

VIII.1 Grenzverhalten

103/1 (T) bzw. 99/1 (NT)

a) Nullstelle: $x_1 = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1^+$

c) (T) bzw. (d) (NT) Nullstelle: $x_{1,2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

c) (NT) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

d) Nullstelle: $x_1 = \ln 4 \approx 1,39$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

113/1 (T) bzw. 105/1 (NT)

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5^-$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2^+$

e) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0^-$

f) (T) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^-$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

f) (NT) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7^+$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7^-$

VIII.2 Ableitungen

82/2 (T) bzw. 78/2 (NT) (zweiter Teil)

b) $g'(x) = 1 + 2x e^{x^2}$

82/3 (T) bzw. 78/3 (NT)

b) $f'(x) = (x + 1) e^x$

86/4 (T) bzw. 82/4 (NT)

a) Differenz (von Produkten); $x_1 = 3$

$f'(x) = (2x - 4)e^x$; $x_1 = 2$

$f''(x) = (2x - 2)e^x$; $x_1 = 1$

b) Produkt; $x_{1,2} = 0$

$f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

$f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$; $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$

c) Produkt; $x_1 = 0$

$f'(x) = 6x^2 + 3$; -

$f''(x) = 12x$; $x_1 = 0$

d) Produkt; -

$f'(x) = (2x^2 + 4x + 1)e^x$; $x_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(x) = (2x^2 + 8x + 5)e^x$; $x_{1,2} = -2 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

86/5 (T) bzw. 82/5 (NT)

$(-x^2 \cdot (0,5x + 3))' = -1,5x^2 - 6x$

$(-x^2 \cdot 2e^x)' = (-2x^2 - 4x) e^x$

$((0,5x + 3) \cdot 2e^x)' = (x + 7) e^x$

86/6 (T) bzw. 82/2 (NT)

keine allgemeine Lösung angebbbar; machen Sie mal!

93/5 (T) bzw. 89/5 (NT)

a) $f'(x) = (3x^2 + 2x) e^{3x}$

$f''(x) = (9x^2 + 12x + 2) e^{3x}$

$f'''(x) = (27x^2 + 54x + 18) e^{3x}$

b) $f'(x) = (0,5x^2 + 2x - 1) e^{0,5x}$

$f''(x) = (0,25x^2 + 2x + 1,5) e^{0,5x}$

$f'''(x) = (0,125x^2 + 1,5x + 2,75) e^{0,5x}$

c) $f'(x) = 1 + 5(2x - 1) e^{1-2x}$

$f''(x) = -20(x - 1) e^{1-2x}$

$f'''(x) = 20(2x - 3) e^{1-2x}$

d) $f'(x) = (-x + 3) e^{-x}$

$f''(x) = (x - 4) e^{-x}$

$f'''(x) = (-x + 5) e^{-x}$

93/6 (T) bzw. 89/6 (NT)

f) $f'(x) = -2x e^{3-x^2}$

g) $f'(x) = (-4x^2 - 6x - 2) e^{x^2+1}$

h) $f'(x) = (-0,25x^2 + 3,5x - 8,25) e^{-0,25x}$

i) $f'(x) = (-x^2 + 1,5x - 0,5) e^{x^2-3x+6}$

j) $f'(x) = (x^2 - 2) e^x$

93/7 (T) bzw. 89/7 (NT)

keine allgemeine Lösung angebar; machen Sie mal!

94/1 (T) bzw. 90/1 (NT)

c) $f'(x) = (x + 1) e^x$

d) $f'(x) = (x - 1) e^x$

e) $f'(x) = (-x + 3) e^{-x}$

f) $f'(x) = (3x^3 + 2x + 1) e^{x^3+2x}$

94/2 (T) bzw. 90/2 (NT)

a) $f'(x) = (1,5x - 0,5) e^{0,5x}$

$f''(x) = (0,75x + 1,25) e^{0,5x}$

$f'''(x) = (0,375x + 1,375) e^{0,5x}$

b) $f'(x) = (-2x^2 + 8x - 3) e^{-2x}$

$f''(x) = (4x^2 - 20x + 14) e^{-2x}$

$f'''(x) = (-8x^2 + 48x - 48) e^{-2x}$

c) $f'(x) = (4x^2 - 4x + 2) e^{x^2-2x}$

$f''(x) = (8x^3 - 16x^2 + 20x - 8) e^{x^2-2x}$

$f'''(x) = (16x^4 - 48x^3 + 96x^2 - 88x + 36) e^{x^2-2x}$

d) $f'(x) = (-x^3 + 3x^2) e^{-x}$

$f''(x) = (x^3 - 6x^2 + 6x) e^{-x}$

$f'''(x) = (-x^3 + 9x^2 - 18x + 6) e^{-x}$

e) $f'(x) = (0,375x - 2) e^{-0,25x+3}$

$f''(x) = (-0,09375x + 0,875) e^{-0,25x+3}$

$f'''(x) = (0,0234375x - 0,3125) e^{-0,25x+3}$

f) $f'(x) = (4x^3 - 4x^2 - 10x + 2) e^{-0,5x^2+x}$

$f''(x) = (-4x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 20x - 8) e^{-0,5x^2+x}$

$f'''(x) = (4x^5 - 12x^4 - 26x^3 + 62x^2 + 24x - 28) e^{-0,5x^2+x}$

94/8 (T) bzw. 90/8 (NT)

a) $S_y(0|-4); N(2|0)$

b) $m = -2$ bzw. $m = 2e^2$

94/10 (T) bzw. 90/10 (NT)

$f(0) = g(0) = 4$ und $f'(0) = g'(0) = -0,4$

VIII.3 Kurvendiskussion

86/1 (T) bzw. 82/1 (NT)

a) $x_1 = -3, x_2 = 0,5; \quad f'(x) = (2x^2 + 9x + 2) e^x, \quad f''(x) = (2x^2 + 13x + 11) e^x$
 b) $x_{1,2} = 0, x_3 = \frac{5}{6}; \quad f'(x) = \left(-\frac{3}{5}x^3 - \frac{13}{10}x^2 + x\right) e^x, \quad f''(x) = \left(-\frac{3}{5}x^3 - \frac{31}{10}x^2 - \frac{8}{5}x + 1\right) e^x$
 c) $x_1 = 1,5, x_2 = -2; \quad f'(x) = (x^2 + 2,5x - 2,5) e^x, \quad f''(x) = (x^2 + 4,5x) e^x$

86/2 (T) bzw. 82/2 (NT)

z. B., es gibt natürlich noch unendlich viele andere Möglichkeiten!

a) $f(x) = (x^2 + 1) e^x$ b) $f(x) = (x - 3) (x + 2) e^x$ c) $f(x) = (x + 7)^2 e^x$

86/3 (T) bzw. 82/3 (NT)

a) f b) f c) w d) f e) w f) w g) w

94/3

$S_y(0|0) = N_1; \quad N_2(4|0)$

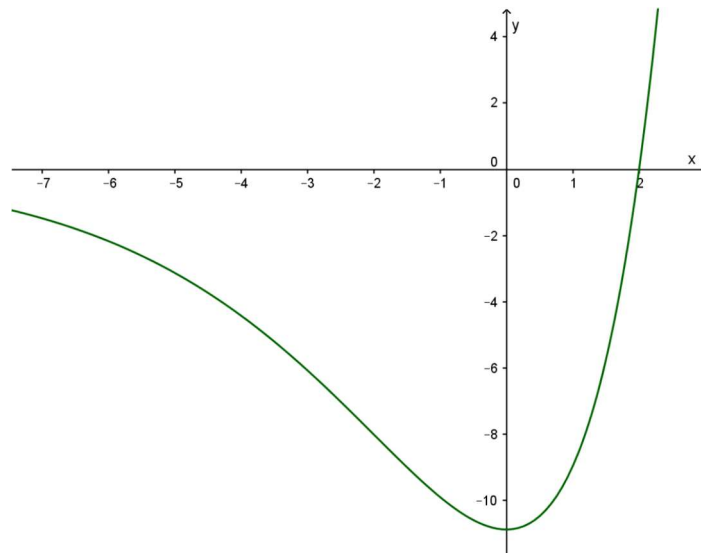
$f'(x) = (x^2 - 6x + 4) e^{-x+1} \implies \text{Ex.st.: } x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$

$f''(x) = (-x^2 + 8x - 10) e^{-x+1} \implies \text{We.st.: } x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{6}$

103/1 (T) bzw. 99/1 (NT)

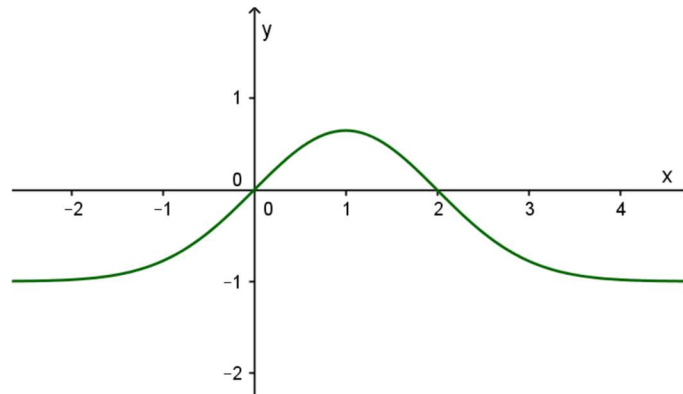
a) Nullst.: $x_1 = 2;$ Min.st.: $x_1 = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



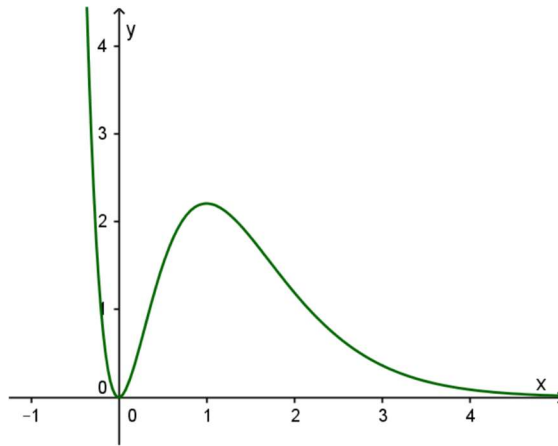
b) Nullst.: $x_1 = 0, \quad x_2 = 2;$ Max.st.: $x_1 = 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1^+$

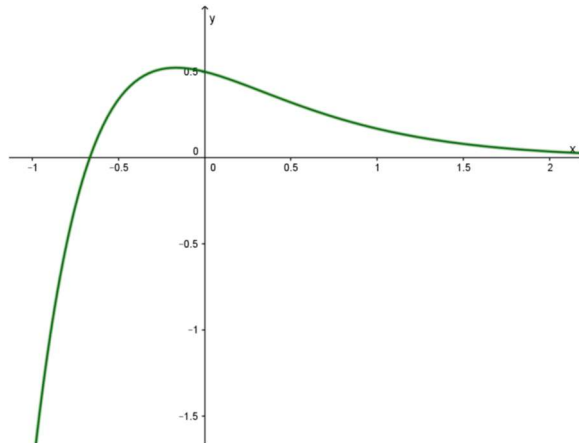


c) (T) bzw. d) (NT) Nullst.: $x_{1,2} = 0;$ Min.st.: $x_1 = 0, \quad \text{Max.st.: } x_2 = 1$

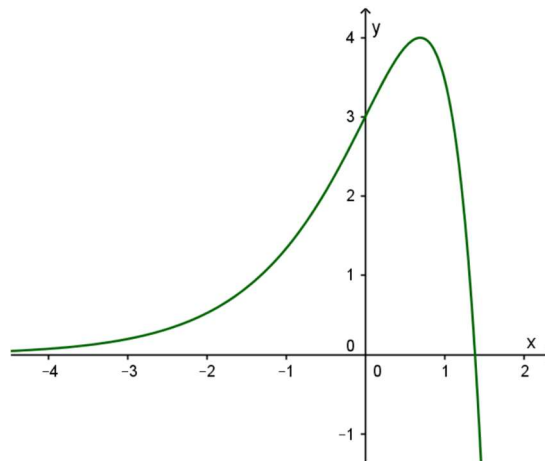
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$



c) (NT) Nullst.: $x_1 = -\frac{2}{3}$; Max.st.: $x_1 = -\frac{1}{6}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$



d) Nullst.: $x_1 = \ln(4)$; Max.st.: $x_1 = \ln(2)$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

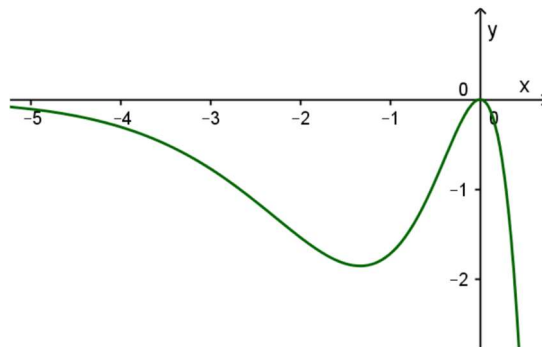


103/2 (T) bzw. 99/2 (NT)

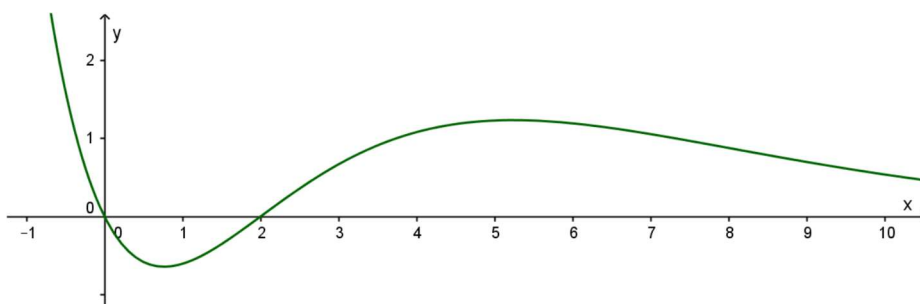
- a1 (offensichtlich; Grundwissen!)
- b6 (wegen $f(0)$, Globalverhalten, Symmetrie)
- c3 (wegen Nullst., Globalverhalten)
- d5 (wegen Nullst., Globalverhalten)
- e4 (offensichtlich; Grundwissen!)
- f2 (wegen $f(0)$, Globalverhalten)

112/5 (T) bzw. 104/5 (NT)

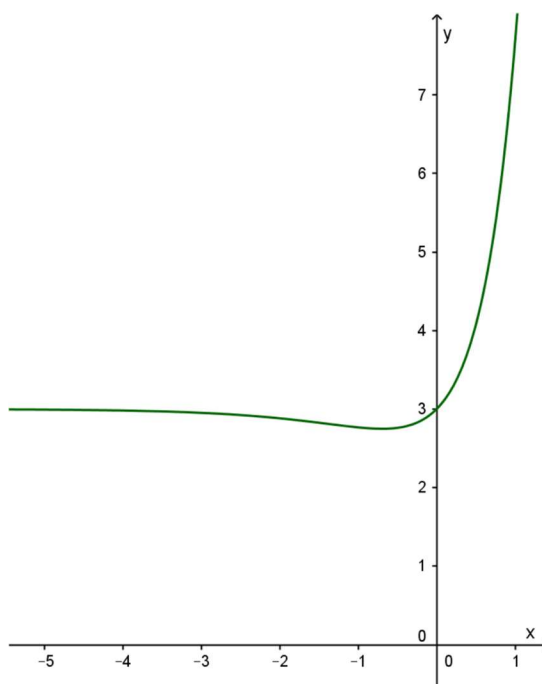
- a) $x_{1,2} = 0$; HoP(0|0), TiP($-\frac{4}{3} | -\frac{32}{3}e^{-7/4} \approx -1,85$)
- WeP₁ ($\approx -2,28 | \approx -1,31$), WeP₁ ($\approx -0,39 | \approx -0,65$)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



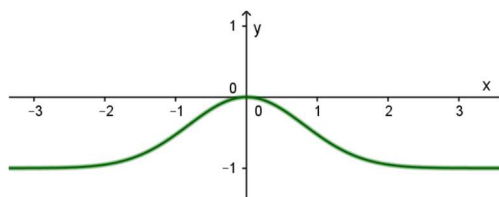
b) $x_1 = 0, x_2 = 2$; $\text{TiP}(3 - \sqrt{5} \approx 0,76 | \approx -0,64)$, $\text{HoP}(3 + \sqrt{5} \approx 5,24 | \approx 1,24)$
 $\text{WeP}_1(2|0)$, $\text{WeP}_1\left(8 \left| \frac{48}{e^4} \approx 0,88 \right.\right)$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$



c) (T) keine Nst.; $\text{TiP}(-\ln(2) \approx -0,69 | 2,75)$; $\text{WeP}(-\ln(4) \approx -1,39 | \frac{45}{16} \approx 2,81)$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3^-$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



c) (NT) $x_1 = 0$; $\text{HoP}(0|0)$; $\text{WeP}_{1,2}\left(\pm \frac{\sqrt{6}}{3} \approx \pm 0,82 \left| e^{-0,5} - 1 \approx -0,39 \right.\right)$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1^+$



113/2 (T) bzw. 105/2 (NT) a) 6 b) 2 c) 4 d) 3 e) 5 f) 1

VIII.4 Anwendungen

112/1 (T) bzw. 104/1 (NT)

a) $A(30) = 25 \implies 35 e^{-k \cdot 30} + 20 = 25 \implies \dots k = \frac{\ln(7)}{30} \approx 0,065$

b) $A(0) = 55; \quad B(0) = 20; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 20$

c) $t_1 = \frac{\ln(\frac{14}{3})}{k} \approx 24 \text{ (min)}$

d) $B_{\max} = B(10) \approx 56; \quad A_{\max} = A(0) = 55$ (da A eine sma Funktion ist) \implies B war heißer

e) $t_2 = 20 \text{ (min)}$

112/2 (T) bzw. 104/2 (NT)

a) $0 \leq t < \approx 7,78$

b) $t_1 = 3$

c) $t_2 = \sqrt{10} + 3 \approx 6; \quad -1800 \text{ (€/Monat)}$

d) $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = -3^+; \quad t_3 \approx 7,78$ (siehe (a)!)

112/3 (T) bzw. 104/3 (NT)

a) $t_1 = 2,5$ (Wochen); $t_2 = 12,5$ (Wochen)

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 7,5^+$

c) $A(5) \approx 15$, d. h. in Woche 5 werden etwa 15 ME verkauft

$\dot{A}(5) \approx 0,15$, d. h. in Woche 5 gehen die Verkäufe um etwa 0,15 ME pro Woche zurück

112/4 (T)

a) $A(0) = 10 \implies k = 0,05$

$A(39) = 35 \implies \dots m = \frac{\ln(\frac{20}{71,05})}{39} \approx -0,0325$

b) A: maximal nach etwa 63,1 (Jahren), nämlich etwa 40,0 (Mrd. Tonnen)

B: maximal nach etwa 55,0 (Jahren), nämlich etwa 35,5 (Mrd. Tonnen)

c) $A(94) - B(94) \approx 6,42; \quad A$ ist um etwa 22,0% größer

Die prozentuale Abweichung ist hier nicht zwingend auch maximal. (Bsp.: Zu irgendeinem Zeitpunkt könnte $A = 10$ und $B = 5$ sein; dann wäre die absolute Abweichung 5, also kleiner als hier, die prozentuale Abweichung aber 100%, also größer als hier.)

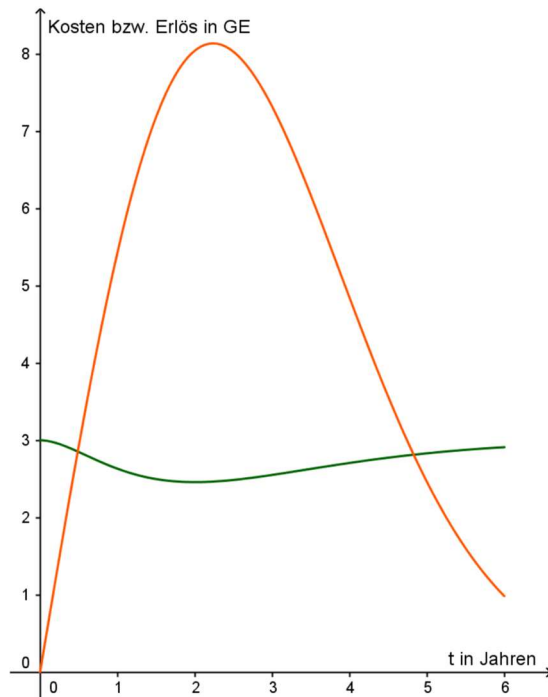
d) $\dot{A}(100) \approx -0,236; \quad A(100) \approx 34,2; \quad \dot{B}(100) \approx -0,222; \quad B(100) \approx 27,8$

Im Szenario A ist der CO₂-Ausstoß nach 100 Jahren also (deutlich) größer als im Szenario B, nimmt aber auch (etwas) schneller ab. Die prozentuale Abweichung ist hier etwa 22,9%, also tatsächlich größer als nach 94 Jahren (dem Zeitpunkt, als die absolute Abweichung am größten war).

104/4 (NT)

a) $k(0) = 3; \quad e(0) = 0; \quad k(6) = 3 - 36 e^{-6} \approx 2,91; \quad e(6) = 36 e^{-3,6} \approx 0,98$

b) grün: K; orange: E



„ökonomische Situation interpretieren“: ? Ich bin Physiker, kein Ökonom!

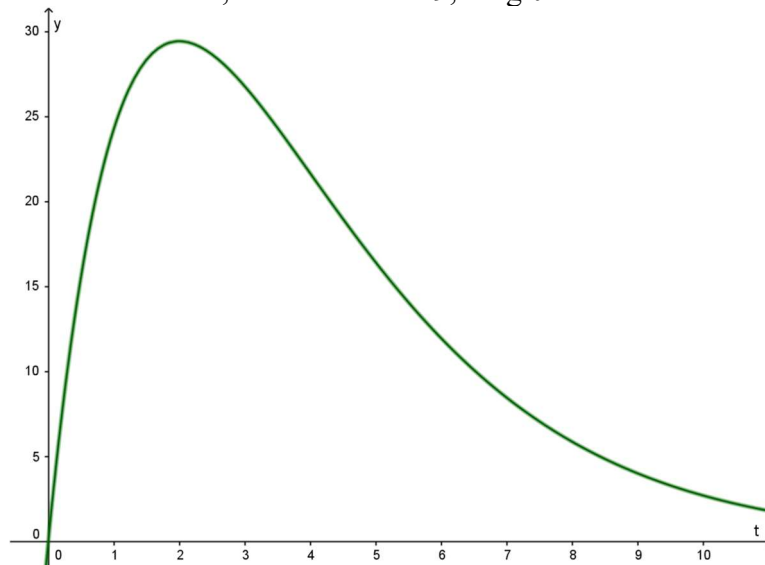
c) $t_{\min} = 2$ (Jahre); $t_{\max} = \sqrt{5} \approx 2,23$ (Jahre)

d) Kosten: fallen am stärksten für $t = 2 - \sqrt{2} \approx 0,59$, steigen am stärksten für $t = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41$
 Erlös: steigt am stärksten für $t = 0$, fällt am stärksten für $t = \sqrt{15} \approx 3,87$

e) abgeschätzt aus den Graphen: Gewinn für etwa $0,5 < t < 4,8$, maximaler Gewinn für etwa $t = 2,2$

113/3 (T) bzw. 105/3 (NT)

a) größte Konzentration nach 2 Stunden, nämlich etwa $29,4 \text{ mg/l}$



b) $t_1 = 4$ (Stunden)

c) $\approx -5,41$ (mg/l pro Stunde)

d) $T(t) = -\frac{40}{e^2} t + \frac{320}{e^2} \implies t_2 = 8$ (Stunden)

e) $a = 5e \approx 13,6$; $b = 0,25$

113/4 (T) bzw. 105/4 (NT)

$W(t)$ beschreibt wohl den Verlauf des Wasserbestands *mit* geöffneten Schleusen!

a) $W(0) = 5,25$; $W(5) \approx 4,40$

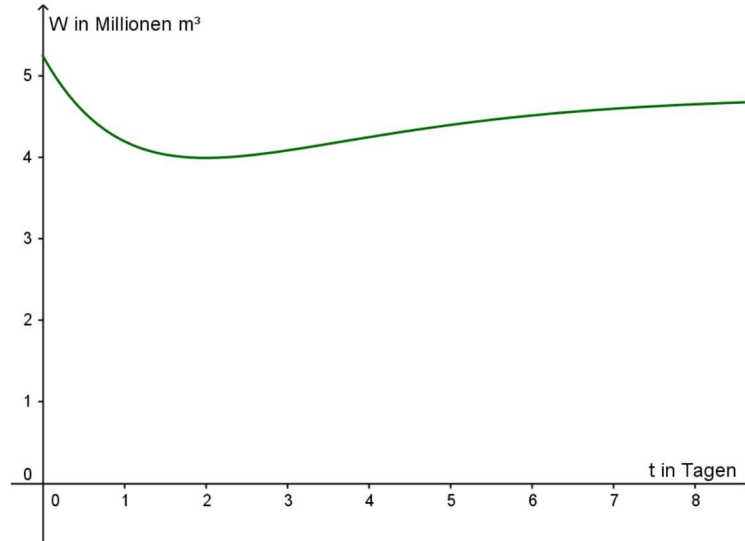
b) $t_1 = 2$ (Tage); Wasserbestand ist etwa 14,2% höher als nötig

c) Aufgabenstellung unklar!

Gemeint ist entweder die Wasserdurchflussrate (Wasserstromstärke) in dem Moment, in dem die Schleusen geöffnet werden, also $\dot{W}(0) = -1,8$ (Millionen m^3 pro Tag), oder die gesamte Wassermenge, die durchfließt, während die Schleusen offen sind, also $W(0) - W(2) \approx 1,25$ (Millionen m^3).

d) $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 4,75^-$, d. h. auf lange Sicht befinden sich 4,75 Millionen m^3 Wasser im Stausee

e)



113/5 (T) bzw. 105/5 (NT)

a) $G(0) = 90$; $G_{\text{ideal}} = 70$ b) $t_1 \approx 6,93$ (Monate) c) $t_1 = 5$ (Monate)

114/6 (T) bzw. 106/6 (NT)

a: Grenzwert wird deutlich überschritten (etwa $32,7 \text{ mg/m}^3$)

b: Grenzwert wird nicht überschritten (etwa 6 mg/m^3)

a: höchste Zunahme nach 0 min; Konzentration 0 mg/m^3

höchste Abnahme nach etwa 30,4 min; Konzentration etwa 24 mg/m^3

b: höchste Zunahme nach etwa 1,05 min; Konzentration etwa $2,15 \text{ mg/m}^3$

höchste Abnahme nach etwa 6,10 min; Konzentration etwa $4,32 \text{ mg/m}^3$

$a(6) \approx 23,4$; $a(8) \approx 27,5$; $a(10) \approx 30,1$; $a(12) \approx 31,7$

$b(6) \approx 4,42$; $b(8) \approx 2,56$; $b(10) \approx 1,31$; $b(12) \approx 0,61$

==> Die Änderung war eindeutig sehr sinnvoll.

114/7 (T) bzw. 106/7 (NT)

a) etwa 0,83 Wochen später

b) nach etwa 5,76 Wochen; etwa 1,3 pro Tag

c) HoP(8|15), d.h. nach 8 Wochen gibt es die meisten Neuerkrankungen pro Woche, nämlich 15

d) $t_2 = 16$ (Wochen) (folgt praktisch ohne Rechnung aus Symmetrie der quadratischen Fkt.!))

114/8 (T) bzw. 106/8 (NT)

a) $N(0,5) = 1745 \implies \dots N_0 = 1745 \cdot e^{-1,25} \approx 500$

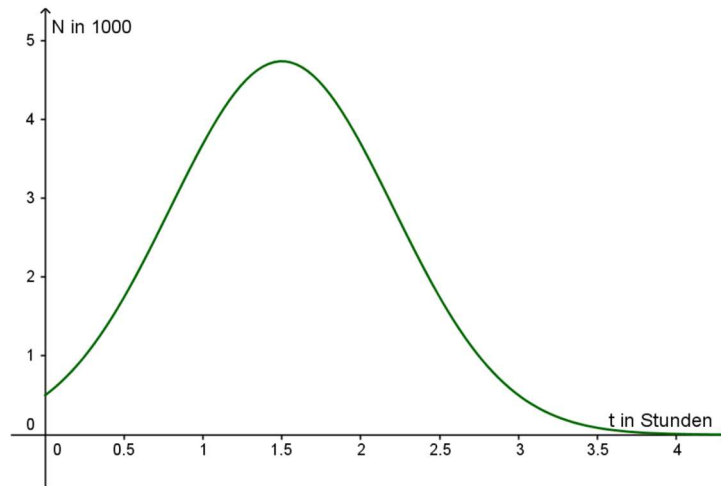
b) (T) $t_{\text{max}} = 1,5$ (h); $N_{\text{max}} \approx 4744$ (NT: zu (a)!))

c) (T) bzw. b) (NT) $t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2} \approx \begin{cases} 0,71 \\ 2,21 \end{cases}$ (h)

Der Graph hat dort die größte Steigung bzw. das größte Gefälle; an diesen Stellen befinden sich WeP.

d) (T) bzw. c) (NT) $t_3 \approx 13,2$ (h)

e) (T) bzw. d) (NT)



114/9 (T) bzw. 106/9 (NT)

a) $\dot{B}(t) = 2,25 (t - 7) e^{-0,15t}$ ist = 0 für $t = 7$ und hat dort einen VZW von $-$ nach $+$; $B(7) \approx 35,0$

b) $B(0) = 75$ (Millionen Fische); $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 70^-$, d. h. auf lange Sicht befinden sich 75 Millionen

Fische im Südatlantik

c) $B(16,5) \approx 49,6$ (Millionen Fische)

$\dot{B}(16,5) \approx 1,80$ (Millionen Fische pro Jahr)

d) $\ddot{B}(t) = 2,25(-0,15t + 2,05) e^{-0,15t}$ ist = 0 für $t = \frac{41}{3}$ und hat dort einen VZW von $+$ nach $-$

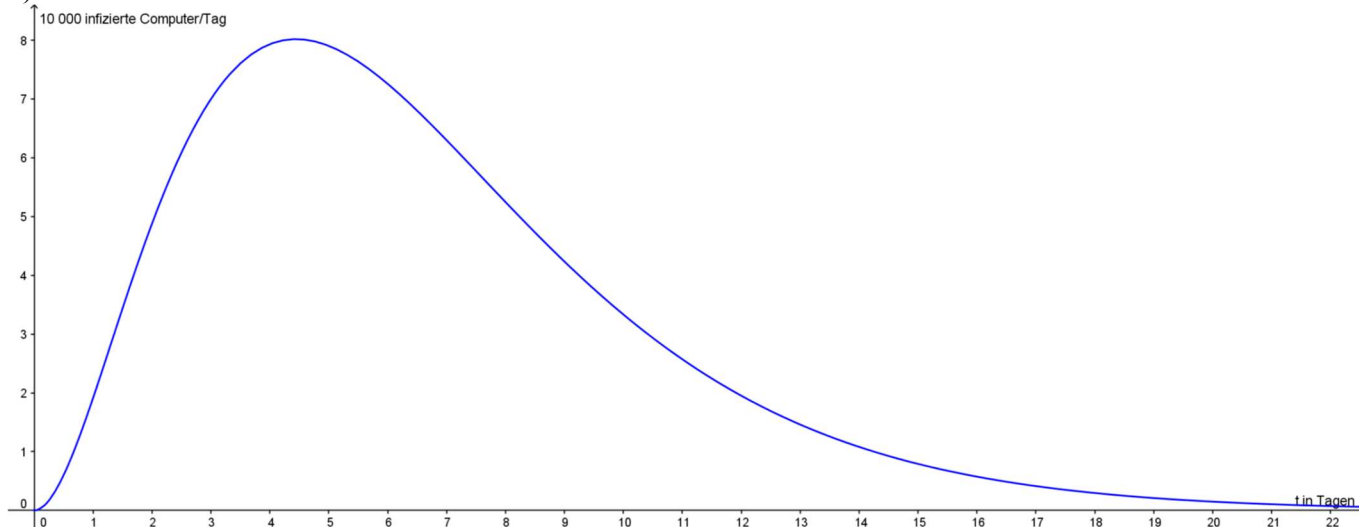
\implies größte Bestandszunahme im Jahr 2008

133/15 (nur T)

a) $\dot{I}(0) = 0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{I}(t) = 0$, d. h. am Anfang und auf lange Sicht gibt es keine Neuinfektionen

b) \dot{I} ist smz in $[0; \frac{40}{9}]$, sma in $[\frac{40}{9}; \infty[$; $\dot{I}_{max} = 30\,000 \cdot \left(\frac{40}{9e}\right)^2 \approx 80\,200$

c)



d) gemeint ist sicher $[I(t)]_4^8$

$A \approx \frac{I(4)+I(8)}{2} \cdot 4 \approx 264\,000 =$ Anzahl der Computer, die zwischen dem 4. und dem 8. Tag neu infiziert wurden

e) wie üblich: $I(t)$ ableiten.....

f) $I(8) - I(4) \approx 282\,000$, also etwa 7% mehr als abgeschätzt

150/14 (T) bzw. 138/13 (NT)

a) G_f : rot; G_g : blau (z. B. mittels Steigung bei 0, oder x_{max})

b) bei $F(x)$ darf im Exponenten nur $-x$ stehen (oder im Vorfaktor kein e), bei $G(x)$ muss $-0,5$ stehen!

$F'(x) = \dots = f(x)$, $G'(x) = \dots = g(x)$ (mit Produkt- und Kettenregel)

c) B ist beliebter