III.1 Geraden

168/1 jeweils $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

168/2 rot

168/3 a) B, H b) keiner c) A, C, F

168/4 a) f b) w c) f d) w e) f

168/5 z. B.! jeweils $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

168/6 Höhen jeweils über dem Wasser

a) Türme: 65 m; Fußgängerstege: 43 m; Straße: 9 m
Breite der Straße (und damit auch Abstand der Fußgängerstege voneinander): 18 m
Abstand der Türme voneinander: 61 m

b) z. B.: Ursprung in dem Mittelpunkt eines der beiden Türme (Turm 1), der auf Wasserhöhe ist, Straße von diesem Turm aus in Richtung von Turm 2 in x_1-Richtung
Schnittpunkt von Turm 1 mit Straße: (0|0|9)
Schnittpunkt von Turm 2 mit Straße: (61|0|9)
Wenn man die Türme und Fußgängerstege als Geraden betrachtet, dann haben sie keine Schnittpunkte miteinander. Wenn man die Geraden dagegen nur jeweils als die Mittelachsen der Türme und der Fußgängerwege betrachtet (und die Türme und Wege insgesamt z. B. als Quader), dann kann man Schnittpunkte angeben:
Schnittpunkt von Turm 1 mit Fußgängerweg 1: (0|9|43)
Schnittpunkt von Turm 2 mit Fußgängerweg 1: (61|9|43)
Schnittpunkt von Turm 1 mit Fußgängerweg 1: (0|–9|43)
Schnittpunkt von Turm 2 mit Fußgängerweg 1: (61|–9|43)

c) $\alpha, \beta \in [0; 65]$; $\gamma, \delta, \varepsilon \in [0; 61] \in \mathbb{R}$

Turm 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; Turm 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 61 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; Straße: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fußgängerweg 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 43 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; Fußgängerweg 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 43 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

168/7 a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 60 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 400 \\ -80 \\ -40 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ b) nein c) 30 Meter

168/8 a) keine Lösung b) m = 1

168/9 a) m = 1 b) keine Lösung

187/2 a) $a = 10$ b) $a = -1$ c) keine Lösung d) keine Lösung

187/3 a) gelb b) grün

187/4

a) Strecke von $A(3|0|1)$ (eingeschlossen) bis $B(28|-15|36)$ (ausgeschlossen)

b) unendlich viele Punkte auf g, die jeweils um den Vektor $\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}$ voneinander entfernt sind

c) diejenige Halbgerade durch $C(18|-9|22)$ (eingeschlossen), die nicht durch A verläuft

d) Punkte A, B, C, $D(13|-6|15)$

e) diejenige Halbgerade durch $E(23|-12|29)$ (eingeschlossen), die durch A verläuft

f) Punkt A

g) ganz g außer die Punkte A und $F(8|-3|8)$

h) ganz g außer die Strecke $\overline{AF}$ (A und F eingeschlossen)

187/10

a) $k = 5$ | d) $k = 5$
b) $k = -3$ | e) $k = 0$
c) $k = 2$ | f) $k = 2$

188/11 a) $m = 2$ b) $m = 6$ c) keine Lösung d) $m = 6$

190/30

a) unklar, was mit „Kurs" gemeint ist... Richtungsvektor? Geradengleichung?

$PQ: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2,5\\7,3\\9\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}6,5\\-13,8\\-1\end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

b) nein

198/6 $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + k \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ mit $\lambda, k \in \mathbb{R}$

205/14 a) $\overrightarrow{OD_k} = \begin{pmatrix}11\\6\\0\end{pmatrix} + k \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

altes Buch (winklers-Verlag):

93/2 a) z. B. (3; 4), (2; 8), (4; 0), (2,5; 6), (3,5; 2), (1,5; 10), (4,5; –2), (1; 12), (5; –4), ...

Übungsblatt:

1) a) 0; 1; 2,5; 4; –0,5; –2 b) 0; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{5}{3}$; $-\frac{8}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{3}$

2) a) [0;0,5], [–0,25;1,25], [–1; 2], [–0,25;0,5] b) $[-1;\infty[$, $]-\infty;1,25]$; $[-0,25;\infty[$

III.2 Die Parameterform der Ebenengleichung

172/1 P: nein; Q: ja; R: ja

172/2 jeweils $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-7\\1\\-10\end{pmatrix}$ b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}14\\-6\\-7\end{pmatrix}$ c) keine Ebene

172/3 ***wohl besser erst bei Lagebeziehungen!*** $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

a) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\3\\5\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}11\\-8\\-10\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}16\\-1\\3\end{pmatrix}$; $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2,5\\6,5\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}13\\6,5\\14,5\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\14,5\\24,5\end{pmatrix}$ b) ja

172/4 ja

172/5

a) $M: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b) Koordinaten von M einsetzen ==> ...... t = 0; s = −1
Koordinaten von B bzw. C einsetzen ==> ...... keine Lösung

175/6

a) Die Würfeloberfläche ist nur ein endlicher Teil der unendlich großen Ebene. ==> P kann in der Ebene liegen, aber trotzdem nicht auf der Würfeloberfläche.

b) Man nehme eine der Würfelecken als Aufpunkt und die beiden Kanten von dort aus, welche die gewünschte Oberfläche begrenzen, als Richtungsvektoren. Dann prüfe man wie üblich, ob der Punkt in der Ebene liegt (in Ebenengleichung einsetzen, λ und μ berechnen). Wenn dann sowohl $0 \leq \lambda \leq 1$ als auch $0 \leq \mu \leq 1$ gilt, liegt der Punkt auf der Würfeloberfläche.

178/2 e) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

187/5 jeweils $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$ABC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$ABS: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

$BCS: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

$CAS: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

187/6

Man könnte z. B. einfach $\vec{p} = \vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$ wählen, oder nur $\vec{u} = \vec{0}$, oder nur $\vec{v} = \vec{0}$ (Rest beliebig), oder beliebige kollineare Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$.

188/12 $a = 1$

189/26

a) $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(8|12|0)$, $D(0|12|0)$,
$A_d(0|0|3)$, $B_d(8|0|3)$, $C_d(8|12|3)$, $D_d(0|12|3)$,
$E(4|3|8)$, $F(4|9|8)$

b) $\vec{x} = \overrightarrow{OB_d} + m \cdot \overrightarrow{B_dF} + n \cdot \overrightarrow{B_dC_d}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

204/6 $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Übungsblatt:

244/12 (0; 0), (0,5; –1), ($\frac{7}{6}$; 0), (1,5; 1), (–0,5; 0), ($-\frac{1}{3}$; –1)

244/13 A(0|0,5|1), B(0|2|1), C(–1|1,5|1), D(2|7,5|1)

245/17 a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ b) B ∈ g ==> unendl. viele Möglichkeiten

3) a) $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}-5\\0\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ c) $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

246/22 a) Gerade durch den Punkt mit Ortsvektor $\vec{a} + \vec{u}$ und Richtungsvektor $\vec{v}$
b) Halbgerade vom Punkt mit Ortvektor $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{v}$ aus und Richtungsvektor $\vec{u}$
c) 1. Quadrant der aufgespannten Ebene (Achsen in Richtung der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$)
d) Rechteck mit Eckpunkten, deren Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{a} + 2\vec{u}$, $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{v}$, $\vec{a} + 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ sind
e) Dreieck mit Eckpunkten, deren Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{u}$, $\vec{a} + \vec{v}$ sind

246/23 a) z. B. P(1|2|6), Q(–4|3|9), R(3|1|4), S(–2|2|7), T($1-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ | $6+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$) ...
b) A: nein; B: ja ($\lambda = \mu = 1$)
c) z. B. $\lambda = 0$, $\mu = 0{,}5$ ➔ C(2|1,5|5); oder $\lambda = -1$, $\mu = 0$ ➔ D(6|1|3); oder $\lambda = 1$, $\mu = 1$ ➔ B usw.
d) $\lambda = -1 + 2\mu$ in E einsetzen ➔ $P_\mu(6-8\mu|1+\mu|3+4\mu)$

246/24 a) ABC: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-5\\5\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix}$; O ∈ ABC mit $\lambda = 0$, $\mu = \frac{2}{3}$ ➔ O liegt auf Seite [AC]

b) ABC: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\-4\\-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix}$; D ∈ ABC mit $\lambda = -0{,}5$, $\mu = 0{,}5$ ➔ D liegt außerhalb von ΔABC

246/25 a) A(1|2|6), B(6|6|8), C(5|4|2) b) OABC: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$; $\lambda \in [0;1]$, $\mu \in [0;1]$

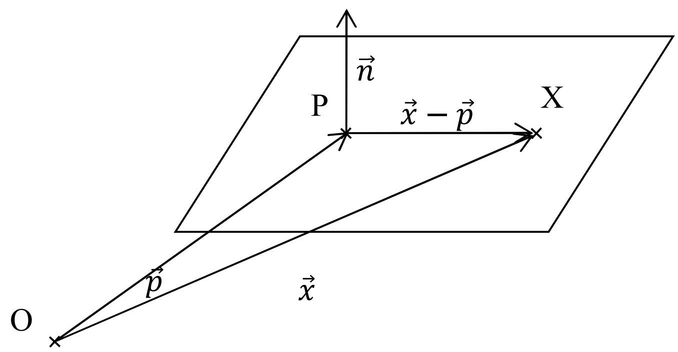
P einsetzen ➔ $\lambda = 0{,}6$, $\mu = 0{,}8$ ➔ P liegt im Innern des Parallelogramms
Q einsetzen ➔ $\lambda = 1{,}5$, $\mu = 0{,}5$ ➔ Q liegt außerhalb des Parallelogramms

III.3 Normalen- und Koordinatenform der Ebenengleichung

Normalenform:

178/1 a) nein b) ja c) ja d) nein e) ja f) nein

178/6 So eine Skizze sollte eigentlich normalerweise bereits im Unterricht vorgekommen sein...

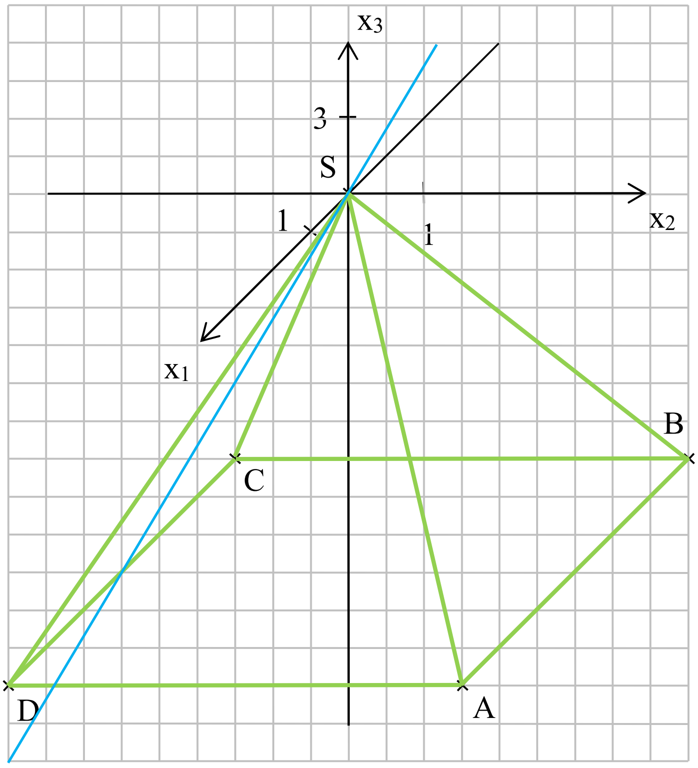


Für jeden beliebigen Punkt X in der Ebene liegt der Verbindungsvektor $\vec{x} - \vec{p}$ in der Ebene. Da $\vec{n}$ senkrecht zur Ebene steht, ist $\vec{n}$ also senkrecht zu $\vec{x} - \vec{p}$. Also muss $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ gelten.

190/27 Koordinatensystem nicht eindeutig festgelegt; z.B.!

a) $A(3|3|-15)$, $B(-3|3|-15)$, $C(-3|-3|-15)$, $D(3|-3|-15)$

b,e)



c) $ABS: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\-15\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-3\\3\\-15\end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

d) $G: \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\-15\end{pmatrix}\right) = 0$

e) $t: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\-3\\-15\end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

Koordinatenform:

175/1 a) ja b) ja c) nein d) ja

175/5 a) $a = 1{,}625$ b) $a = \frac{2}{11}$ c) $a \in \mathbb{R}$ d) $a \in \mathbb{R}$

178/2 z.B.!

a) $E: \begin{pmatrix}-1\\6\\5\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0$ b) $E: \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0{,}5\\0\end{pmatrix}\right) = 0$

178/3 a) $E: 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2 = 0$ b) $E: 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2 = 0$

189/20 $d = 0: \mathbb{R}^3$; $d \neq 0: \{\,\}$

190/30 c) $Z_1Z_2Z_3: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-7\\9\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}4\\-2\\12{,}4\end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

bzw. $Z_1Z_2Z_3: -68{,}8x_1 + 11{,}2x_2 + 24x_3 + 188{,}8 = 0$

altes Buch (winklers-Verlag):
102/3

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; z. B. (0; 0; –1), (1; 1; 0), (1; 0; –3), (1; 2; 3), ...

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; z. B. (0; –7; 0), (1; 0; 2), (3; 2; 0), (4; 1; –2), ...

c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; z. B. (0; 0; 3), ($-\frac{1}{3}$; 0; 0), (1; 0; –12), (–1; 5; –6), ...

d) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; z. B. (1; –1; 25), (–1; 1; 0), (–1,5; 0; 0), (0; 3; –14), ...

e) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; z. B. (–3; 1; 0), (–3; 1; 10), (–6; 0; 0), (0; 2; –5), ...

f) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; z. B. (4; 0; 0), (4; 1; 1), (4; –10; 15), (4; 0,5; 20,25), ...

Umrechnung Parameter- in Normalenform:
178/2 z.B.!

c) $E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = 0$

d) $E\colon \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = 0$

e) $E\colon \begin{pmatrix} -19 \\ 16 \\ 36 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = 0$

f) $E\colon \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0$

205/14

b) $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bzw. $E\colon -0{,}5x_1 + x_2 - x_3 - 3 = 0$

c) $k = -5$

Übungsblatt: 5) a) E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0$ b) E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$

Umrechnung Parameter- in Koordinatenform:
175/2

a) $E\colon 10x_1 + 11x_2 - 24x_3 - 89 = 0$
b) $E\colon 9x_1 - 29x_2 - 17x_3 + 29 = 0$
c) $E\colon 13x_1 - 7x_2 - 4x_3 + 67 = 0$
d) $E\colon 19x_1 - 26x_2 + 8x_3 + 7 = 0$

175/4

a) d = 1 ==> $E\colon x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$
b) d = 61 ==> $E\colon 11x_1 + 18x_2 - x_3 - 61 = 0$
c) d = 48 ==> $E\colon 7x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 48 = 0$

Übungsblatt: jeweils $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2) a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $4x_1 - x_2 - 3x_3 - 10 = 0$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$; $7x_1 - 13x_2 + 11x_3 - 30 = 0$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $30x_1 - 21x_2 + 2x_3 - 9 = 0$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $4x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 9 = 0$

Umrechnung Normalen-/Koordinatenform in Parameterform:

175/3 z.B.! jeweils $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $E: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

178/4

a) z. B. $P(6|1|-4)$, $Q(4|4|-5)$, $R(4|7|-7)$

b) z.B.! jeweils $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b1) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

b2) Koordinatenform aus 3(a) ==> $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ==> $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) Methode 1: Punkte finden sehr schwierig, danach Standard

Methode 2: Berechnen der Koordinatenform leichter Aufwand, Umrechnen in Parameterform aufwendig, aber alles Standardrechnungen

Methode 3: Finde ich am einfachsten. Das schwierigste ist es, passende Vektoren zu finden, mit geschicktem Probieren (in jedem Vektor eine 0 verwenden) ist das aber meist schnell machbar.

187/8

a) siehe Homepage! (Umrechnung der Ebenengleichungs-Formen; Übersicht dazu)

b)

	Vorteile	Nachteile
Parameterform	anschaulich; einfach aufzustellen; man kann eingeschränkte Punktmengen beschreiben	praktisch alle Rechnungen damit sind aufwendig
Normalenform	halbwegs anschaulich, Punktprobe geht recht einfach	Punkte und Richtungen finden schwierig, aufstellen ist aufwendiger
Koordinatenform	praktisch alle Rechnungen damit sind einfach	recht unanschaulich; Punkte und Richtungen finden ist etwas schwieriger

188/18

a) $y = -2x + 3 \quad ==> \quad x_2 = -2x_1 + 3$

wähle $x_1 = 2 - 2s$ (warum auch immer...) $\quad ==> \quad x_2 = -2(2 - 2s) + 3 = -1 + 4s$

$$==> \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-2s \\ -1+4s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

viel sinnvoller wäre $x_1 = s \quad ==> \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$!

b) aus dem Gleichungssystem $x_1 = 2 - 2s, \quad x_2 = -1 + 4s$ muss man s eliminieren

(alternativ: Normalenform der Geradengleichung als Zwischenschritt verwenden (klappt nur im $\mathbb{R}^2$!); den Normalenvektor wählt man dabei durch geschicktes Probieren)

c) vgl. 187/8b

III.4 Lagebeziehungen und Schnitt

a) zwei Geraden

198/1 a) Schnitt b) windschief c) identisch d) echt parallel

198/2 a) $a = -1{,}5$ b) $a = -12$

198/3

a) Richtungsvektoren kollinear ==> g, h identisch oder echt parallel ==> nur unendlich viele oder keinen gemeinsamen Punkt möglich

b) kann zutreffen (wenn g und h identisch sind)

c) Richtungsvektoren linear abhängig ==> g, h identisch oder echt parallel ==> windschief nicht möglich

d) kann zutreffen (wenn sich g und h in einem Punkt schneiden)

e) Richtungsvektoren nicht kollinear ==> g, h schneiden sich in einem Punkt oder sind windschief ==> nur ein oder kein gemeinsamer Punkt möglich

f) trifft immer zu

198/4 z.B.! jeweils $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

198/6

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, k \in \mathbb{R}$

g, h sind windschief

198/7 siehe Homepage!

198/8

a) ja

b) B liegt auf Gerade s_1 mit $\lambda = 1$ ==> B liegt in Stollen 1; A liegt auf Gerade s_2

außerdem: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1}$ und $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_2}$ ==> kürzeste Verbindung

224/1 zeigen, dass sie sich schneiden: s. Blatt! a) $\approx 4{,}31°$ b) $90°$

224/5

a) wie bekannt $\left(s = -\frac{5}{11};\quad t = \frac{13}{11}\right)$

b) ja ($s = -0{,}5$); Kriterien: ? (blaue Kugel muss möglichst zentral getroffen werden, das kann hier aber nicht modelliert werden, da die Kugeln anscheinend als punktförmig betrachtet werden!)

c) vgl. (b): Die Kugeln werden anscheinend als punktförmig betrachtet. Deshalb kann weder berücksichtigt werden, an welchen Stellen sie getroffen werden, noch, wie sie sich drehen. Beides hat beim realen Billard großen Einfluss auf die Bewegungen der Kugeln.

224/6 ja; S = B; ≈89,44°;

224/9

h habe den Richtungsvektor $\vec{v}$ ==> $\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\circ\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

beliebiges Vielfaches von $\vec{u}$ wählen, also $k \cdot \vec{u}$ mit $k \neq 0$: $\frac{|(k\cdot\vec{u})\circ\vec{v}|}{|k\cdot\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|k|\cdot|\vec{u}\circ\vec{v}|}{|k|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}\circ\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \cos\alpha$

235/1 z.B.! jeweils $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 1{,}8 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Aufpunkt nicht auf g; Richtungsvektor gleich)

b) $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 1{,}8 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Aufpunkt nicht auf g; Richtungsvektor so gewählt, dass er nicht in der Ebene liegt, die g und h enthält, z. B. senkrecht dazu)

236/11

- Stützvektor von g verwendet statt Richtungsvektor
- im Zähler fehlt der Betrag
- im Nenner plus statt mal
- beim Skalarprodukt: Vorzeichenfehler im 2. Summanden
- Betrag des zweiten Richtungsvektors falsch berechnet: $1^2 + 3^2 + 5^2 = 35$ (anscheinend die Koordinaten mal 2 gerechnet statt quadriert: $2\cdot1 + 2\cdot3 + 2\cdot5 = 17$)
- = geschrieben statt ≈
- Aus der Rechnung ergibt sich eigentlich erst mal $\alpha \approx 152{,}38°$; der Zwischenschritt $180° - \alpha$ fehlt.
- Rundungsfehler

b) zwei Ebenen

217/1 jeweils $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 18{,}4 \\ 4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 104/15 \\ -4 \\ 3{,}2 \end{pmatrix}$

b) $s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) E und F sind echt parallel

d) $s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) E und F sind identisch

217/4

z. B.:

$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

E wird praktisch beliebig gewählt. F hat mit E den Aufpunkt und einen Richtungsvektor gemeinsam; den zweiten Richtungsvektor von F muss man so wählen, dass nicht komplanar mit den beiden Richtungsvektoren von E ist.

217/6 a) $s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{15}{11} \\ 0 \\ \frac{29}{11} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

b) z. B.! jeweils $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b1) $G\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{15}{11} \\ 0 \\ \frac{29}{11} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2. Richtungsvektor so gewählt, dass er nicht komplanar zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist und nicht $\perp$ $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ==> $G \neq F$ und $G \neq E$; alle drei haben aber die Gerade s gemeinsam)

b2) $G\colon 2x_2 - x_3 + \frac{29}{11} = 0$ ($\perp$ zu s durch den Aufpunkt von s)

b3) $G\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(jeweils einen Punkt auf E bzw. F wählen, der nicht auf s liegt, einen davon als Aufpunkt wählen, ihren Verbindungsvektor als Richtungsvektor, den Richtungsvektor von s als 2. Richtungsvektor ==> G ist echt parallel zu s ==> es gibt drei verschiedene Schnittgeraden, 7. Fall)

217/8

Aufpunkt und Richungsvektor von g für F verwenden; außerdem beliebigen Punkt wählen, der nicht auf E liegt, und den Verbindungsvektor von diesem Punkt zum Aufpunkt von g als 2. Richtungsvektor verwenden ==> z. B.: $F\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

218/11 rot

218/12

gelb: Sind $\vec{n}$ und der neue Normalenvektor $\vec{n}'$ nicht kollinear, so schneiden sich die beiden Ebenen.

z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{n}' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, also $E: x_1 - 1 = 0$, $E': x_2 - 2 = 0$

Sind $\vec{n}$ und der neue Normalenvektor $\vec{n}'$ dagegen kollinear, so sind die beiden Ebenen identisch.

z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{n}' = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, also $E: x_1 - 1 = 0$, $E': 5x_1 - 5 = 0$

grün: Liegt der neue Ortsvektor $\vec{p}'$ auch in der Ebene, so sind die beiden Ebenen identisch.

z.B. $\vec{p} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{p}' = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,

also $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $E': \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

218/14

a) Zumutung! Stufenform führt auf die Gleichung $3t^2 - 41t - 4 = 0$ und das wiederum auf die Bedingung $t_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1729}}{6}$! letztlich folgt: es gibt immer eine Schnittgerade

b) $t = 3$: identisch; sonst: Schnittgerade

c) $t = 1$: echt parallel; sonst: Schnittgerade

218/15

a) Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt.

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bzw. $E: x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 10 = 0$

b) Vorsicht: In der Angabe steht *s* sowohl für einen Parameter als auch für die Schnittgerade!

$s: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

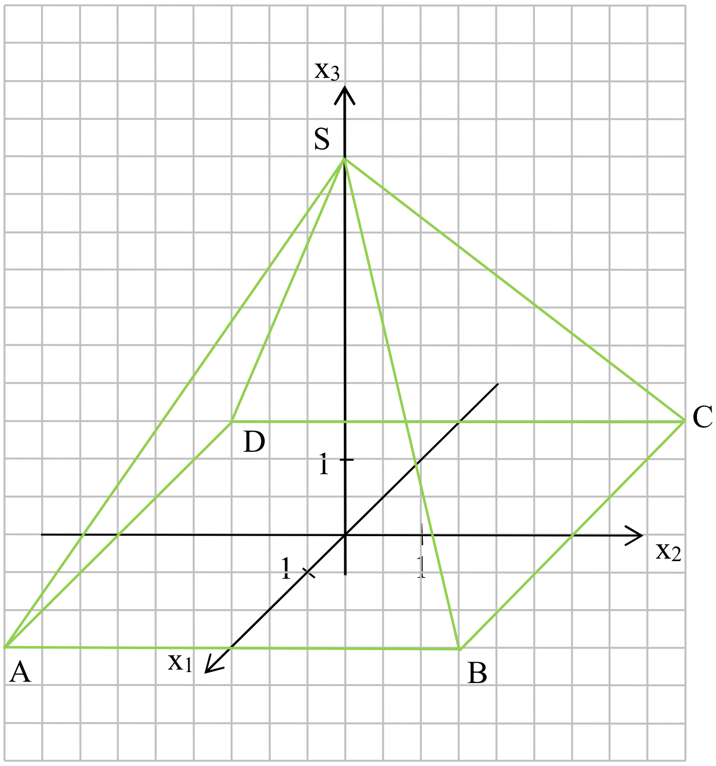
c) nein, da $\begin{pmatrix}a\\6\\9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$ für keinen Wert von a kollinear sind

224/2

a) $\approx 50{,}00°$; $s: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2{,}4\\3{,}2\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-0{,}6\\1{,}8\\1\end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $90°$; $s: \vec{x} = \begin{pmatrix}1{,}125\\-1{,}875\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-0{,}625\\1{,}375\\1\end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

224/4 a) $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \cdots = 0$ b) D$(-3|-3|0)$, M$(0|0|0)$ d) $\approx 54{,}45°$; $\approx 59{,}04°$



c) Drei Ebenen

217/2

a) 7. Fall

b) 6. Fall; $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

c) 8. Fall; $S(2|-1|-3)$

218/13

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Das LGS hat genau eine Lösung. ==> Die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 13 & 22 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Das LGS hat keine Lösung. ==> 3 Schnittgeraden, oder (mindestens) zwei Ebenen sind echt parallel. (Offensichtlich sind aber keine der Ebenen echt parallel zueinander, also gibt es 3 Schnittgeraden.)

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen. Es gibt eine Nullzeile. ==> Es gibt eine Schnittgerade. (Keine der Ebenen sind echt parallel oder identisch, also ist es der 6. Fall von S. 215).

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen. Es gibt eine Nullzeile. ==> Es gibt eine Schnittgerade. (Zwei der Ebenen sind identisch, also ist es der 3. Fall von S. 215).

d) Gerade und Ebene

190/29

a) $ABE: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\quad CDF: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) $S_{ABE}\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|\frac{4}{3}\right)$, $S_{CDF}\left(\frac{4}{3}\middle|\frac{8}{3}\middle|\frac{8}{3}\right)$ (= Schwerpunkte der Dreiecke!) c) $\frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}31$

204/1 a) Schnitt; $P(-1|-2|2)$ b) echt parallel c) g liegt in E

204/2 a) Schnitt b) g liegt in E c) echt parallel d) Schnitt

204/3

a) $E: x_2 - 1 = 0$; g liegt in E
b) $E: 461x_1 - 46x_2 - 269x_3 - 146 = 0$; Schnitt; $P(1|1|1)$
c) $E: 20x_1 - 14x_2 + 5x_3 - 22 = 0$; g liegt in E

204/4

Zunächst prüft man, ob $\vec{n} \perp \vec{u}$ ist. Falls nein, schneidet die Gerade die Ebene. Falls ja, prüft man, ob der Aufpunkt der Gerade in der Ebene liegt. Falls nein, ist die Gerade echt parallel zur Ebene; falls ja, liegt sie in der Ebene.

Beispiel: $E: \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}\right) = 0;$

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\-7\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\quad g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}_1$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}4\\3\\-7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}\right) = \cdots = 0 \Longrightarrow A_1$ in E $\Longrightarrow g_1$ in E

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}_2$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}\right) = \cdots \neq 0 \Longrightarrow A_2$ liegt nicht in E

$\Longrightarrow g_2$ ist echt parallel zu E

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \vec{n}$ nicht $\perp \vec{u}_3 \Longrightarrow g_3$ schneidet E

204/7 a) f b) w c) w d) f e) f

204/8 a) *den* Schnittpunkt, nicht „die"! $S(-2{,}5|-5|-5{,}25)$ b) nein c) $a = -4$

205/9

a) Schnitt b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$, $\quad E: 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 9$

c) x_1, x_2, x_3 aus g in E einsetzen
d) unklar, was mit „Koordinaten von *g*" gemeint ist... eine Zahl einer der beiden Vektoren? eine komplette Zeile? ..... ?

falls zweiteres gemeint ist, wäre z. B. $g': \vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\3\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$) möglich

205/10 z.B.! jeweils $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

a) $E: x_1 + x_2 + x_3 + 4 = 0$ bzw. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $E: x_1 + 9x_2 = 0$ bzw. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $E: x_1 + 9x_2 + 13 = 0$ bzw. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $E: 5x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 0$ bzw. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$

205/11

a) P als Aufpunkt; Richtungsvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ so wählen, dass $\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig sind

bzw. $\vec{n}$ so wählen, dass er nicht senkrecht zu $\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist, dann d aus P berechnen

Koordinatenform etwas leichter

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}$ nicht kollinear dazu wählen, Aufpunkt so wählen, dass er nicht auf g liegt

bzw. $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ wählen, dann d so wählen, dass P nicht in E liegt; Koordinatenform etwas leichter

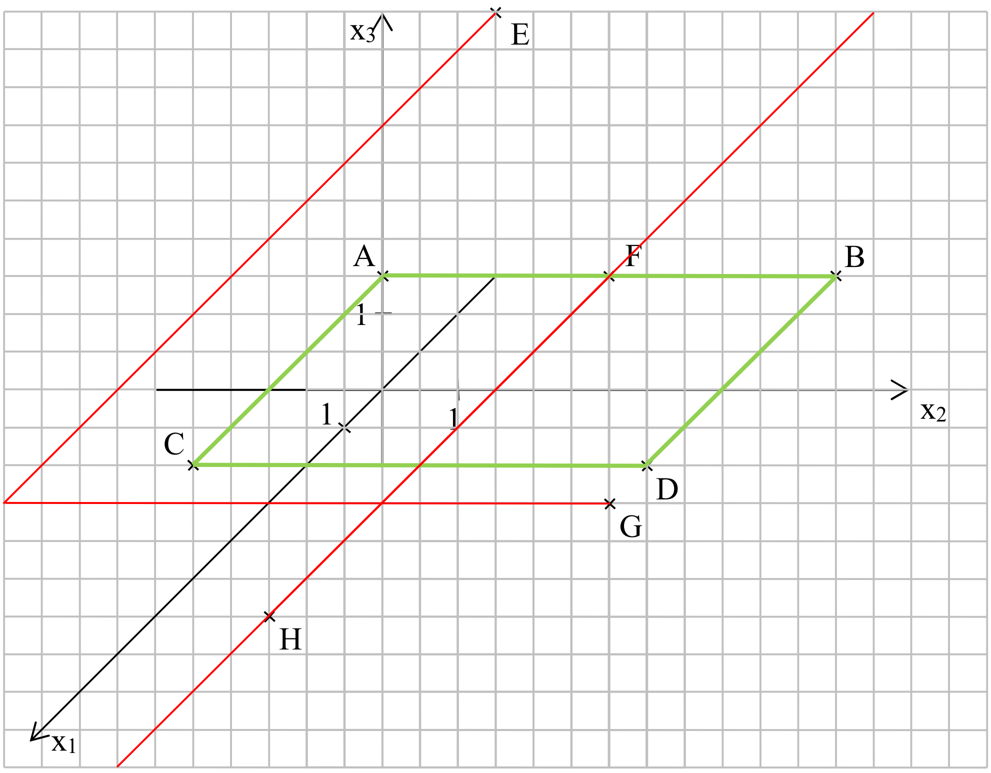
c) wie (b), aber Aufpunkt auf g wählen
bzw. wie (b), aber d so berechnen, dass P in E liegt
beide etwa gleich leicht

d) wie (c), aber $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ bzw. d = 0 setzen; $\vec{n}$ so wählen, dass P in E liegt und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ gilt ==> z. B.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$; Parameterform leichter

205/12

a)



b) II und IV

205/13 $a=1$: g liegt in E_a; sonst: Schnitt

205/15 $a=\frac{14}{9}$: g_a ist echt parallel zu E_a; sonst: Schnitt

205/16 a) gelb b) gelb

224/3 a) $\approx 26{,}45°$ b) $\approx 10{,}98°$ c) $90°$

224/7 a) $F\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\50\\92\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-32\\-32\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\32\\-32\end{pmatrix}$ mit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$ sind komplanar

224/8

a) A(10|0|0), B(10|12|0), C(0|10|0), D(10|0|6), E(10|12|6), F(0|10|6), G(0|0|6)

b) $E_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\0\\6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}$ mit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ bzw. $E_1\colon \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}10\\0\\6\end{pmatrix}\right)=0$

$E_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\12\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-10\\-2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$ mit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ bzw. $E_2\colon \begin{pmatrix}-1\\5\\0\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}10\\12\\0\end{pmatrix}\right)=0$

$E_3\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\12\\6\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-10\\-2\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-5\\-7\\4\end{pmatrix}$ mit $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ bzw. $E_3\colon \begin{pmatrix}-2\\10\\15\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}10\\12\\6\end{pmatrix}\right)=0$

c) $\approx 70{,}28°$ d_1) $\approx 38{,}33°$ d_2) $\approx 55{,}79°$

235/5 Schnitt nachweisen: siehe Blatt!

a) $\approx 28{,}81°$ b) $\approx 11{,}03°$ c) $\approx 8{,}74°$ d) $\approx 58{,}78°$ e) $\approx 20{,}68°$ f) $\approx 33{,}31°$

236/7

a) $a=\pm 1$ $(p=1{,}5; r=0{,}75$ bzw. $p=0; r=1{,}5)$

b) a = 2 und c = 8: identisch; a = 2 und c $\neq$ 8: echt parallel; a $\neq$ 2 und c = a+6: Schnitt; sonst: windschief

c) S(3; –4; –1); E_4: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}-3\\-4{,}5\\3\end{pmatrix}$ mit m, n $\in\mathbb{R}$

d) a = –2: echt parallel; a = 3: g_1 liegt in E_1; sonst: Schnitt in einem Punkt

e) S(–3; 5; 5); $\alpha\approx 38{,}17°$ f) g_S: $\vec{x}=\begin{pmatrix}10\\4\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ mit $\lambda\in\mathbb{R}$; $\beta\approx 17{,}34°$

g) $a=\frac{1}{4}$ h) $\left|\overrightarrow{PR}\right|=\frac{\sqrt{9a^2+118}}{2}$

236/8

Als Aufpunkt von *g* kann man einen beliebigen Punkt aus *E* wählen, z. B. $(-1|0|0)$.

Beim Richtungsvektor muss gelten: $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|\vec{u}\circ\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\left|\vec{u}\circ\begin{pmatrix}-5\\6\\3\end{pmatrix}\right|}{|\vec{u}|\cdot\sqrt{70}}$. Man könnte versuchen, $\vec{u}$ mit der Länge 1 zu wählen; dann hat man noch die Gleichung $\left|\vec{u}\circ\begin{pmatrix}-5\\6\\3\end{pmatrix}\right|=\frac{\sqrt{140}}{2}$ zu erfüllen. Das hat zwar unendlich viele Lösungen, ist aber trotzdem nur sehr schwierig lösbar.

Alternativ kann man auch so vorgehen: Man sucht sich zunächst einen Vektor $\vec{v}$, der dieselbe Länge wie $\vec{n}$ hat, also $\sqrt{70}$, und in *E* liegt. Man hat also die Gleichungen $\vec{v}\circ\begin{pmatrix}-5\\6\\3\end{pmatrix}=0$ und $|\vec{v}|=\sqrt{70}$ zu erfüllen.

Auch dies hat unendlich viele Lösungen. Wählt man z. B. $v_1 = 0$, so erhält man $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{14} \\ -2\sqrt{14} \end{pmatrix}$. Setzt man nun $\vec{u} = \vec{n} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6+\sqrt{14} \\ 3-2\sqrt{14} \end{pmatrix}$, so schließt $\vec{u}$ mit $\vec{n}$ und $\vec{v}$ jeweils einen Winkel von 45° ein (gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck!). Also kann man dieses $\vec{u}$ als Richtungsvektor der Gerade verwenden.

237/15 b) grün

237/16 alle $\lambda_i \in \mathbb{R}$, alle Längen bzw. Koordinaten in m

Beschreibung etwas unklar: Läuft man vom Straßenknick aus Richtung Hütte weiter nach Osten? Wenn ja, dann:

a) $\left(-1000-500\sqrt{2} \approx -1707 \middle| 300+500\sqrt{2} \approx 1007 \middle| -1\right)$

b) Weg 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; Straße 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Straße 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; Weg rauf: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} \sqrt{2400} \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$

Weg oben parallel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1000+\sqrt{2400} \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Weg runter: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1000+\sqrt{2400}-500\sqrt{2} \\ 300+500\sqrt{2} \\ 100 \end{pmatrix} + \lambda_6 \begin{pmatrix} -\sqrt{2400} \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}$

Weg nach Baum: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1000-500\sqrt{2} \\ 300+500\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_7 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wiese: $x_3 = 0$; Oberfläche des Berges: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_8 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_9 \begin{pmatrix} \sqrt{2400} \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$

Lagebeziehungen zueinander: viel Spaß!

237/17 keine allgemeine Lösung angebbar; machen Sie mal!

III.5 Lage im Koordinatensystem

a) Gerade im KS

186/1

a) $S_{12}(4|0|0) = S_{13}$, $S_{23}(0|6|10)$

b) $S_{12}(1{,}75|2|0)$, $S_{13}(3{,}25|0|-2)$, $S_{23}\left(0\middle|\frac{13}{3}\middle|\frac{7}{3}\right)$

c) $S_{12}\left(-\frac{17}{3}\middle|\frac{7}{3}\middle|0\right)$, $S_{13}(6|0|-7)$, $S_{23}(0|1{,}2|-3{,}4)$

d) $S_{12}(-4|9|0)$, $S_{13}(-1|0|3)$, $S_{23}(0|-3|4)$

e) $S_{12}(6|4|0)$, $S_{13}(0|0|8) = S_{23}$

186/2 z. B.! jeweils $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

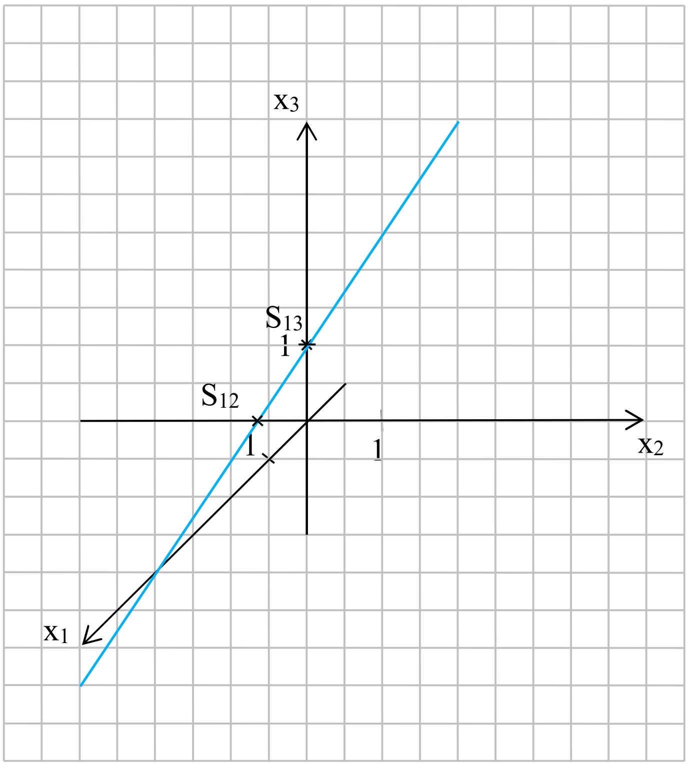
c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

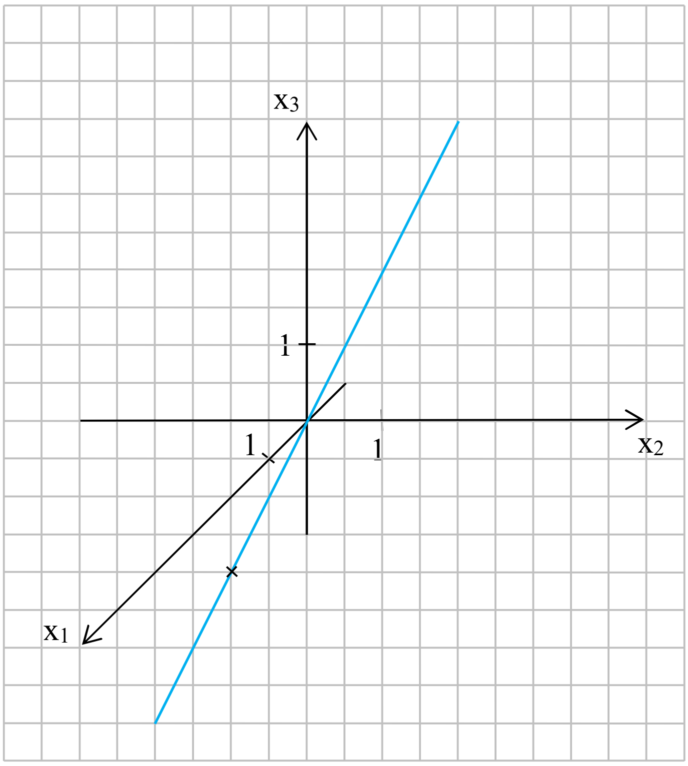
d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

186/3

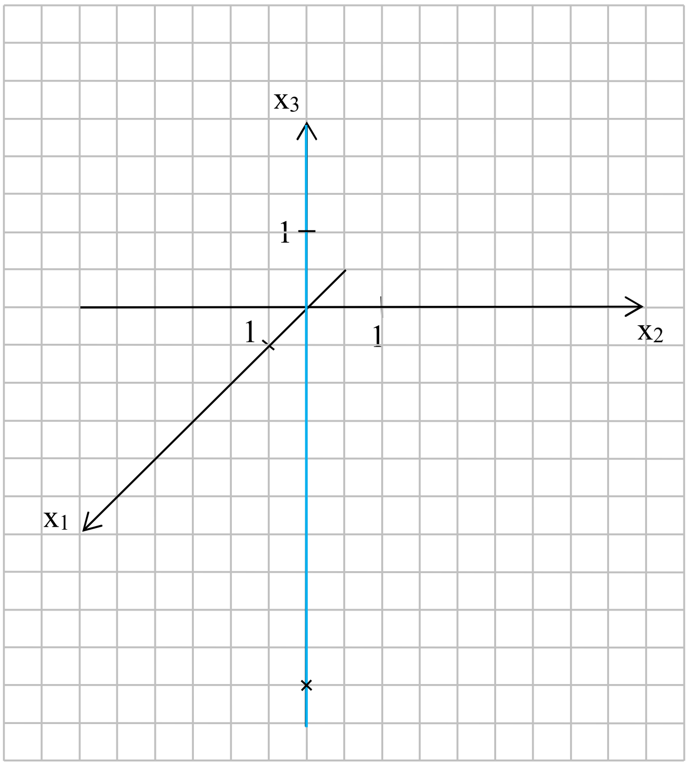
a) g liegt in der x_2-x_3-Ebene



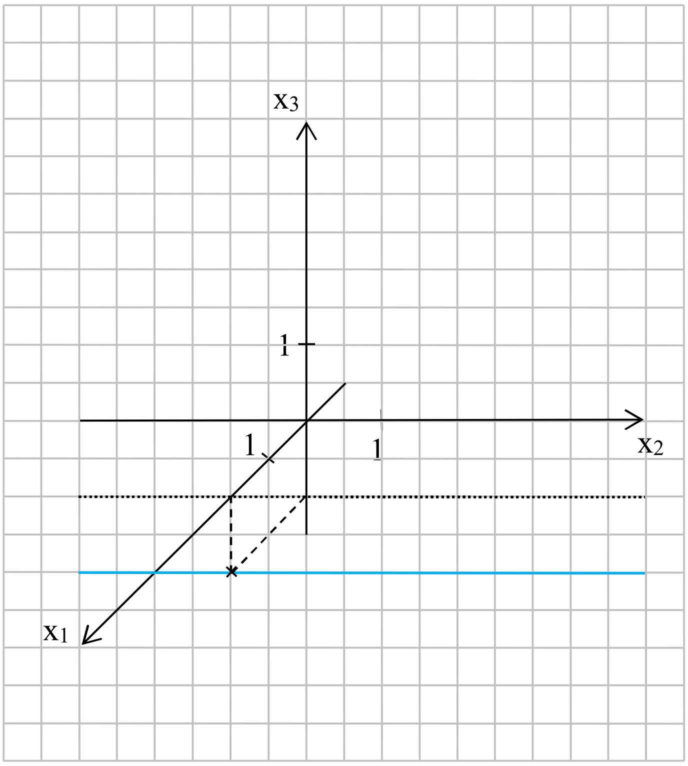
b) g liegt in der x_1-x_3-Ebene und verläuft durch den Ursprung



c) g ist die x_3-Achse



d) g liegt echt parallel zur x_2-Achse



<u>186/4</u> gelb

<u>187/1</u> jeweils $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$AC: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$AD: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$BC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$BD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$CD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

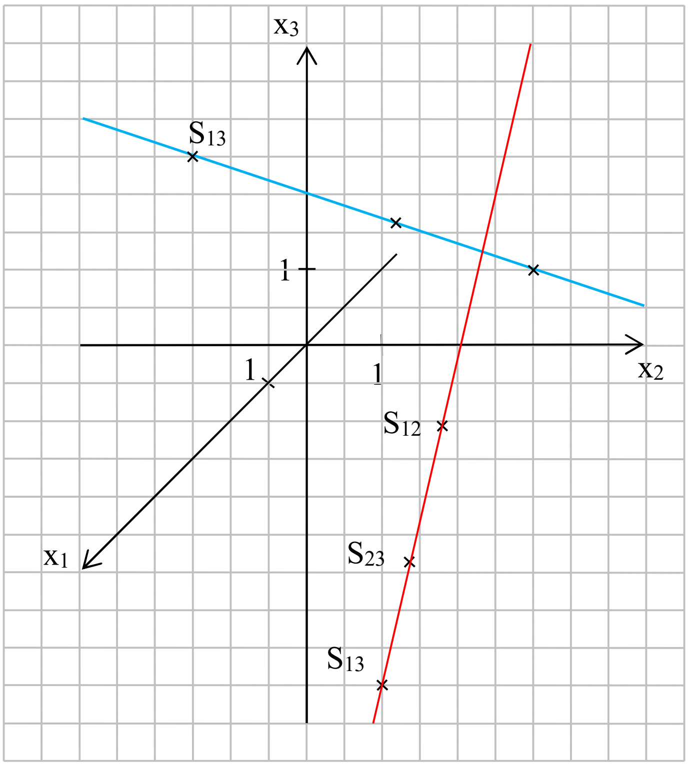
b) keine zwei Richtungsvektoren sind kollinear

c) $S_{12}(-11{,}5|4{,}5|0)$, $S_{13}(11|0|9)$, $S_{23}(0|2{,}2|4{,}6)$

<u>198/5</u> grün

<u>204/5</u>

a) $S_{13}(3|0|4)$ b) $S_{12}(2{,}125|2{,}75|0)$, $S_{13}(-2|0|-5{,}5)$, $S_{23}\left(0\middle|\frac{4}{3}\middle|-\frac{17}{6}\right)$ c) blau: g; rot: h

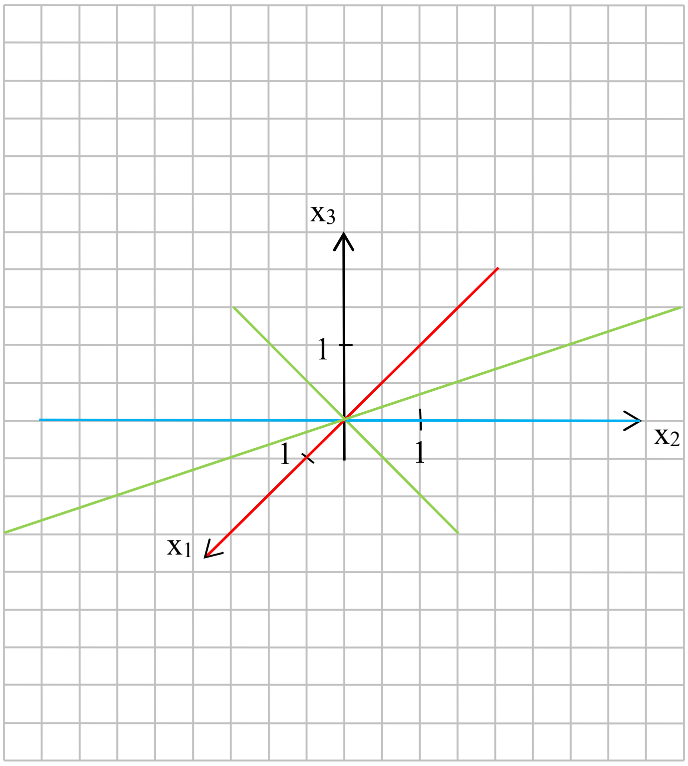


d) ja ($\overrightarrow{S_1S_2}$ und $\overrightarrow{S_1S_3}$ sind kollinear)

236/10

a) S = O b) $w_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $w_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ c) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$

d) g: rot; h: blau; Winkelhalbierende: grün



b) Ebene im KS

217/3 jeweils $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$

a) $s_{12}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4{,}375\\2{,}5\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-3{,}125\\-1{,}5\\0\end{pmatrix}$, $s_{13}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2{,}5\\0\\-5\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$, $s_{23}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\4\\12{,}5\end{pmatrix}$

b) $s_{12}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{11}{3}\\-\frac{5}{9}\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}7\\4\\0\end{pmatrix}$, $s_{13}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}19\\0\\-36\end{pmatrix}$, $s_{23}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\11\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\\frac{19}{3}\\21\end{pmatrix}$

c) $s_{12}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-3\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$, $s_{23}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\-14\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}$; s_{13} existiert nicht

217/5 jeweils $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$

a) $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-7\\0\\3\end{pmatrix}$

$s_{12}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$, $s_{13}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-7\\0\\3\end{pmatrix}$, $s_{23}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2{,}25\\0\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\5{,}25\\3\end{pmatrix}$

$F\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$

$s_{12}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$, $s_{13}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-0{,}75\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}1\\0\\1{,}25\end{pmatrix}$, $s_{23}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$

$$G: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$s_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}, \quad s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad s_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

b) $E: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{-2{,}25} + \frac{x_3}{\frac{9}{7}} = 1 \implies S_1(3|0|0),\ S_2(0|-2{,}25|0),\ S_3\left(0\middle|0\middle|\frac{9}{7}\right)$

$$s_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-3\\-2{,}25\\0\end{pmatrix}, \quad s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-3\\0\\\frac{9}{7}\end{pmatrix}, \quad s_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2{,}25\\0\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\2{,}25\\\frac{9}{7}\end{pmatrix}$$

$F: \frac{x_1}{0{,}6} + \frac{x_2}{-3} + \frac{x_3}{-0{,}75} = 1 \implies S_1(0{,}6|0|0),\ S_2(0|-3|0),\ S_3(0|0|-0{,}75)$

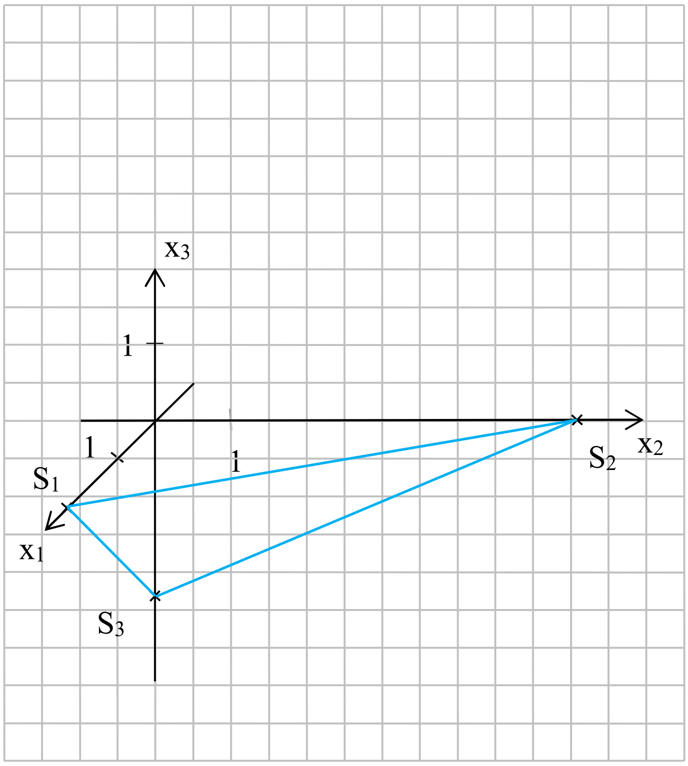
$$s_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0{,}6\\3\\0\end{pmatrix}, \quad s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-0{,}75\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0{,}6\\0\\0{,}75\end{pmatrix}, \quad s_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\3\\-0{,}75\end{pmatrix}$$

$G: \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{\frac{2}{3}} + \frac{x_3}{-2} = 1 \implies S_1(2|0|0),\ S_2\left(0\middle|\frac{2}{3}\middle|0\right),\ S_3(0|0|-2)$

$$s_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}, \quad s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}, \quad s_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$$

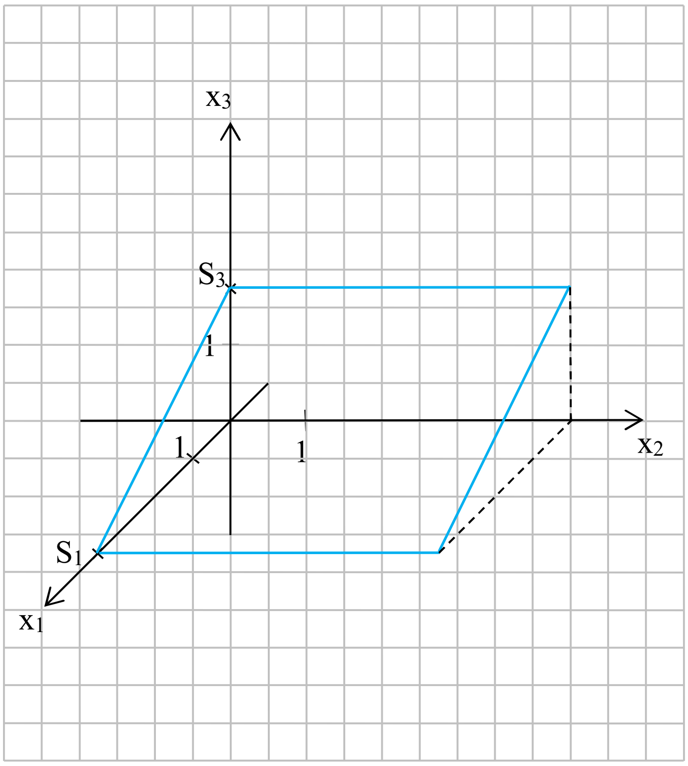
<u>182/1</u>

$E: \frac{x_1}{\frac{7}{3}} + \frac{x_2}{5{,}6} + \frac{x_3}{-\frac{7}{3}} = 1$

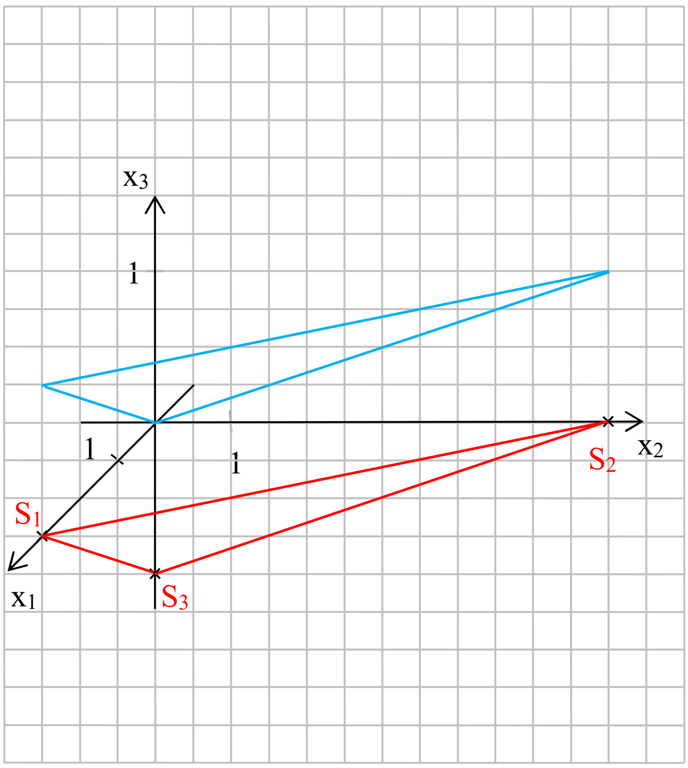


182/2

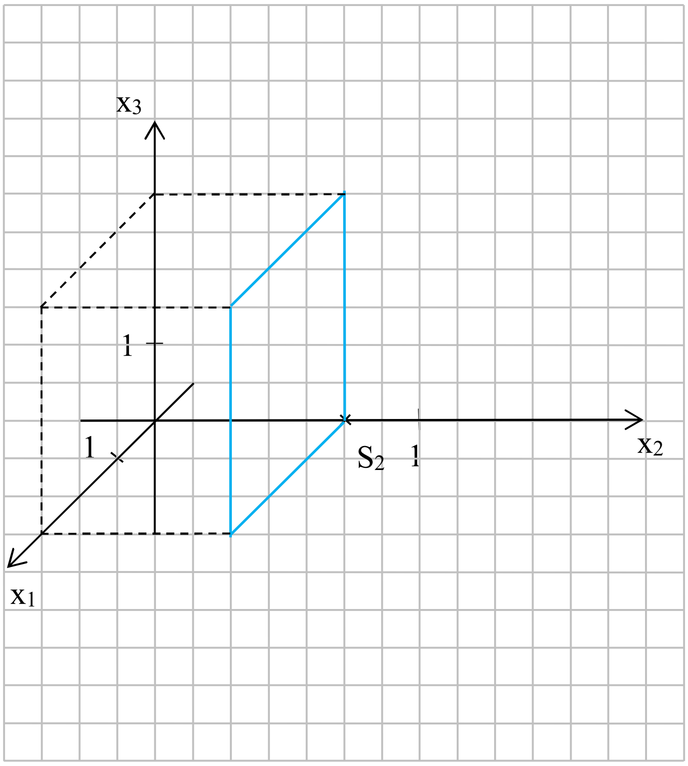
a) $S_1(3{,}5|0|0)$, $S_3(0|0|1{,}75)$; E liegt echt parallel zur x_2-Achse



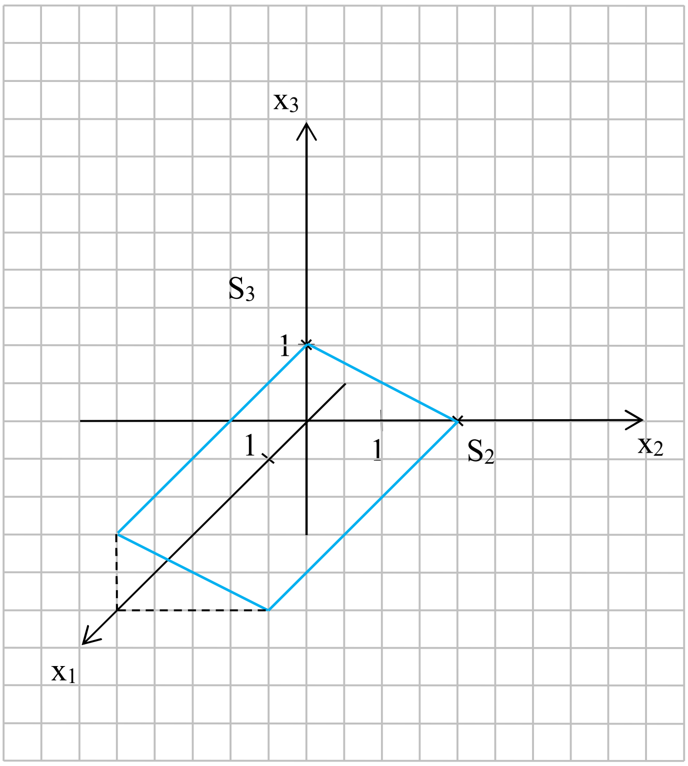
b) $S_1 = S_2 = S_3 = O$; E enthält den Ursprung; Hilfsebene: $x_1 + 0{,}5x_2 - 3x_3 - 3 = 0$



c) $S_2\left(0\middle|\frac{5}{7}\middle|0\right)$;   E liegt echt parallel zur x_1-x_3-Ebene



d) $S_2(0|2|0)$, $S_3(0|0|1)$;   E liegt echt parallel zur x_1-Achse



<u>182/3</u>   a) grün   b= rot

187/7 z.B.!

a) $E: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$

b) $E: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0$

c) $E: \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$

d) $E: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$

e) $E: \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0$

f) $E: \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$ (enthält x_2-Achse!)

187/9 $E: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{1{,}5} + \frac{x_3}{-2} = 1$ ==> $S_1(3|0|0),\ S_2(0|1{,}5|0),\ S_3(0|0|-2)$

188/13

a) $E: \frac{x_1}{\frac{8}{3}} + \frac{x_2}{-1{,}6} + \frac{x_3}{\frac{4}{3}} = 1$ ==> $S_1\left(\frac{8}{3}|0|0\right),\ S_2(0|-1{,}6|0),\ S_3\left(0|0|\frac{4}{3}\right)$

b) $E: \frac{x_1}{-0{,}5} + \frac{x_2}{1} + \frac{x_3}{\frac{1}{3}} = 1$ ==> $S_1(-0{,}5|0|0),\ S_2(0|1|0),\ S_3\left(0|0|\frac{1}{3}\right)$

c) $E: \frac{x_1}{\frac{91}{17}} + \frac{x_2}{-36{,}4} + \frac{x_3}{-13} = 1$ ==> $S_1\left(\frac{91}{17}\middle|0|0\right),\ S_2(0|-36{,}4|0),\ S_3(0|0|-13)$

d) $E: \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{\frac{4}{3}} = 1$ ==> $S_1(1|0|0),\ S_2(0|4|0),\ S_3\left(0|0|\frac{4}{3}\right)$

188/14 $A(0|5|0),\ B(4|0|0),\ C(0|0|6)$ ==> $E: \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{6} = 1$ (==> E:$15x_1 + 12x_2 + 10x_3 - 60 = 0$)

188/15

a) $E: \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{0{,}5} = 1$ (==> E:$3x_1 + 4x_2 + 24x_3 - 12 = 0$)

b) $E: \frac{x_1}{0{,}25} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{7} = 1$ (==> E:$140x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 35 = 0$)

188/16

E ist die x_2-x_3-Ebene

a) keine Änderung

b) echt parallel zur x_1-x_2-Ebene

c) keine Änderung

d) enthält die x_3-Achse (und ist winkelhalbierende Ebene)

188/17 a) f b) f c) w d) f e) w

189/19 a) x_3-Achse; $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

b) x_2-x_3-Ebene; $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

c) Ebene echt parallel zur x_2-x_3-Ebene im Abstand 5; $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

189/21 z.B.!

a) $E: x_2 + x_3 = 1$
b) $E: x_1 = 0$
c) $E: x_1 + x_3 = 1$
d) $E: x_2 = 1$
e) $E: x_1 + x_2 + x_3 = 0$
f) $E: x_1 + x_2 = 0$

189/22

$a = 0$: echt parallel zur x_1-x_2-Ebene
$a = -2$: enthält die x_1-Achse
$a = 1$: echt parallel zur x_3-Achse

189/23

$\vec{e_i}$ bzw. $\vec{e_j}$ (i bzw. j ist jeweils 1, 2 oder 3) bezeichnet im Folgenden die Vektoren der Standardbasis, die Ebene hat die Gleichung $E: \vec{x} = \vec{p} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$.

$\vec{e_i}, \vec{u}, \vec{v}$ komplanar, aber $\vec{e_j}, \vec{u}, \vec{v}$ nicht komplanar für alle $j \neq i$ und $\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}$ nicht komplanar:
E ist echt parallel zur x_i-Achse

$\vec{e_i}, \vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}$ jeweils komplanar, aber $\vec{e_j}, \vec{u}, \vec{v}$ nicht komplanar für alle $j \neq i$:
E enthält die x_i-Achse

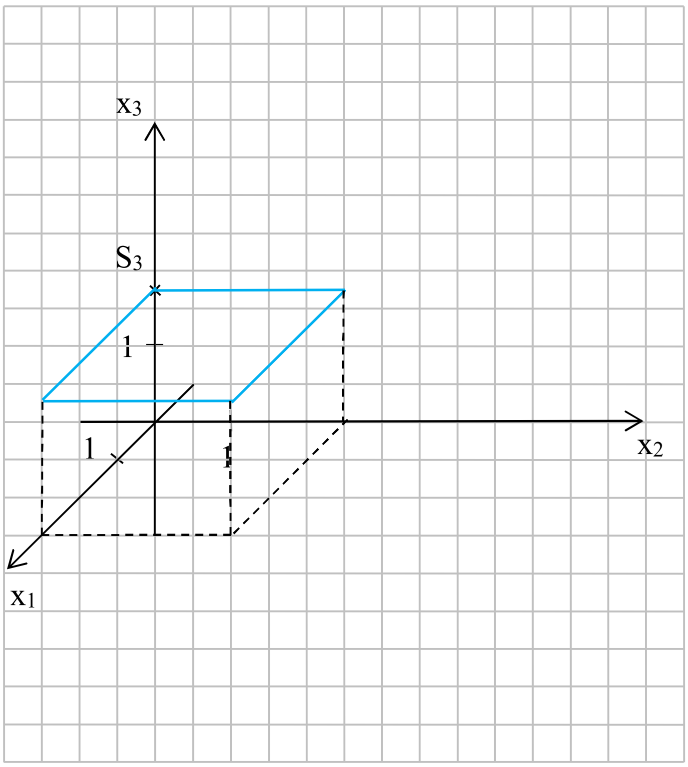
$\vec{e_i}, \vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{e_j}, \vec{u}, \vec{v}$ komplanar ($j \neq i$), aber $\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}$ nicht komplanar:
E ist echt parallel zur x_i-x_j-Ebene

$\vec{e_i}, \vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{e_j}, \vec{u}, \vec{v}$ ($j \neq i$) und $\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}$ jeweils komplanar:
E ist die x_i-x_j-Ebene

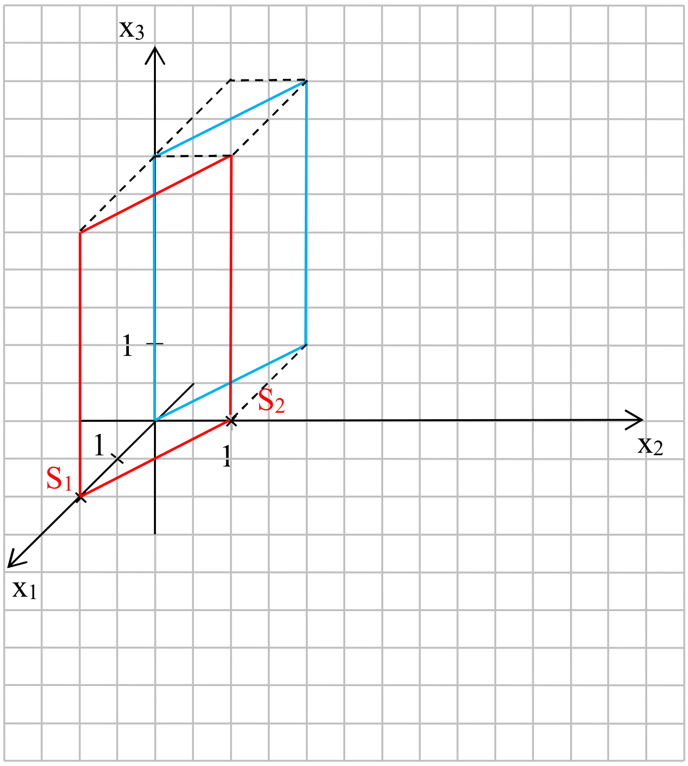
$\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}$ komplanar: E enthält den Ursprung

189/24

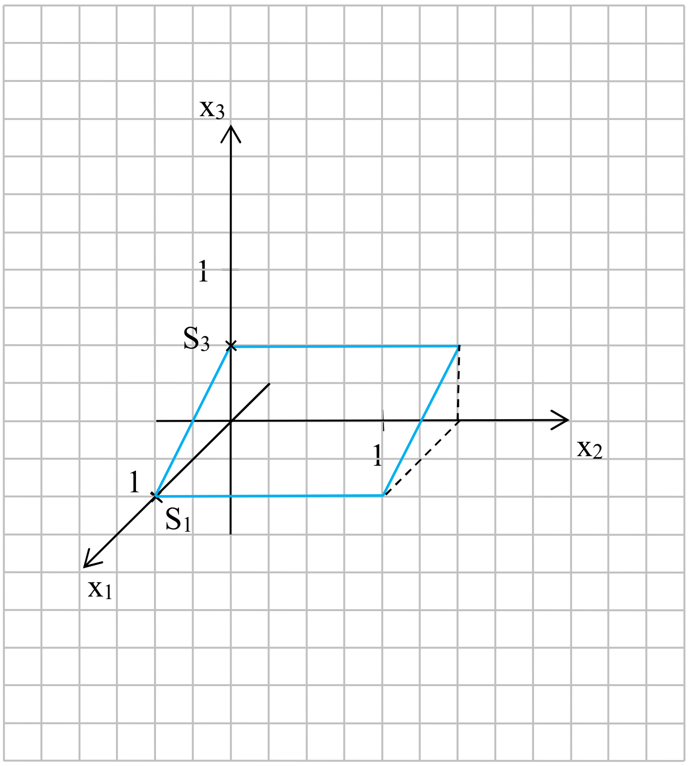
a) echt parallel zur x_1-x_2-Ebene



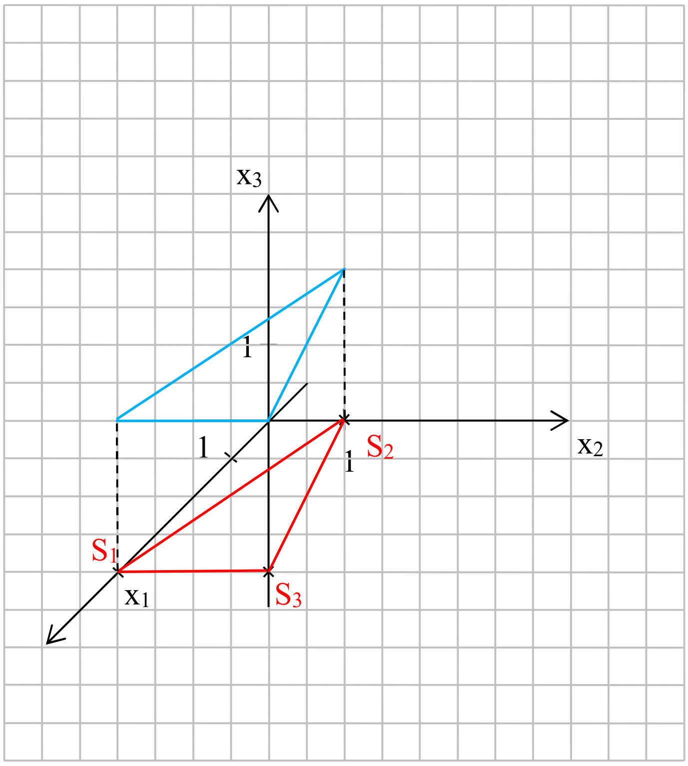
b) enthält die x_3-Achse; Hilfsebene: $x_1 + 2x_2 - 2 = 0$



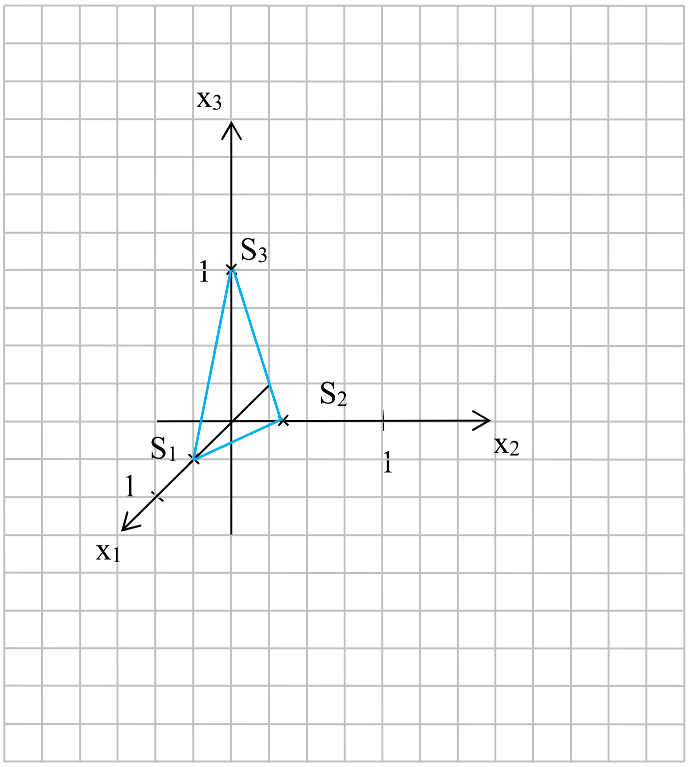
c) echt parallel zur x_2-Achse



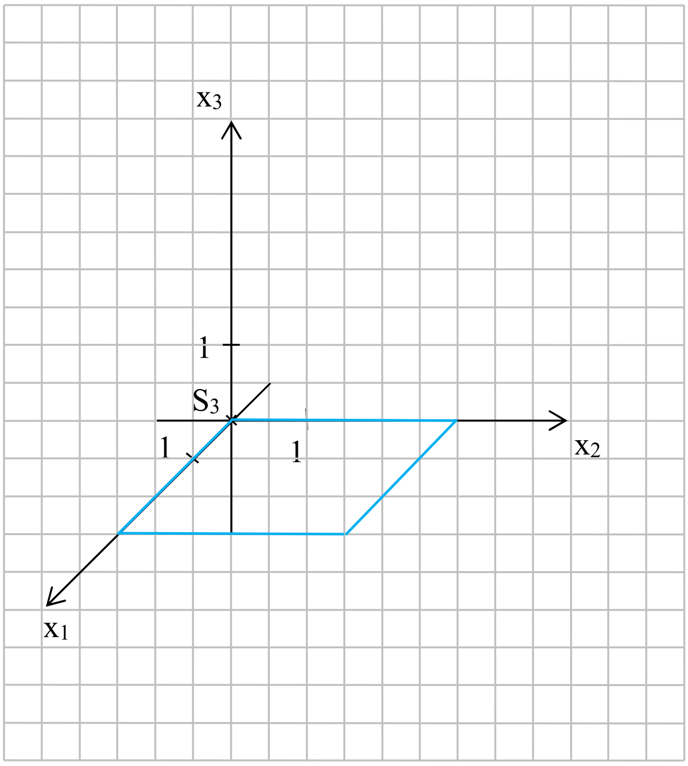
d) enthält den Ursprung; Hilfsebene: $x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4 = 0$



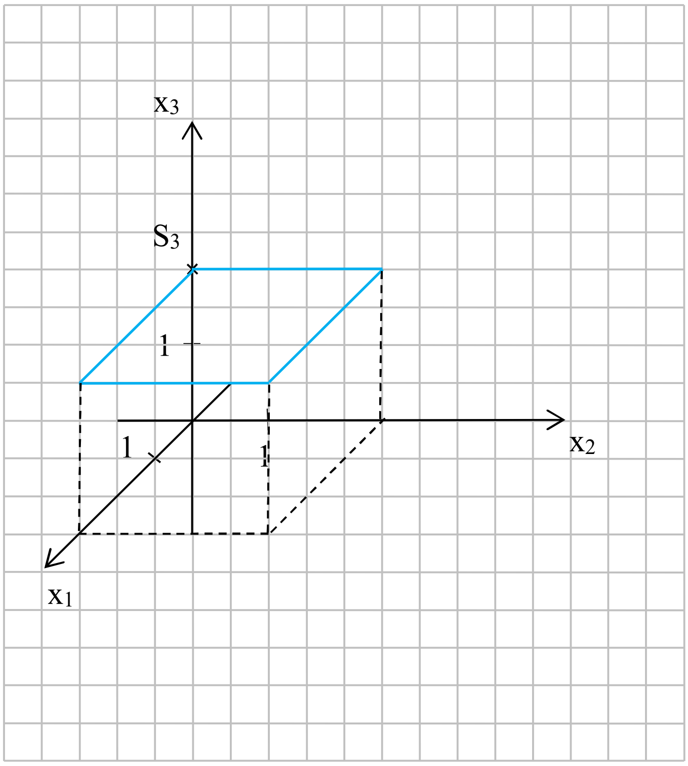
e) keine besondere Lage im KS



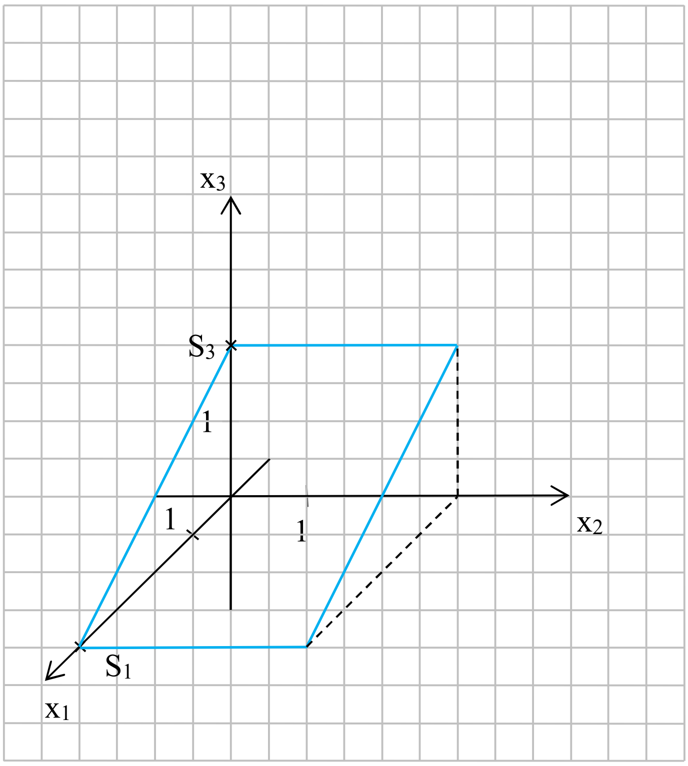
f) ist die x_1-x_2-Ebene



g) echt parallel zur x_1-x_2-Ebene



h) echt parallel zur x_2-Achse



<u>189/25</u> jeweils $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) keine Ebene (g liegt in E ==> Ursprung liegt in E ==> E kann nicht echt parallel zur x_1-x_3-Ebene sein)

e) keine Ebene (Richtungsvektor von g und Verbindungsvektoren vom Aufpunkt von g zu P bzw. zu Q sind nicht komplanar)

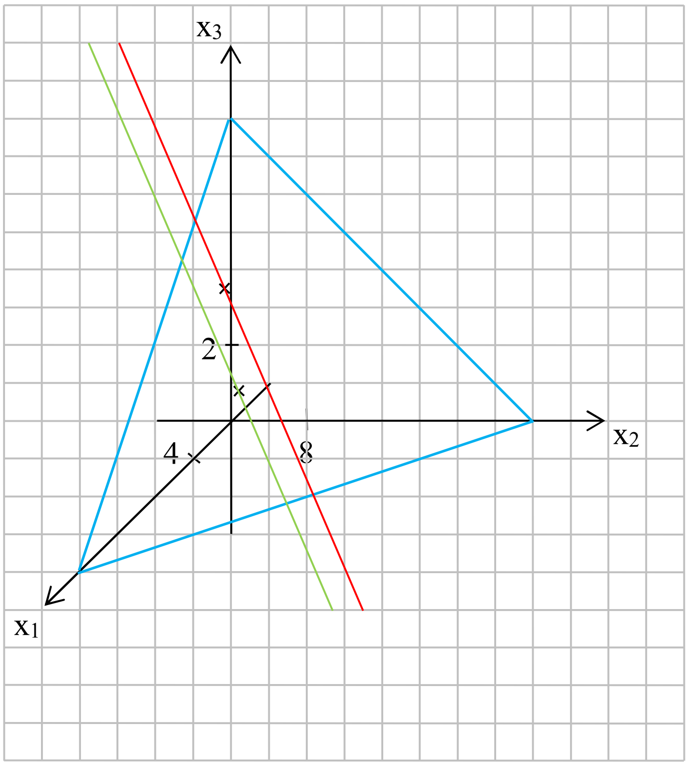
<u>190/28</u> a) $-x_2 + x_3 - 3 = 0$ b) echt parallel zur x_1-Achse

<u>190/31</u> *Mit Mathematik hat die Aufgabe nichts zu tun, das ist eher Informatik...*
Es handelt sich hier um den OpenGL-Standard.
Zu zeichnen sind 3 Geraden (Koordinatenachsen), die Spurpunkte $S_1(0{,}5|0|0)$, $S_2\left(0\middle|\frac{1}{3}\middle|0\right)$, $S_3(0|0|-0{,}5)$ *und das Dreieck, das diese drei Eckpunkte hat. Viel Spaß.*

<u>217/7</u> a) f b) w c) f d) w e) f

218/9 a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-1\\-6\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bzw. $E: 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 32 = 0$

b) g: rot, h: grün



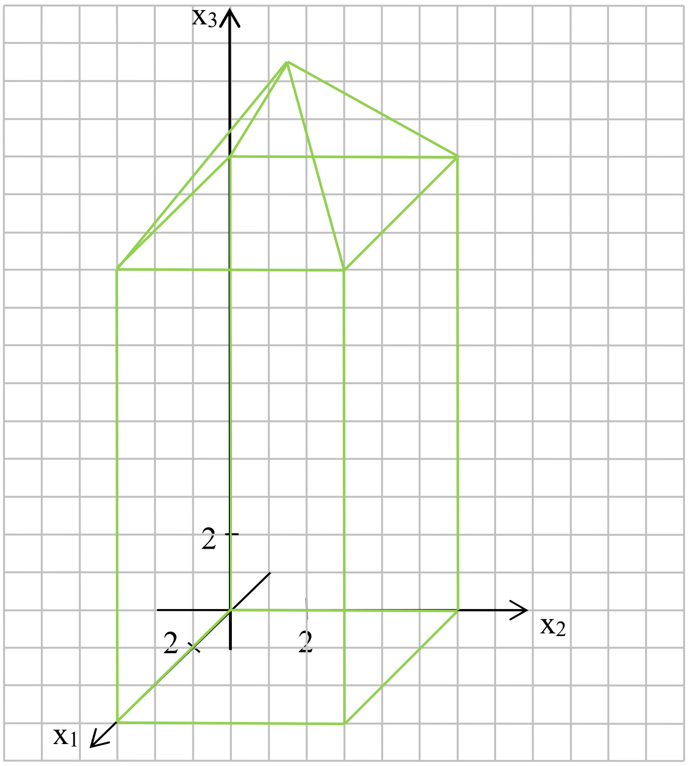
c) Die Richtungsvektoren der Geraden sind kollinear.

d) $F: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

e) ja

218/10 Koordinatensystem nicht eindeutig vorgegeben ==> alle Ergebnisse nur z.B.!

a) wähle Punkte A(0|0|0), B(6|0|0), C(6|6|0), D(0|6|0), E(0|0|12), F(6|0|12), G(6|6|12), H(0|6|12), S(3|3|16)



b) $EFS: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $EHS: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$EFS \cap EHS = ES: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ c) $S\left(\frac{17}{3} \middle| -\frac{7}{3} \middle| 0\right)$

236/9 a) $E: 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 24 = 0$ b) $k = 1{,}6$ c) windschief

238/20

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, aber $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$; F = $3{,}2\sqrt{402} \approx 64{,}16$; V = $\frac{1}{2}$ V_{Quader} = 12,8

b) E ist echt parallel zu x_2-Achse; z.B.: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; F: siehe Angabe

c) $\approx 36{,}87°$; $\approx 36{,}87°$; $\approx 106{,}26°$

d) $R_1(4|0|7)$; $R_2(4|8|7)$

III.6 Lote und Abstände

a) zu einer Ebene

234/4 a) $Q_L(3{,}5|4{,}5|3{,}5)$ b) $Q_L\left(-\frac{10}{27}\middle|\frac{23}{27}\middle| -\frac{10}{27}\right)$ c) $Q_L = Q$

234/5 a) $\approx 3{,}15$ b) $\approx 0{,}83$ c) $\approx 4{,}38$

234/6 Parallelität nachweisen: wie bekannt a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) 7

234/7 Parallelität nachweisen: wie bekannt a) $\approx 1{,}74$ b) $\approx 1{,}86$

235/2 a) $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} = 1$ b) $\frac{6}{11}\sqrt{22} \approx 2{,}56$ c) $\approx 46{,}17°$ d) d(S;AB) = $\sqrt{11}$

235/3

a) liegt darin; $d(g; E) = 0$

b) echt parallel; $d(g; E) \approx 6{,}62$

c) schneidet in einem Punkt; $\approx 18{,}13°$

235/4 zeigen, dass echt parallel: wie bekannt... $d(E; F) = \frac{4}{25}\sqrt{5} \approx 0{,}36$

235/6

a) P(6|0|0), Q(6|6|0), R(0|6|0), S(0|0|6), T(6|0|6), U(6|6|6), V(0|6|6)

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bzw. $E: x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$

bzw. $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. $F: -x_2 + 3x_3 - 12 = 0$

bzw. $F: \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = 0$

c) $|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{RS}| = |\overrightarrow{SP}| = 6\sqrt{2}$; $\alpha = \beta = \gamma = 60°$ d) $d(U; E) = 4\sqrt{3}$ e) $\approx 68{,}58°$

f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ g) $d(g; F) = 1{,}2\sqrt{10}$

h) $s = s_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

<u>236/12</u>

a) $E: \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0$ b) $s = s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ c) $d(A; E) = 9$

<u>237/18</u> a) M(3,8|3,8|3) b) $P_k(1|1|5{,}8+k)$ mit $k < 0$

<u>237/19</u>

a) $C(-15|15|100)$; $D(15|-15|100)$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bzw. $E: 10x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 300 = 0$

c) $S\left(\frac{3000}{209} \approx 14{,}35 \middle| \frac{3000}{209} \approx 14{,}35 \middle| \frac{900}{209} \approx 4{,}31\right)$; $|\overline{OS}| = \frac{300}{209}\sqrt{209} \approx 20{,}75$

d) $m: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 7{,}5 \\ 50 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\nu \in \mathbb{R}$; L(22,5|22,5|54,5); $\left|\overrightarrow{AL}\right| = \frac{\sqrt{14131}}{2} \approx 59{,}44$

altes Buch (winklers-Verlag):

125/4 b) $\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

163/3

a) $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 8/9 \\ 17/9 \\ -4/9 \end{pmatrix} \right) = 0$; $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -8/9 \\ 19/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} \right) = 0$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0 \\ -1{,}9 \end{pmatrix} \right) = 0$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 0 \\ 2{,}9 \end{pmatrix} \right) = 0$

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} \right) = 0$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right) = 0$

163/4 a) P(–22; –7; 13); Q(32; 11; –23) b) P(5; 3; 12); Q(–7; –3; –6) c) P(–9; 1; 16); Q(9; 1; –2)

<u>b) zu einer Geraden</u>

<u>234/2</u> a) $P_L(0|-1{,}5|3{,}5)$ b) $P_L(6|-1{,}5|-0{,}5)$ c) $P_L(6|1|5)$

<u>234/3</u> a) $2{,}5\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{82}}{2}$ c) $4\sqrt{3}$

<u>234/8</u> c) $\approx 2{,}29$

234/9
a) w (nachrechnen!)
b) f (es gibt unendlich viele)
c) w (nachrechnen!)
d) w (g, h legen eine Ebene fest; es gibt genau zwei Ebenen, die zu dieser Ebene echt parallel im Abstand 4 LE liegen)
e) f (nachrechnen! $d(R;E) = 4\sqrt{2}$)

234/11 $\vec{p}$ in g .... keine Lösung; $t = -4{,}6$

236/13
a) Kugel(schale) um P mit Radius 2
b) (unendlich langer) Zylindermandel um g mit Radius 5
c) zwei Ebenen parallel zu E mit Abstand 4
d) $d(E;F) = 0$ (identische Ebenen): zwei Ebenen parallel zu E = F mit Abstand 1
$d(E;F) = 2$: Ebene, die parallel zu E und F genau in der Mitte zwischen beiden liegt
ansonsten: keine Punkte

237/14
a) Das Verfahren funktioniert im Allgemeinen nicht: Die beiden Punkte könnten auf verschiedenen Seiten der Ebene liegen, und dann schneidet die Gerade die Ebene in einem Punkt. Man muss also bei der Abstandsbestimmung zusätzlich auf das Vorzeichen achten.
b) Es sind drei Punkte auf einer der beiden Ebenen nötig, die nicht alle auf einer Geraden liegen.

237/15 a) gelb

238/21 (Prüfung 2016/BII)
a) „in der Wasseroberfläche": gegeben! (außerdem: $x_3 = 0$)
geradlinig: $u\colon \overrightarrow{OU_k} = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $d(u;F) = 1020$
b) $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5800 \\ 4000 \\ 50 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5980 \\ -1020 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
bzw. $E\colon 51x_1 - 299x_2 + 29836x_3 - 7000 = 0$
c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7000}{51} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 299 \\ 51 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\nu \in \mathbb{R}$
d) Der Tauchwinkel ist etwa 15,5°, die Vorgaben werden also eingehalten.

238/22
a) $F = |\vec{u}| \cdot d$ bzw. $F = \left|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}\right|$ ==> $d = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}$
b) $d(P;g) = 7$ (mit $P_L(5|8|6)$)

altes Buch (winklers-Verlag):
125/4 c) k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ d) H: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$
157/5 a) a = 2 oder a = –3 b) b = 4 c) c = 4,8 oder c = 1,2 d) d = 3 oder d = –7

157/6 a = 3,4 oder a = 1

c) windschiefe Geraden 234/8 a) $\approx 7{,}43$ b) $\approx 2{,}86$ 234/11 $t = -4{,}6$