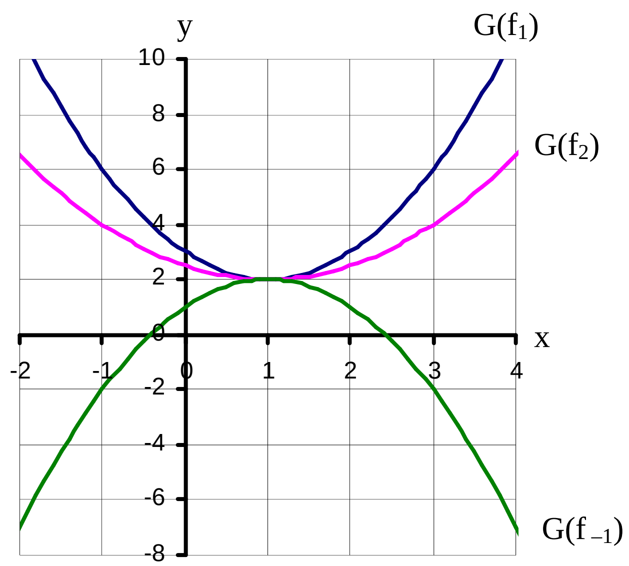
Graph berührt x-Achse nur für k = 0 oder k = –4; Graph schneidet x-Achse für k < –4 oder k > 0

c) $S_k\left(-\dfrac{k}{2}\middle|-\dfrac{k^2}{4} - k\right)$

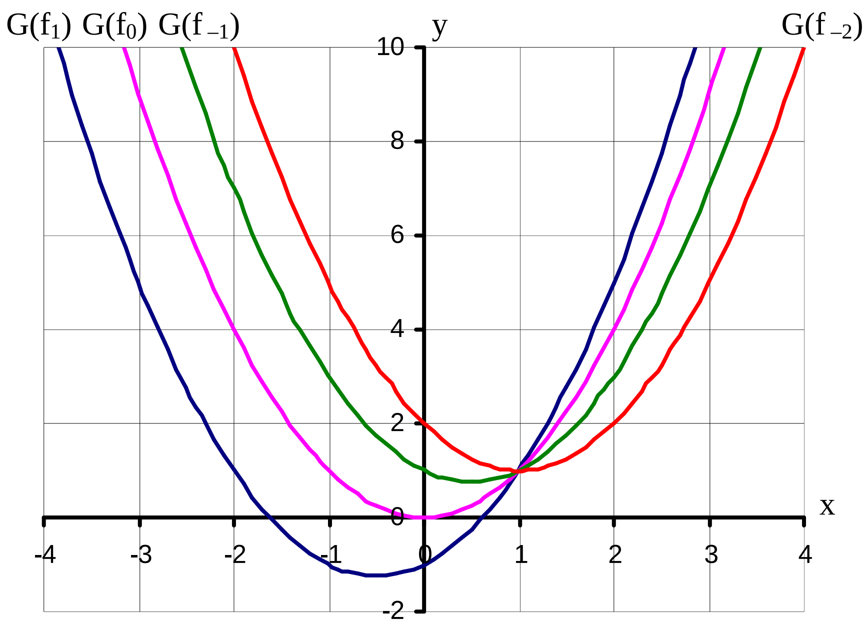
Graphen zu 2) b



Graphen zu 2) c

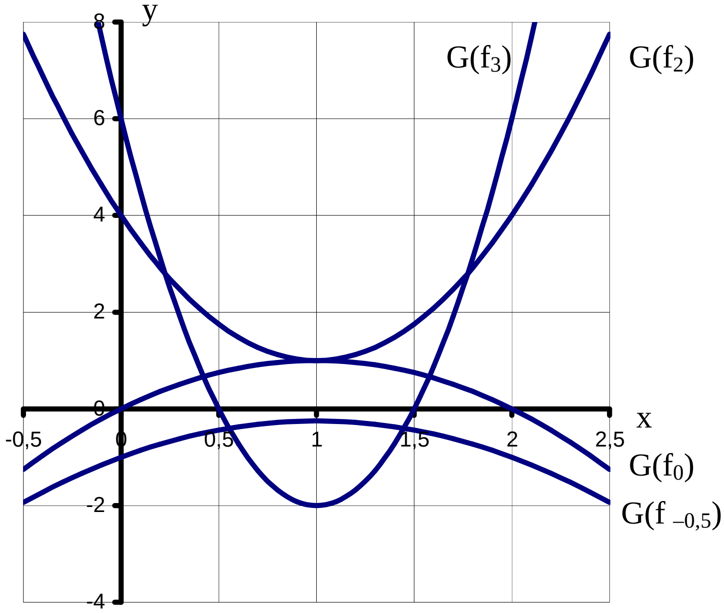


3) a) mit den Ergebnissen aus Teil c): $S_0(0|0)$; $S_1(-0,5|–1,25)$; $S_{-1}(0,5|0,75)$; $S_{-2}(1|1)$; alles Normalparabeln

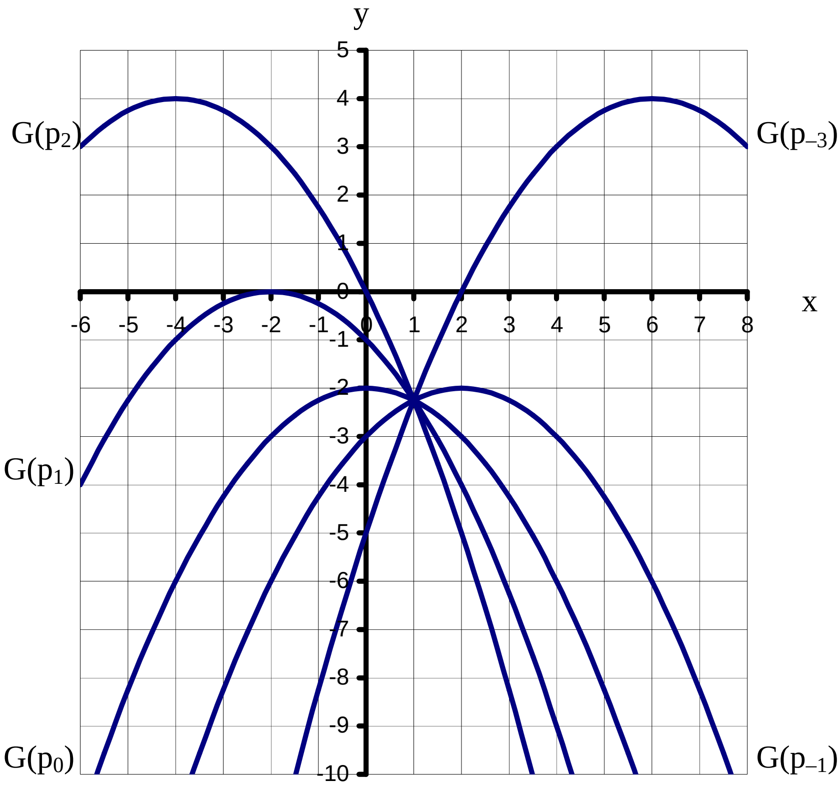


4) a) $a > 1$ b) $a < 0{,}75$ (und $a \neq 0$ laut Angabe!) c) $-4 < a < 4$ (und $a \neq 0$) d) $a \neq 0$ e) $0 < a < 4$
f) $-6-2\sqrt{6} < a < -6+2\sqrt{6}$ g) $-13 < a < 3$ (und $a \neq 0$) h) $a < 0$ oder $a > 4$

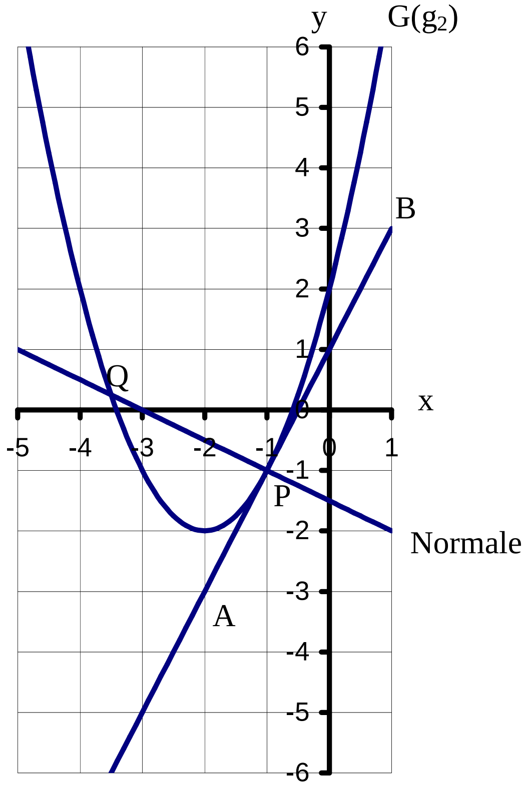
5) a) $S_a(1|-a^2 + 2a + 1)$
b) $a < -1$ oder $a > 1$: $\mathbb{W} = [-a^2 + 2a + 1; \infty[$; $-1 < a < 1$: $\mathbb{W} =]-\infty; -a^2 + 2a + 1]$;
c) $f_{-0,5}(x) = -0{,}75x^2 + 1{,}5x - 1$; $f_0(x) = -x^2 + 2x$; $f_2(x) = 3x^2 - 6x + 4$; $f_3(x) = 8x^2 - 16x + 4$



6) a) $S_k(-2k \mid k^2 + k - 2)$ c) $P(1|-2{,}25)$ b) $x_{1,2} = -2k \pm 2\sqrt{k^2 + k - 2}$
ein gemeinsamer Punkt für $k = 1$ oder $k = -2$; zwei für $k < -2$ oder $k > 1$; keiner für $-2 < k < 1$
d) $p_{-3}(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$; $p_{-1}(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 3$; $p_0(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2$; $p_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$;
$p_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x$



7) a) AB: $y = 2x + 1$; $c = 2$ b) $P(-1|-1)$ c) n: $y = -0{,}5x - 1{,}5$; $Q(-3{,}5|0{,}25)$
d)



8) a) $T_t(2|4t^2 - 6t - 12)$; am kleinsten für t = 0,75   b) $T_t\left(\frac{1}{3}t \middle| 3\frac{2}{3}t^2 - 6t\right)$; am kleinsten für $t = \frac{9}{11}$

<u>Lösungen IV.9</u>

1) 10 s; $10\sqrt{2}\,\text{s} \approx 14$ s; $10\sqrt{3}\,\text{s} \approx 17$ s;   20 s

2) a) 150 m;   600 m;   2400 m; $6x^2$ m   b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}\,\text{s} \approx 2{,}89$ s; $\frac{5\sqrt{6}}{3}\,\text{s} \approx 4{,}08$ s; $\frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{s} \approx 5{,}77$ s; $\sqrt{\frac{x}{6}}$ s

3) $f(x) = -\sqrt{x}$ ($f(x) = \sqrt{-x}$; $f(x) = -\sqrt{-x}$

4) a) $x \mapsto x - 1$ b) $x \mapsto 0{,}5x$ c) $x \mapsto 0{,}5x + 0{,}5$ d) $x \mapsto 1{,}5x + 6$ e) $x \mapsto 0{,}5x^2$ f) $x \mapsto 0{,}25x^2$
g) $x \mapsto 2x^2$ h) $x \mapsto 4x^2$

5) c) $\bar{f}(x) = \sqrt{x+1}$; $\mathbb{D} = [-1;\infty[$ g) $\bar{f}(x) = (x-1)^2$; $\mathbb{D} = [1;\infty[$ h) $\bar{f}(x) = x^2 - 4$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$
i) $\bar{f}(x) = \sqrt{1-x}$; $\mathbb{D} =]-\infty;1]$

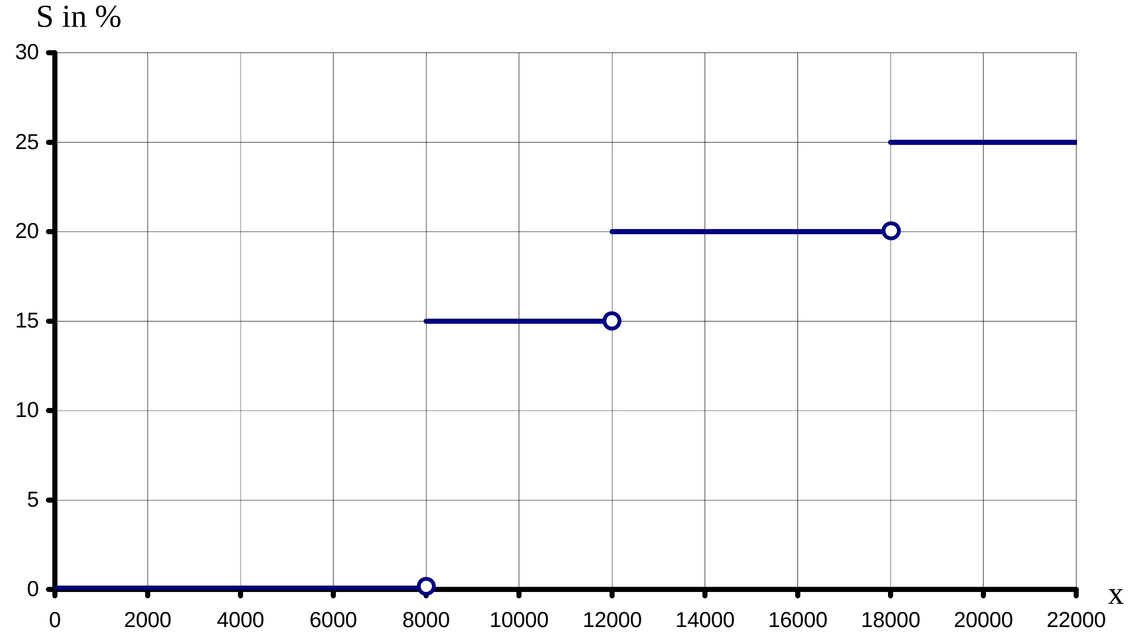
6) a) $]-\infty;2]$ oder $[2;\infty[$ (oder Teilmengen davon!); $\bar{f}(x) = 2 + \sqrt{4-x}$ bzw. $= 2 - \sqrt{4-x}$; $\mathbb{D} =]-\infty;4]$

7) $\bar{f}(x) = x^2 + 1$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$; $f(\bar{f}(x)) = \bar{f}(f(x)) = x$

Lösungen IV.10

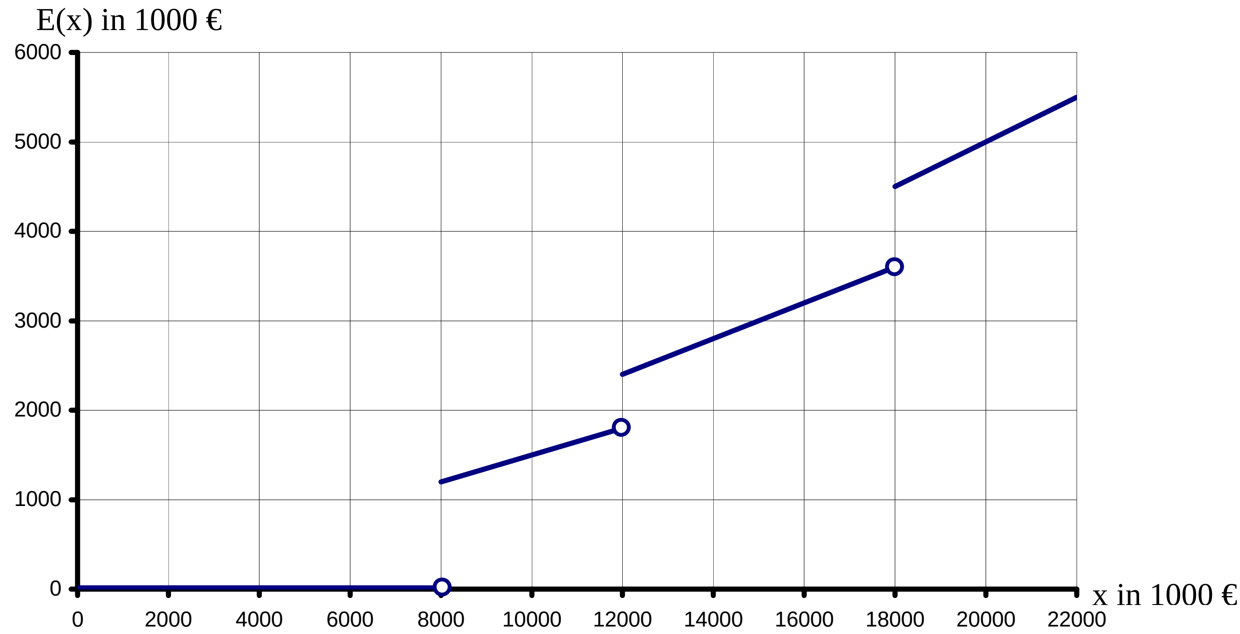
a) Begriff

1) a)



b)

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 8000 \\ 0{,}15x & \text{für } 8000 \le x < 12000 \\ 0{,}2x & \text{für } 12000 \le x < 18000 \\ 0{,}25x & \text{für } 18000 \le x \end{cases}$$

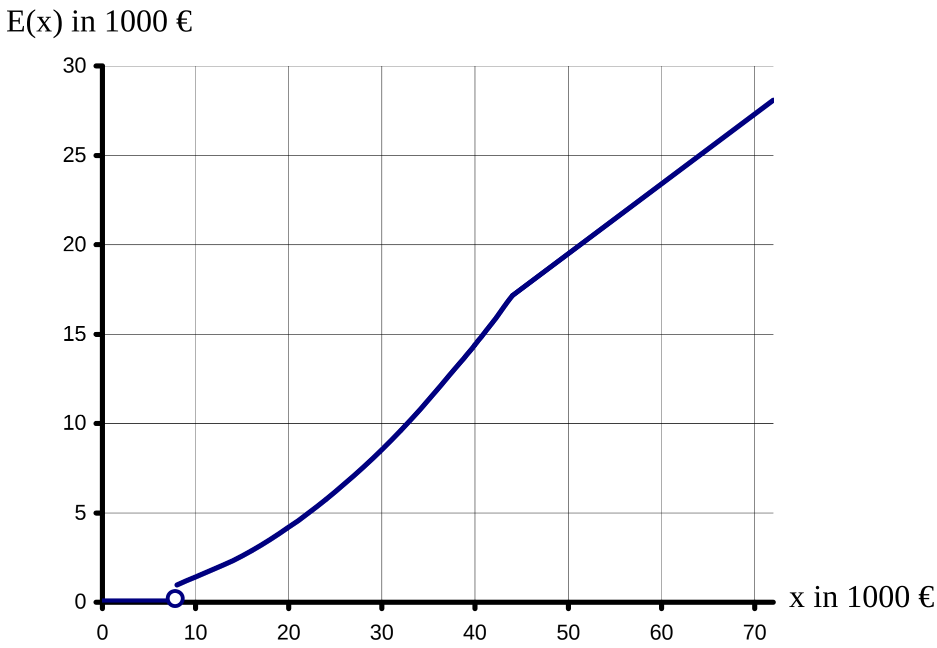


2) a)

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 8 \\ 0{,}0075x + 0{,}06 & \text{für } 8 \le x < 44 \\ 0{,}39 & \text{für } 44 \le x \end{cases}$$

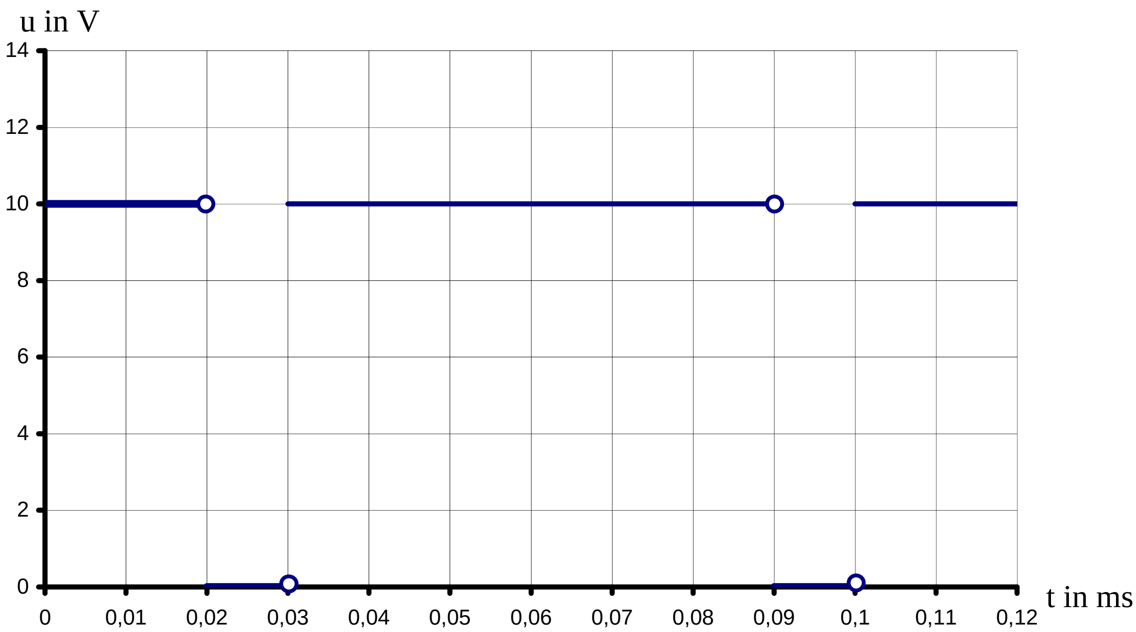
b)

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 8 \\ 0{,}0075x^2 + 0{,}06x & \text{für } 8 \le x < 44 \\ 0{,}39x & \text{für } 44 \le x \end{cases}$$



3)

$$u(t) = \begin{cases} 10 & \text{für } 0 \le t < 0{,}02 \\ 0 & \text{für } 0{,}02 \le t < 0{,}03 \\ 10 & \text{für } 0{,}03 \le t < 0{,}09 \\ 0 & \text{für } 0{,}09 \le t < 0{,}10 \\ 10 & \text{für } 0{,}10 \le t \le 0{,}12 \end{cases}$$



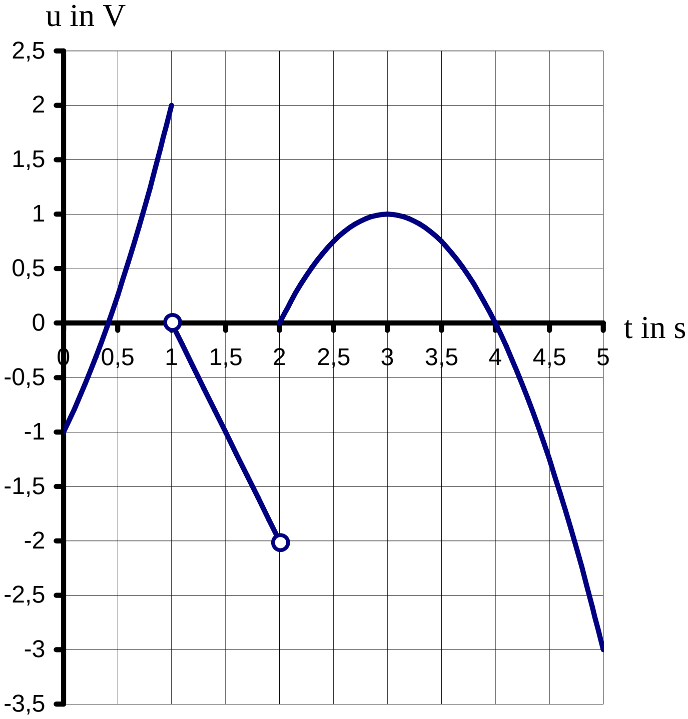
4) a)

$$u(t) = \begin{cases} (t+1)^2 - 2 & \text{für } t \in [0;1] \\ -2t + 2 & \text{für } t \in]1;2[\\ -(t-3)^2 + 1 & \text{für } t \in [2;5[\end{cases}$$

5)

$$h(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{für } -1 \le x < 1 \\ -(x-3)^2 + 4 & \text{für } 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

Graph zu 4) b



6) a) a = –0,02; b = –0,8; c = 58; d = $\frac{3}{75}$; h = 6 b) $\alpha \approx 141{,}3°$

c) Betragsfunktionen

1) a) f(x) = $\begin{cases} -4x+1 & \text{für } x < \frac{1}{4} \\ 4x-1 & \text{für } x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$ b) f(x) = $\begin{cases} -2x+6 & \text{für } x < 3 \\ 2x-6 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$ c) f(x) = $\begin{cases} 1{,}5x-6 & \text{für } x < 4 \\ -1{,}5x+6 & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$

d) f(x) = $\begin{cases} -2x+\frac{1}{4} & \text{für } x < \frac{1}{8} \\ 2x-\frac{1}{4} & \text{für } x \geq \frac{1}{8} \end{cases}$ e) f(x) = $\begin{cases} -8\frac{2}{3}x-2 & \text{für } x < 0 \\ 8\frac{2}{3}x+2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ f) f(x) = $\begin{cases} -7x+1 & \text{für } x < 0 \\ 7x+1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

g) f(x) = $\begin{cases} x^2-4 & \text{für } x \leq -2,\ x \geq 2 \\ -x^2+4 & \text{für } -2 < x < 2 \end{cases}$ h) f(x) = $\begin{cases} 2x^2-18 & \text{für } x \leq -3,\ x \geq 3 \\ -2x^2+18 & \text{für } -3 < x < 3 \end{cases}$

i) f(x) = $\begin{cases} \frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3} & \text{für } x \leq -\frac{1}{2},\ x \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3} & \text{für } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \end{cases}$ k) f(x) = $\begin{cases} 3x^2-5 & \text{für } x \leq -1,\ x \geq 1 \\ -7x^2+5 & \text{für } -1 < x < 1 \end{cases}$

l) f(x) = $\begin{cases} x^2-x-2 & \text{für } x \leq -1,\ x \geq 2 \\ -x^2+x+2 & \text{für } -1 < x < 2 \end{cases}$ m) f(x) = $\begin{cases} x^2+10x+12 & \text{für } x \leq -6,\ x \geq -4 \\ -x^2-10x-36 & \text{für } -6 < x < -4 \end{cases}$

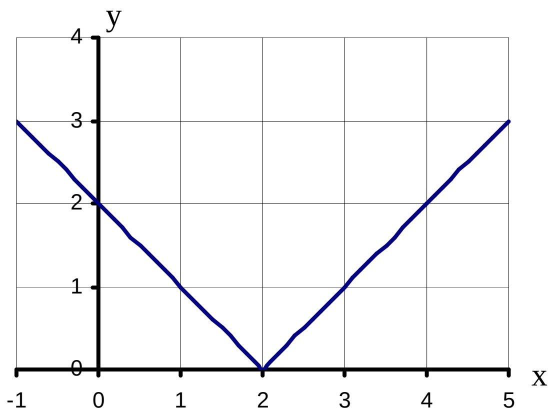
3) a) $\mathbb{L}$ = [–3,5;0,5] b) $\mathbb{L}$ =]$-\infty$;–0,25]$\cup$[0,75;∞[c) $\mathbb{L}$ =]5;11[d) $\mathbb{L}$ =]$-\infty$;–4[$\cup$]3;∞[

e) $\mathbb{L}$ = [$-\frac{1}{3}$;1] f) $\mathbb{L}$ =]$-\infty$;2[$\cup$]6;∞[g) $\mathbb{L}$ = $\mathbb{R}$ h) $\mathbb{L}$ = { } i) $\mathbb{L}$ = { } k) $\mathbb{L}$ =]$-\infty$;3[

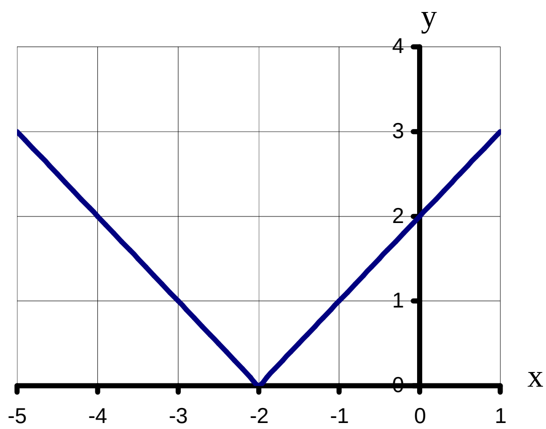
l) $\mathbb{L}$ =]$\frac{1}{9}$;∞[m) $\mathbb{L}$ =]$\frac{7}{6}$;2,5[n) $\mathbb{L}$ =]$-\infty$;–1]$\cup$[$-\frac{1}{9}$;∞[o) $\mathbb{L}$ =]$-\infty$;2[

2)

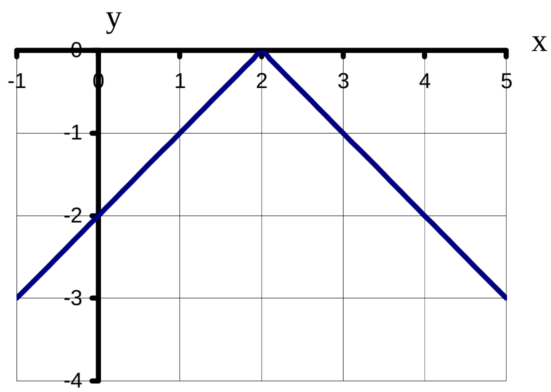
a)


y
4
3
2
1
0
x
-1
0
1
2
3
4
5

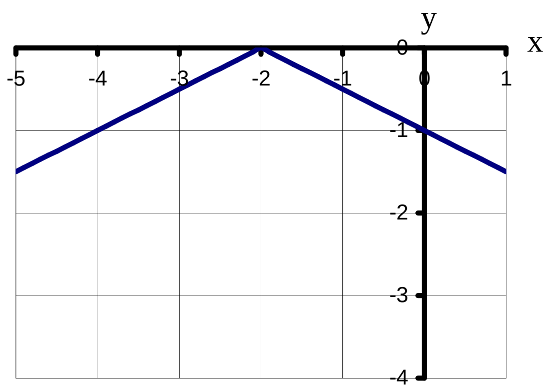
b)


y
4
3
2
1
0
x
-5
-4
-3
-2
-1
0
1

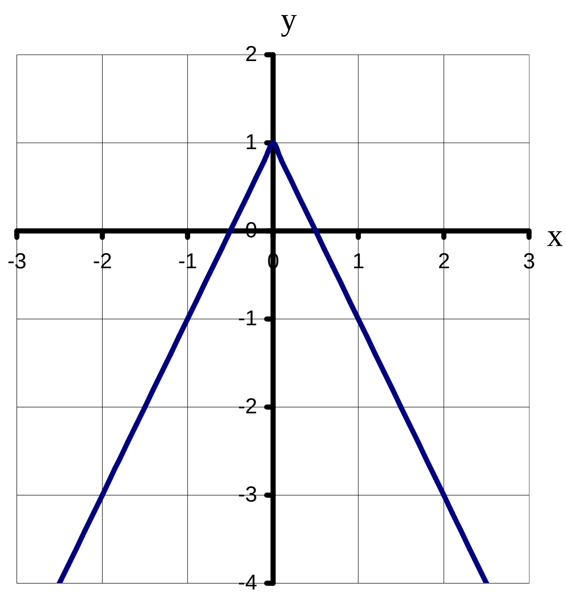
c)


y
0
x
-1
0
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4

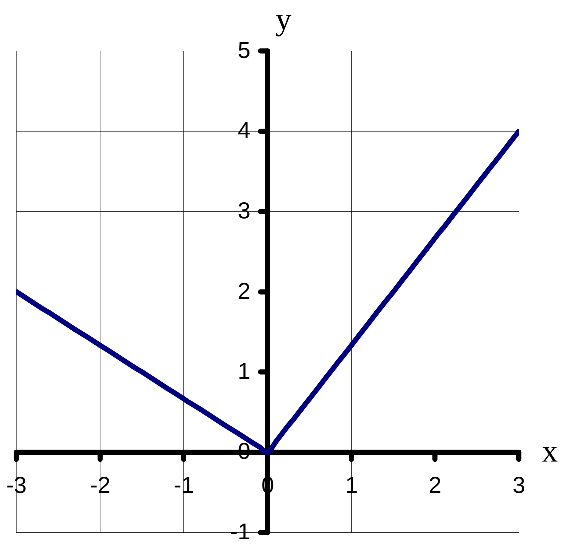
d)


y
0
x
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
-1
-2
-3
-4

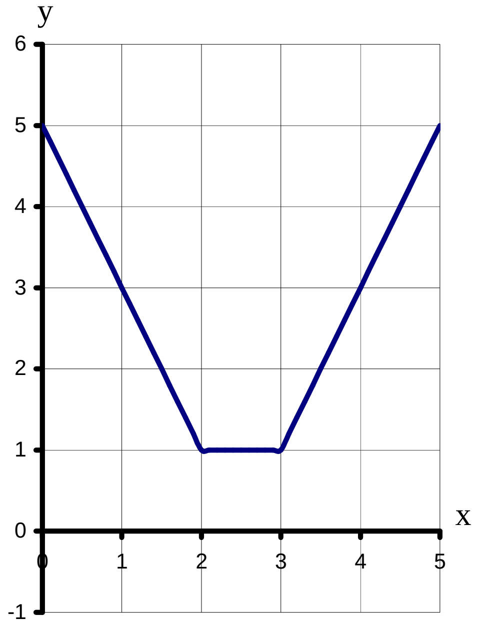
e)


y
2
1
0
x
-3
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2
-3
-4

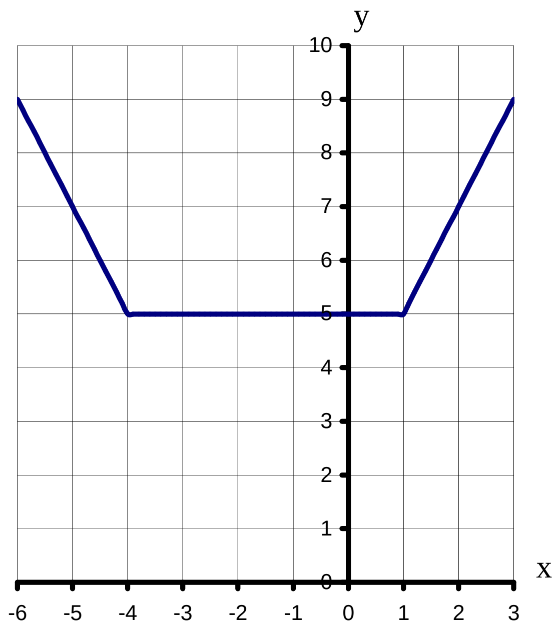
f)


y
5
4
3
2
1
0
x
-3
-2
-1
0
1
2
3
-1

g)



h)



Lösungen IV.13

a) Verknüpfung mit den Grundrechenarten

Summe; Differenz; Produkt; Quotienten; f(x) + g(x); f(x) – g(x); f(x) · g(x); $\frac{f(x)}{g(x)}$; $\mathbb{D}(h) = \mathbb{D}(f) = \mathbb{D}(g)$;

$\mathbb{D}(h) = \mathbb{D}(g)\backslash\{x \mid g(x) = 0\}$

$h_1(x) = x^2 + 2x - 4$; $\mathbb{D}(h_1) = \mathbb{R}$; $h_3(x) = -x^2 + 2x + 4$; $\mathbb{D}(h_1) = \mathbb{R}$; $h_3(x) = 2x^3 - 8x$; $\mathbb{D}(h_3) = \mathbb{R}$;

$h_4(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$; $\mathbb{D}(h_4) = \mathbb{R}\backslash\{2;-2\}$

b) Verkettung

1) $x \mapsto 1{,}8x - 459{,}4$

2) a) $u(v(x)) = 3x + 5$; $v(u(x)) = 3x + 7$
b) $u(v(x)) = -15x + 12$; $v(u(x)) = -15x - 4$
c) $u(v(x)) = 12x - 5$; $v(u(x)) = 12x - 2$
d) $u(v(x)) = 2 + x^2$; $v(u(x)) = (2 + x)^2 = 4 + 4x + x^2$
e) $u(v(x)) = 2 - 9x^2$; $v(u(x)) = 3(2 - 3x)^2$
f) $u(v(x)) = 1 - (1 - x)^4$; $v(u(x)) = x^4$
g) $u(v(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x}$; $v(u(x)) = 1 - \frac{1}{2x}$
h) $u(v(x)) = \frac{1}{1 + 3x^2}$; $v(u(x)) = \frac{3}{(1 + x)^2}$
i) $u(v(x)) = \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}}$; $v(u(x)) = 2(1 - x)^2$
j) $u(v(x)) = 2^{1+x}$; $v(u(x)) = 1 + 2^x$
k) $u(v(x)) = 2 \cdot 3^{x^2}$; $v(u(x)) = 4 \cdot 9^x$
l) $u(v(x)) = x + 2^{x-1}$; $v(u(x)) = x + 2^x$
m) $u(v(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $v(u(x)) = \frac{\pi}{2} \sin x$
o) $u(v(x)) = \cos\left(\pi - \frac{1}{2}x\right)$; $v(u(x)) = \pi - \frac{1}{2} \cos x$
o) $u(v(x)) = \sin^2 x$; $v(u(x)) = \sin(x^2)$

3) a) $(f \circ g)(x) = 4x + 2$; $\mathbb{D} = [-1{,}5;2]$ $(g \circ f)(x) = 4x + 1$; $\mathbb{D} = [-0{,}25;0{,}5]$

b) $(f \circ g)(x) = (1 - x)^2$; $\mathbb{D} = [-1;3]$ $(g \circ f)(x) = 1 - x^2$; $\mathbb{D} = [0;\sqrt{2}]$

c) $(f \circ g)(x) = x^2 - 1$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x^2} - 1}$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

4) a) $u(x) = x^2$; $v(x) = x + 1$ b) $u(x) = x + 2$; $v(x) = x^2$ c) $u(x) = x^2$; $v(x) = \sin x$

d) $u(x) = |x|$; $v(x) = 2x - 1$ e) $u(x) = \cos(x)$; $v(x) = 2x - 1$ f) $u(x) = 2^x$; $v(x) = x - 1$

g) $u(x) = \dfrac{1}{x}$; $v(x) = 2x + 1$ h) $u(x) = \dfrac{1}{x}$; $v(x) = x^2 - 1$ i) $u(x) = x^2 - 1$; $v(x) = \dfrac{1}{x}$

j) $u(x) = x^3$; $v(x) = \sin(3x)$ k) $u(x) = \dfrac{1}{x}$; $v(x) = \cos x$ l) $u(x) = 2^x$; $v(x) = \dfrac{1}{x}$

c) Auswirkungen auf den Graph

5) a) $f(x) = x^2 + 2$ ($x^2 + 1$; $x^3 + 2$; $2^x + 2$; $\cos(x) + 2$)

b) $f(x) = x^2 - 1$ ($x^2 - 2$; $x^3 - 1$; $2^x - 1$; $\cos(x) - 1$)

c) $f(x) = (x - 3)^2$ ($(x - 3)^2 - 1$; $(x - 3)^3$; 2^{x-3}; $\cos(x - 3)$)

d) $f(x) = (x + 1{,}5)^2$ ($(x + 1{,}5)^2 - 1$; $(x + 1{,}5)^3$; $2^{x+1{,}5}$; $\cos(x + 1{,}5)$)

e) $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ ($(x - 2)^2 + 2$; $(x - 2)^3 + 3$; $2^{x-2} + 3$; $\cos(x - 2) + 3$)

6) a) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2$ ($\dfrac{1}{3}(x^2 - 1)$; $\dfrac{1}{3}x^3$; $\dfrac{1}{3}\cdot 2^x$; $\dfrac{1}{3}\cos(x)$)

b) $f(x) = (3x)^2$ ($(3x)^2 - 1$; $(3x)^3$; 2^{3x}; $\cos(3x)$)

7) a) um 1 nach rechts verschoben, mit 2 in y-Richtung gestreckt

b) um 2 nach links verschoben, mit 0,5 in x-Richtung gestaucht (bzw. in y-Richtung)

c) um 1 nach links verschoben, mit 3 in y-Richtung gestreckt

d) mit 2 in x-Richtung gestreckt, mit 2 in y-Richtung gestreckt, an x-Achse gespiegelt

d) Spezialfall: Die allgemeine Sinusfunktion

8) a) Amplitude: 1; Periodenlänge: π; Verschiebung: um $0{,}5\pi$ nach rechts

b) Amplitude: 2; Periodenlänge: $\dfrac{2\pi}{3}$; Verschiebung: um $\dfrac{\pi}{6}$ nach links; an Achse gespiegelt

c) Amplitude: 1; Periodenlänge: 8; Verschiebung: –; an Achse gespiegelt

d) Amplitude: 3; Periodenlänge: 4π; Verschiebung: –; an Achse gespiegelt

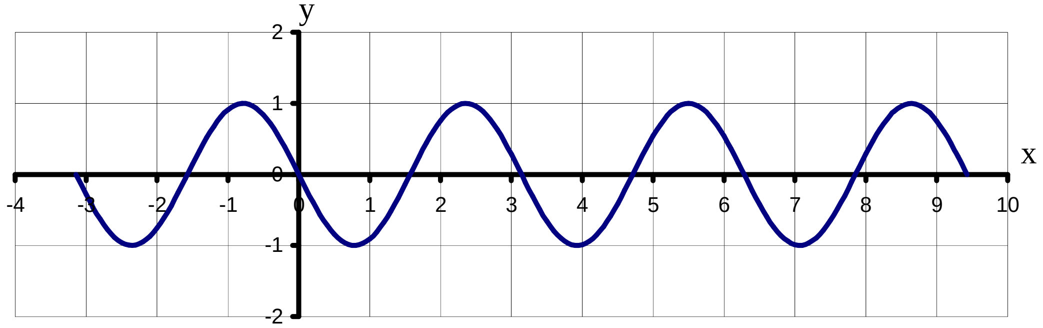
e) Amplitude: 0,75; Periodenlänge: 3π; Verschiebung: um $\dfrac{\pi}{4}$ nach links

f) Amplitude: 12 Periodenlänge: 6; Verschiebung: –

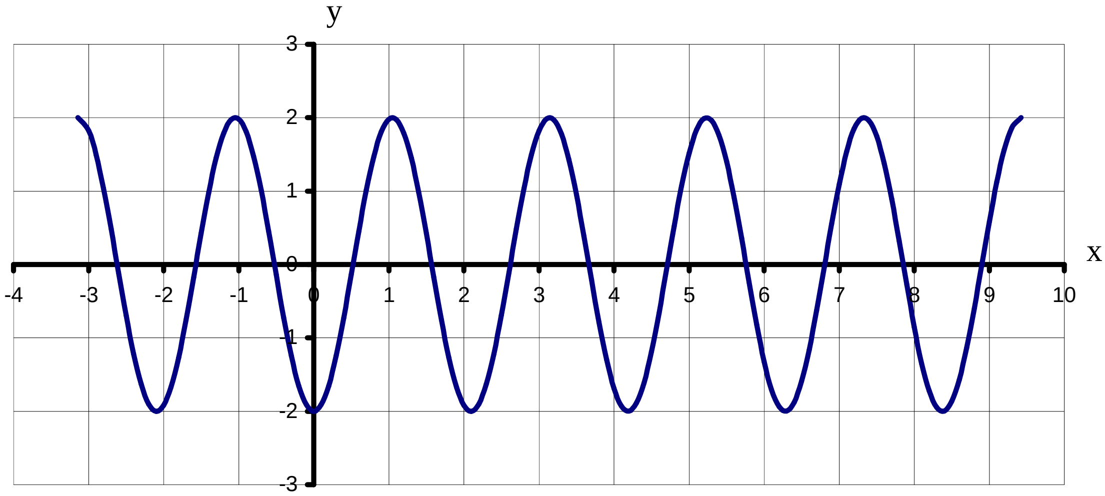
g) Amplitude: 1,25; Periodenlänge: $1{,}2\pi$; Verschiebung: um $\dfrac{3\pi}{50}$ nach rechts; an Achse gespiegelt

h) Amplitude: 1,5; Periodenlänge: 3; Verschiebung: –; an Achse gespiegelt

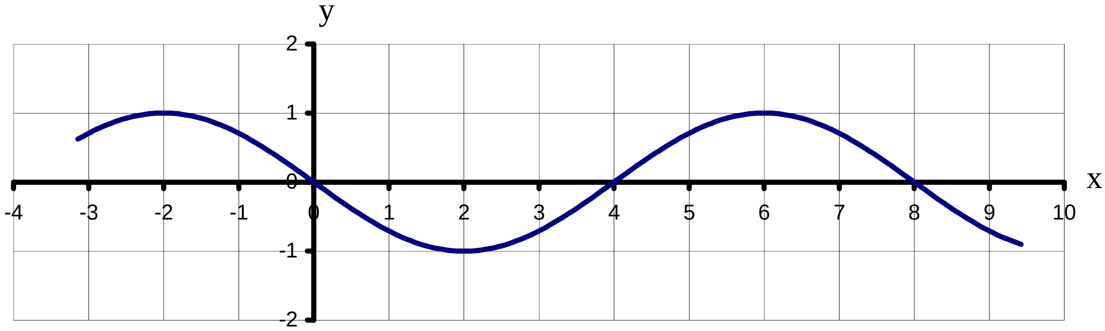
a)



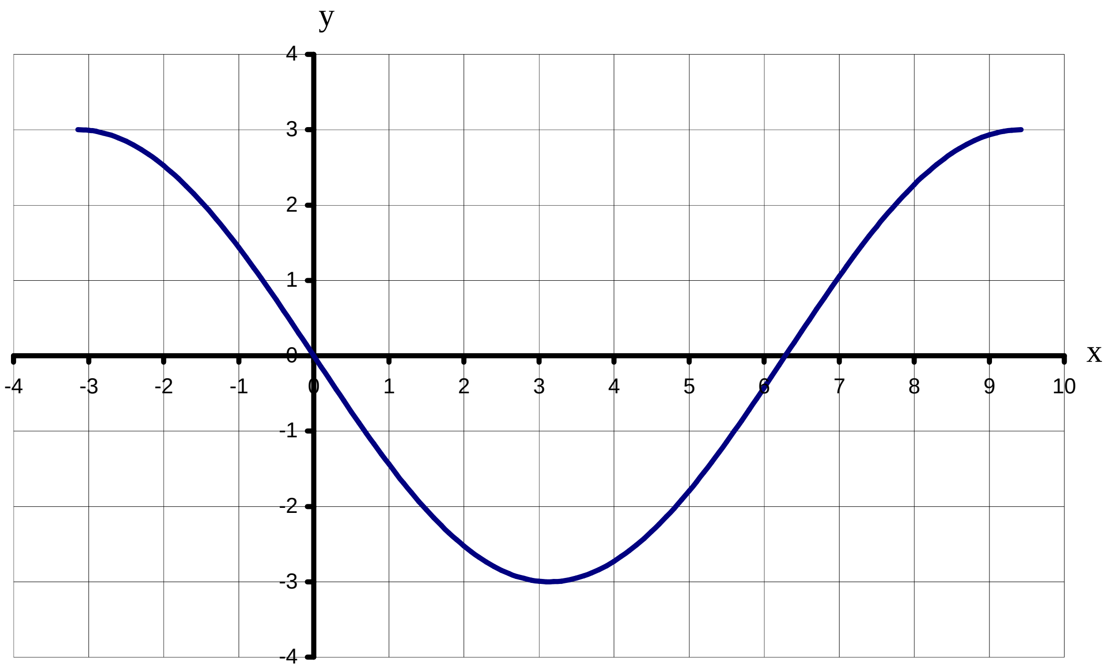
b)


y
3
2
1
0
-1
-2
-3
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

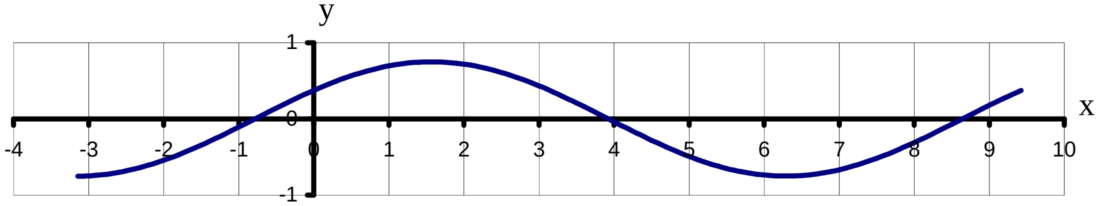
c)


y
2
1
0
-1
-2
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

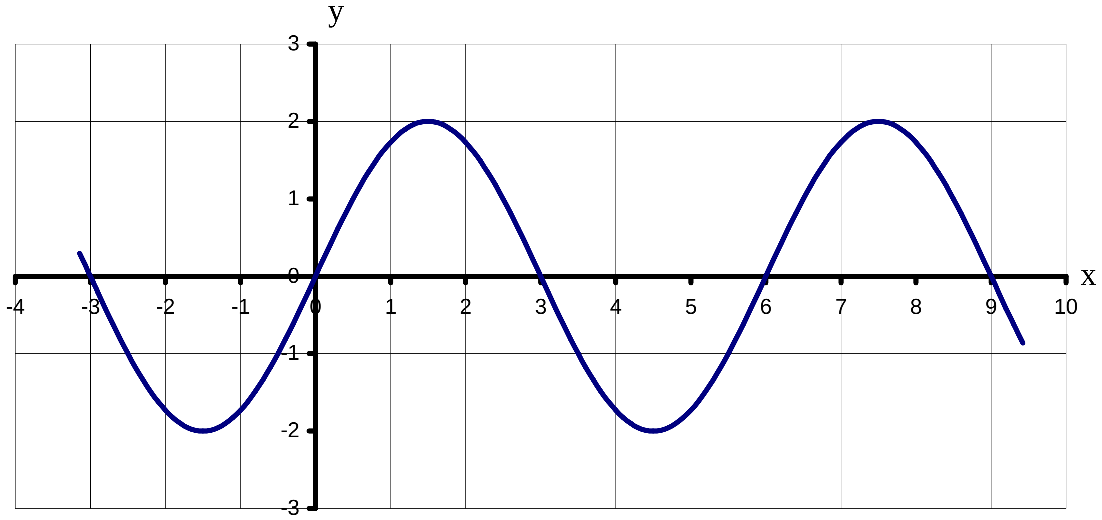
d)


y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

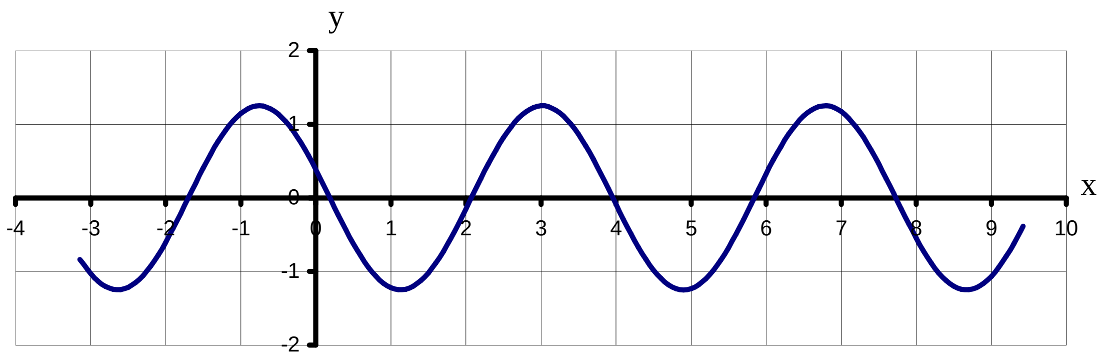
e)


y
1
0
-1
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

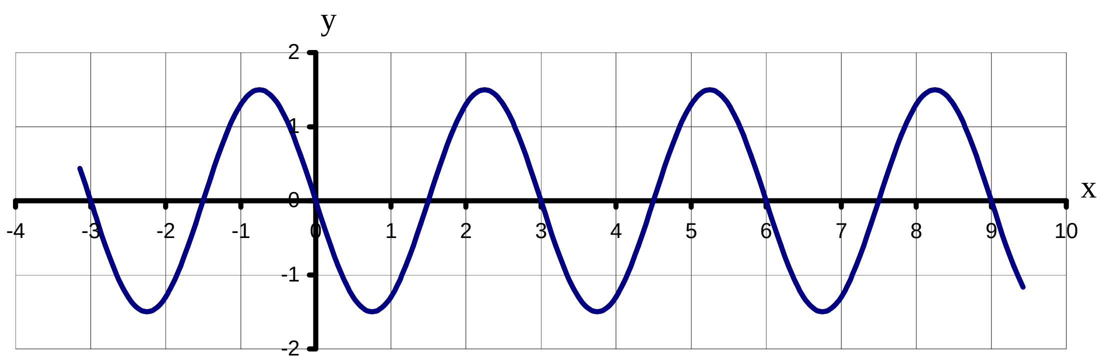
f)


y
x
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

g)


y
x
2
1
0
-1
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

h)


y
x
2
1
0
-1
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10