VI.1 Flächeninhalts- und Stammfunktionen

123/1 (T) bzw. 113/1 (NT) ja, alle

123/2 (T) bzw. 113/2 (NT) z. B.!

a) $F(x) = 4x; \quad F(x) = 4x + 1$

b) $F(x) = -1{,}5x^2 + 8x; \quad F(x) = -1{,}5x^2 + 8x - 2$

c) $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2; \quad F(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 0{,}5$

d) $F(x) = x - x^4; \quad F(x) = x - x^4 + \sqrt{2}$

e) $F(u) = 2{,}5u^2 + 3u; \quad F(u) = 2{,}5u^2 + 3u + \pi$

f) $F(x) = -\frac{1}{5}x^4 + 5x^2; \quad F(x) = \frac{1}{5}x^4 + 5x^2 + 0{,}001$

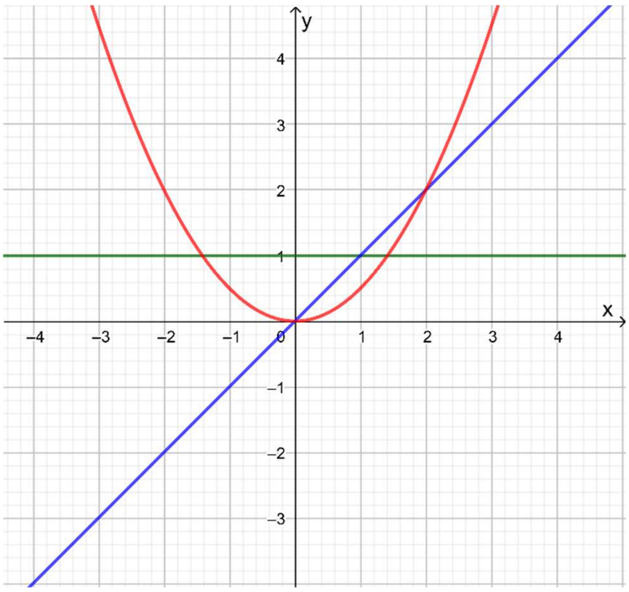
g) $F(x) = -\frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 8x; \quad F(x) = -\frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 8x - 2{,}3$

h) $F(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + 9t; \quad F(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + 9t - \frac{\sqrt{3}}{5}\pi$

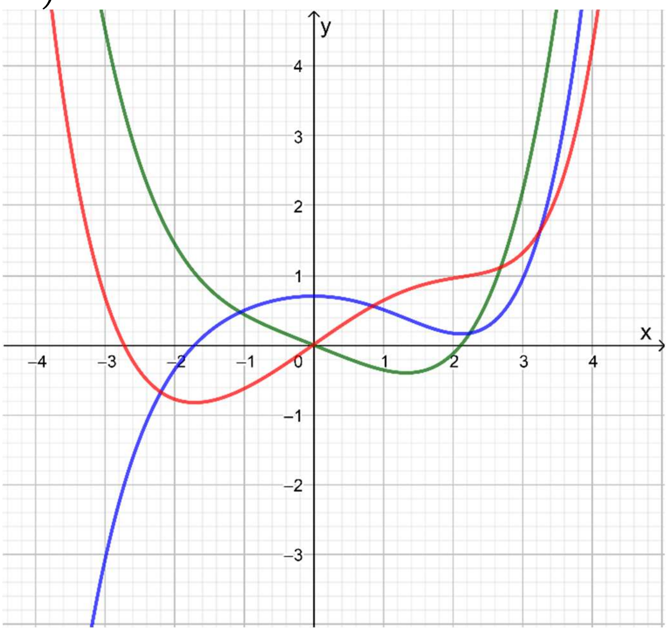
126/1 (T) bzw. 116/1 (NT) Begründung jeweils mit Monotonie, ExP, ... a) 3;4 b) 1; 6 c) 2; 5

126/2 (T) bzw. 116/2 (NT) jeweils grün: $G_{f'}$, rot: G_F

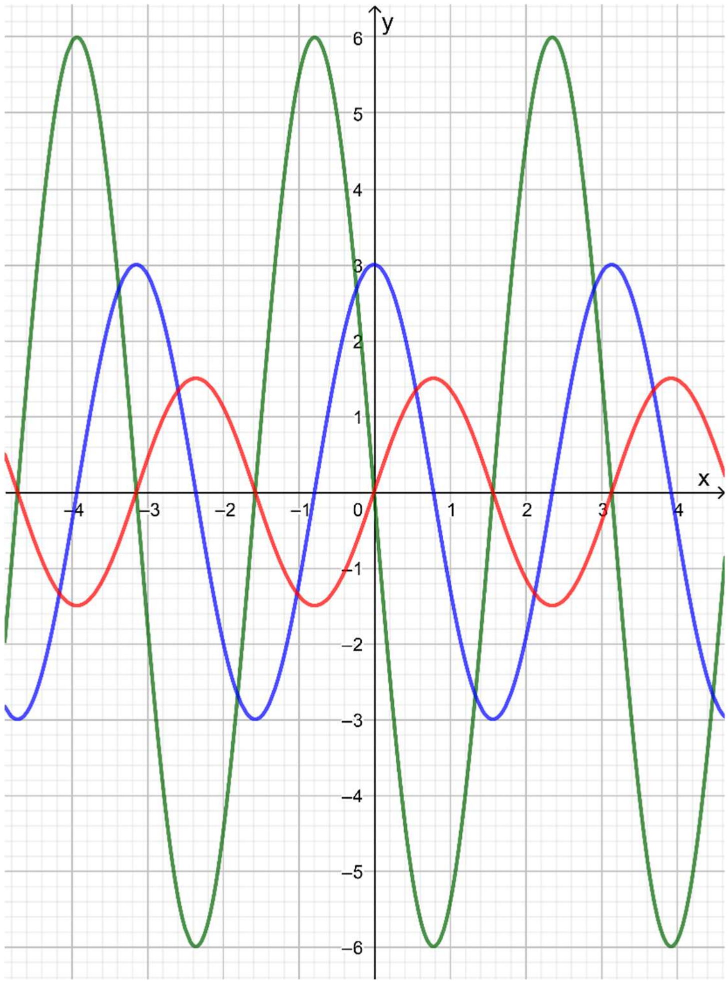
a)



b) $\left(f(x) = \frac{x^5}{120} - 0.2x^2 + 0.7\right)$



c) $(f(x) = 3\cos(2x))$

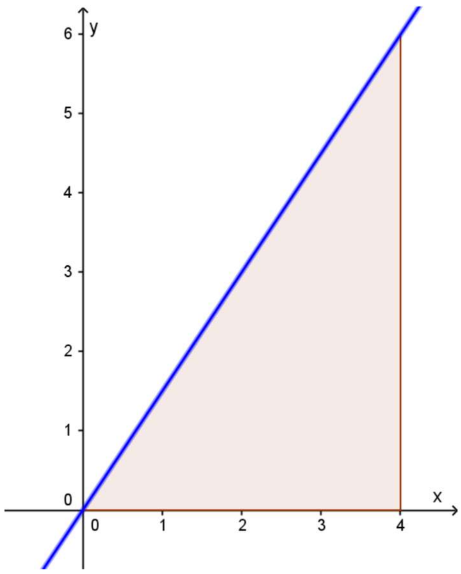


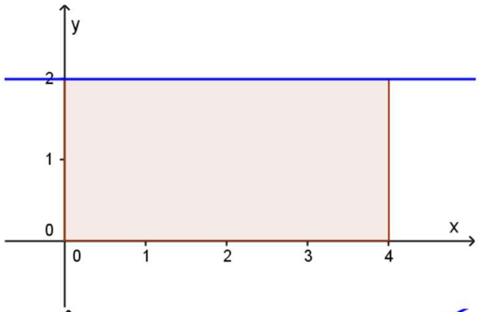
126/3 (T) bzw. 116/3 (NT) a) w b) w c) f d) w

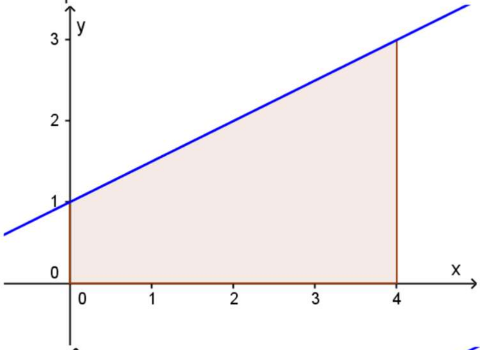
130/2 (T) bzw. 120/2 (NT)

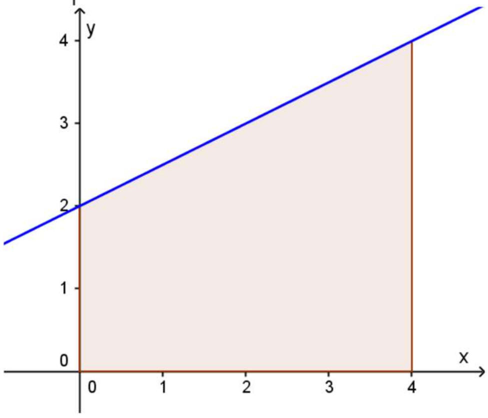
a) G_f: $A_0(x) = 0{,}75x^2$; G_g: $A_0(x) = 2x$; G_h: $A_0(x) = 0{,}25x^2 + x$; G_i: $A_0(x) = 0{,}25x^2 + 2x$

b) G_f: $A_0(4) = 12$; G_g: $A_0(4) = 8$; G_h: $A_0(4) = 8$; G_i: $A_0(4) = 12$





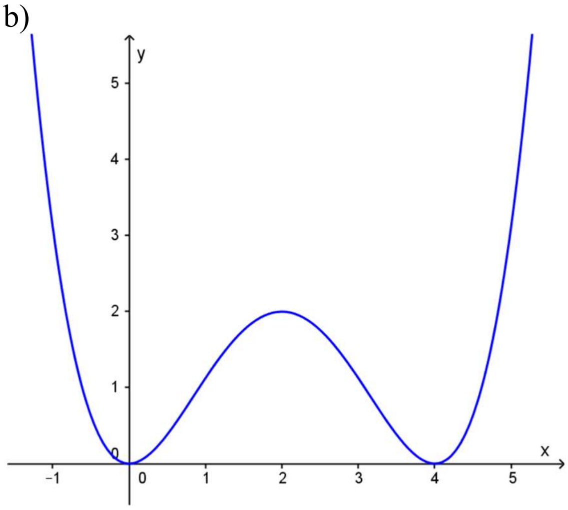




131/3 (T) bzw. 121/3 (NT)   Begründungen mit Grad, Monotonie, ...
a) 2F, 1f   b) 1F, 2f   c) 1F, 2f   d) 1F, 2f

131/6 (T) bzw. 121/6 (NT)   a) grün   b) gelb   c) grün

131/7 (T) bzw. 121/7 (NT)
a) F'(x) = f(x) ==> G_F ist smf in $]-\infty; 0]$ und $[2; 4]$, sms in $[0; 2]$ und $[4; \infty[$
==> Min.st.: 0 und 4;   Max.st.: 2
We.st. von F = Ex.st. von f ==> etwa 0,8 und etwa 3,2
b)



c) 1,125;   1,7578125;   2

d) Beziehung zur gegebenen Abbildung: Flächeninhalte zwischen G_f und x-Achse im Bereich zwischen 0 und 1 bzw. zwischen 0 und 1,5 bzw. zwischen 0 und 2
Beziehung zur Skizze in (b): Differenz von y-Werten an den Stellen 0 und 1 bzw. 0 und 1,5 bzw. 0 und 2; da F(0) = 0 ist, sogar gleich y-Werten an den Stellen 1 bzw. 1,5 bzw. 2

131/8 (T) bzw. 121/8 (NT)
a) $f(x) = 8x^3 + \frac{1}{2}x^2$; $F(x) = 2x^4 + \frac{1}{4}x^2$
c) $f(x) = 9x^2 + 6x$; $F(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x$

132/9 (nur T) A: 4;11 B: 5;9 C: 8;12 D: 6; 10

122/9 (nur NT) $K(x) = 0{,}0003x^3 - 0{,}004x^2 + 0{,}04x + 1$

133/10 (T) bzw. 122/11 (NT)
Begründungen: Monotonie, Grad, ... G_1: g G_2: f G_3: f' G_4: F

133/12 (T) bzw. 122/10 (NT)
Wenn F eine Stammfunktion zu f ist, dann ist auch F(x) + C mit beliebigem C ∈ ℝ eine Stammfunktion zu f ==> es gibt unendlich viele Stammfunktionen („Aufleitungen").

133/13 (T) bzw. 122/12 (NT) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 + 8x - 8$

VI.2 Das Integral

123/3 (T) bzw. 113/3 (NT) $C \in \mathbb{R}$
a) $\int (x + 5)dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x + C$
b) $\int 5x\,dx = \frac{5}{2}x^2 + C$
c) $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$
d) $\int (2{,}7x^2 - 6\,x)dx = 0{,}9x^3 - 3x^2 + C$
e) $\int \left(-\frac{1}{6}x^2 + 81\right)dx = -\frac{1}{18}x^3 + 81x + C$
f) $\int (3{,}5x - 4{,}8x^3)dx = 1{,}75x^2 - 1{,}2x^4 + C$
g) (NT) $\int (2{,}5x^4 - 12x^2 + 4)dx = 0{,}5x^5 - 4x^3 + 4x + C$
h) $\int \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x\right)dx = \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + C$

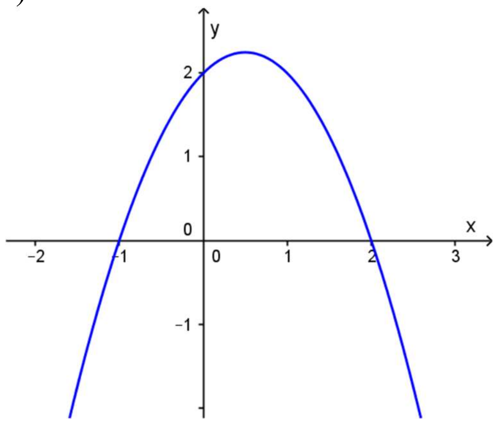
123/5 (T) bzw. 113/5 (NT) z. B.:
$\int \left(\frac{3}{4}x^6 - 2{,}37x^3 + \pi x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x + 200\right)dx + \int \left(-\frac{3}{4}x^6 + 2{,}37x^3 - \pi x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x - 199\right)dx = \int 1\,dx = x + C$

123/6 (T) bzw. 113/6 (NT)
$(\int a \cdot f(x)\,dx)' = a \cdot f(x)$ (Definition des unbestimmten Integrals)
$= a \cdot (\int f(x)dx)'$ (Definition des unbestimmten Integrals)
$= (a \cdot \int f(x)dx)'$ (Faktorregel der Differenziation)
$\left(\int \big(f(x) + g(x)\big)dx\right)' = f(x) + g(x)$ (Definition des unbestimmten Integrals)
$= (\int f(x)dx)' + (\int g(x)\,dx)'$ (Definition des unbestimmten Integrals)
$= (\int f(x)dx + \int g(x)\,dx)'$ (Summenregel der Differenziation)

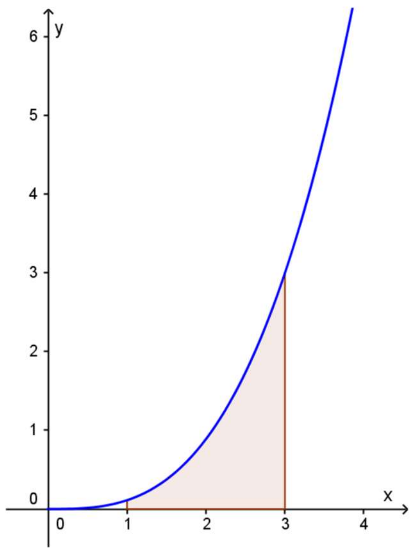
123/9 (T) bzw. 113/8 (NT) bei allen: $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + C$
gelb: $C = -4$; blau: $C = 0$; grün: $C = 2$; rot: $C = 4$

130/3 (T) bzw. 120/3 (NT)

a) b) A = 4,5



130/4 (T) bzw. 120/4 (NT) A = $\frac{20}{9}$



130/6 (T) bzw. 120/6 (NT)

$A_0(z) = A_{Rechteck} + A_{Dreieck} = z \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot z \cdot (f(z) - 2) = \ldots = 0{,}15z^2 + 2z \quad ==> \quad A'_0(z) = f(z)$

130/7 (T) bzw. 120/7 (NT) A = $\frac{32}{3}$

131/1 (T) bzw. 121/1 (NT) $C \in \mathbb{R}$

a) $\int (0{,}5x^2 + 3x)dx = \frac{1}{6}x^3 + 1{,}5x^2 + C$

c) $\int \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 6\right)dx = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2{,}5x^2 + 6x + C$

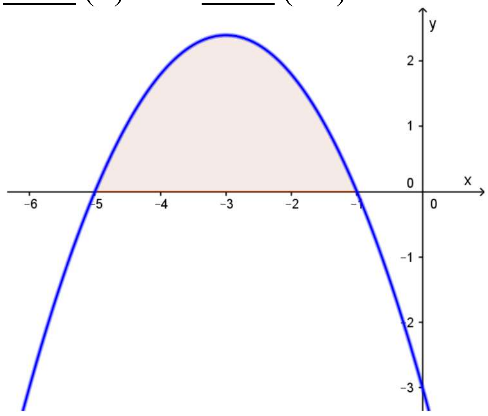
d) $\int (2x^3 + 0{,}25x^2 + \pi)dx = 0{,}5x^4 + \frac{1}{12}x^3 + \pi x + C$

131/2 (T) bzw. 121/2 (NT) a) nein b) ja

131/4 (T) bzw. 121/4 (NT)

Beide brauchen gleich viel Material: Bei beiden ist die Querschnittsfläche gleich 2,16.

131/5 (T) bzw. 121/5 (NT) A = 6,4



133/14 (nur T) $f(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{8}x^3 - 2x$

142/1 (T) bzw. 130/1 (NT)

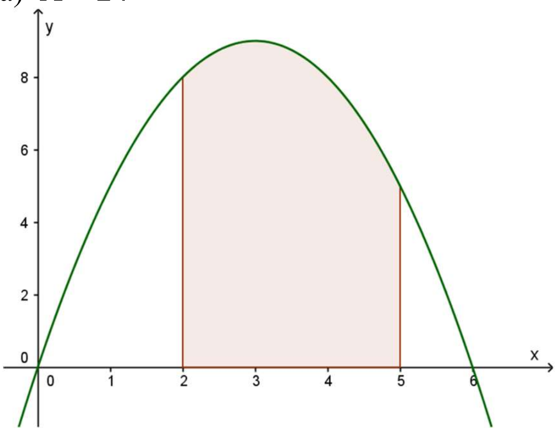
a) $\frac{20}{3}$ d) 7,5

b) $\frac{5375}{12}$ e) 130

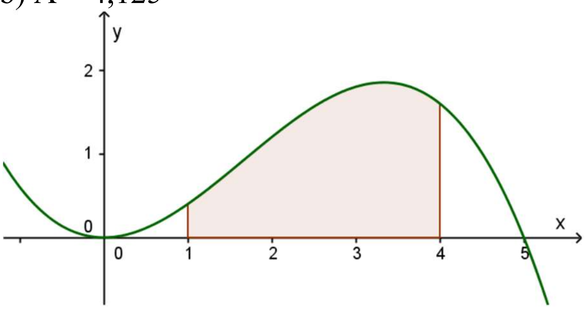
c) 171 f) 168

142/2 (T) bzw. 130/2 (NT)

a) A = 24



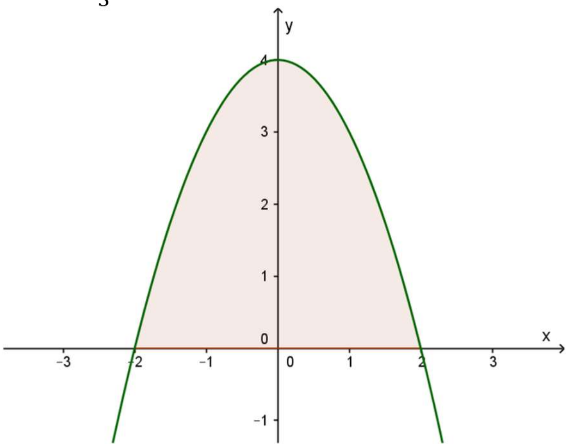
b) A = 4,125



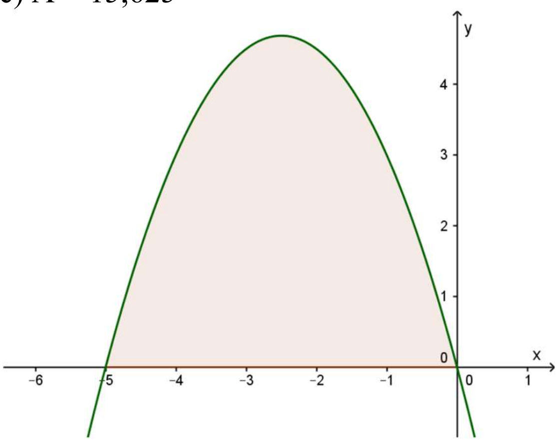
142/3 (T) bzw. 130/3 (NT) a) 1656 b) 280,8

142/4 (T) bzw. 130/4 (NT)

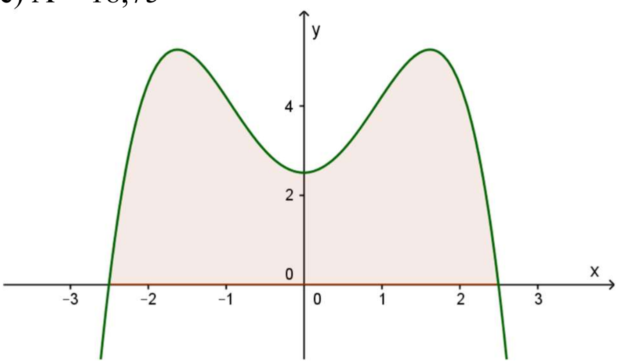
b) A = $\frac{32}{3}$



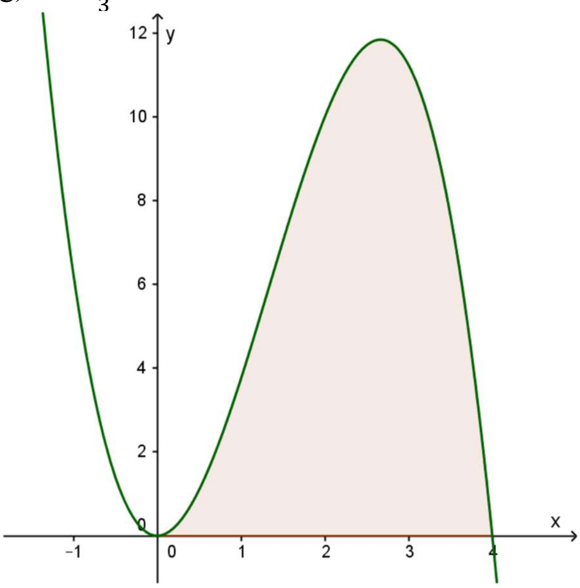
c) A = 15,625



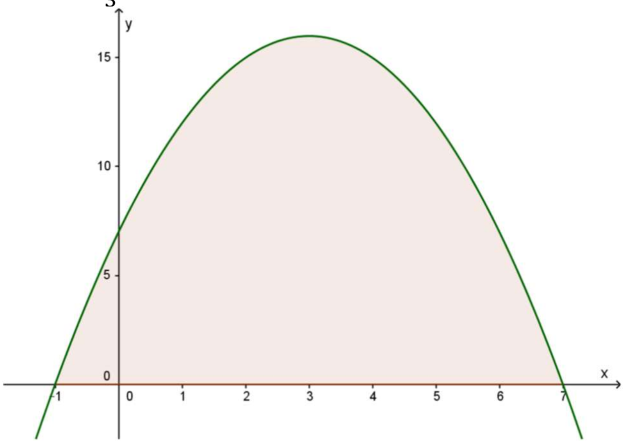
e) A = 18,75



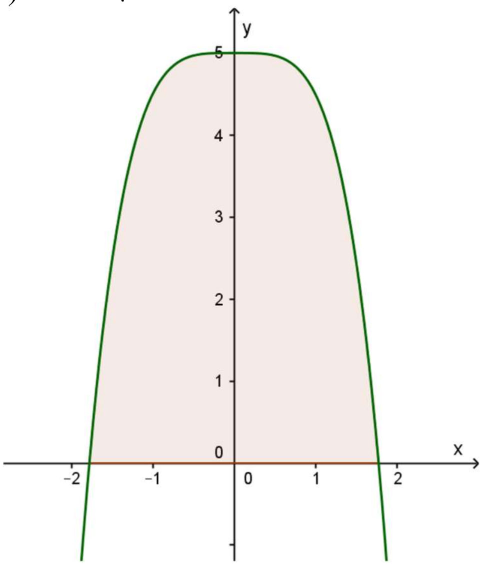
g) A = $\frac{80}{3}$



h) A = $\frac{256}{3}$



i) A = $8\sqrt[4]{10}$



<u>143/7</u> (T) bzw. <u>131/7</u> (NT)
Aus der Schreibweise des Intervalls kann man folgern, dass $b \geq 2$ sein sollte. Dann gibt es nur eine Lösung, nämlich $b = 4$.

<u>143/8</u> (T) bzw. <u>131/8</u> (NT)
In beiden Fällen hat der Spiegel einen Flächeninhalt von 4 m^2, der Verschnitt beträgt also 2 m^2.

<u>143/9</u> (T) a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ b) A = $\frac{64}{3}$ c) A = $\frac{32}{3}$

<u>143/10</u> (T) bzw. <u>131/10</u> (NT)
a) $f(x) = -\frac{1}{160}(x - 200)^2 + 750$ b) A = $\frac{1\,600\,000}{3}$ (mm^2), also etwa 0,53 m^2

<u>148/4</u> (T) bzw. <u>136/4</u> (NT) Koordinatensystem wählen: x-Achse am Boden, y-Achse in der Mitte
Parabel wird beschrieben durch $f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 20$ ==> V = $\frac{100\,000}{3}$ (m^3) ==> 34 Ventilatoren

<u>148/5</u> (T) bzw. <u>136/5</u> (NT) Das Grundstück hat einen Wert von etwa 193 167 €, das Angebot ist also etwa 1% zu teuer.

<u>148/7</u> (T) bzw. <u>136/7</u> (NT)
a) $a = 6$ c) $a = \pm 2$
b) $a = -6$ oder $a = 4$ d) $a = \pm\sqrt{15}$

149/10 (T) bzw. 137/8 (NT)   1 Kästchen hat hier die Seitenlänge 0,5 cm; in g(x) muss $-\frac{1}{2}x^2$ stehen
aufgemaltes Auge: A = 40 (cm^2) ==> m = 80 g
ausgesägtes Auge: A = $40 - \frac{\pi}{4}$ (cm^2) ==> m ≈ 78,4 g

137/9 (nur NT)
Annahme: Die beiden Begrenzungslinien sind Stücke von Parabeln; i. F. x und f(x), g(x) in m
==> oben: $f(x) = -0{,}2\,(x-4)^2 + 5$; unten: $g(x) = 0{,}2\,(x-6)^2 + 1$
==> eingeschlossene Fläche: 14,4 m^2 ==> Volumen der Grube: 8,64 m^3 ==> 9 m^3 bestellen

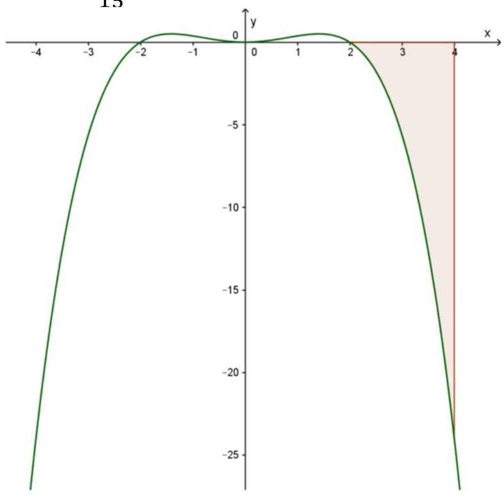
149/11 (T) bzw. 137/10 (NT)   V ≈ 9167 (m^3)

149/12 (T) bzw. 137/11 (NT)   mit S(0|36), $x_{1,2} = \pm 39$ folgt: A ≈ 1872 (m^2) ==> etwa 3,74 Millionen €

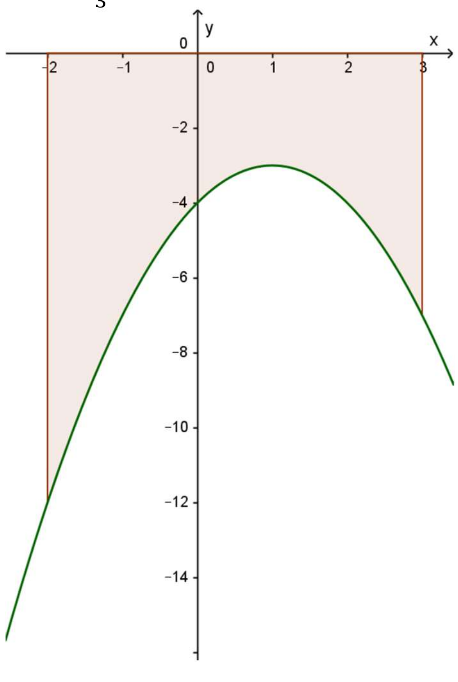
VI.3 Weitere Flächenberechnungen

142/2 (T) bzw. 130/2 (NT)

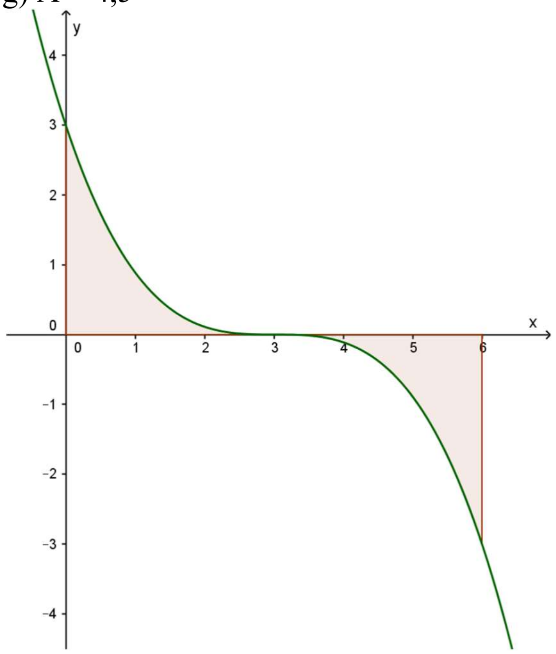
c) A = $\frac{232}{15}$



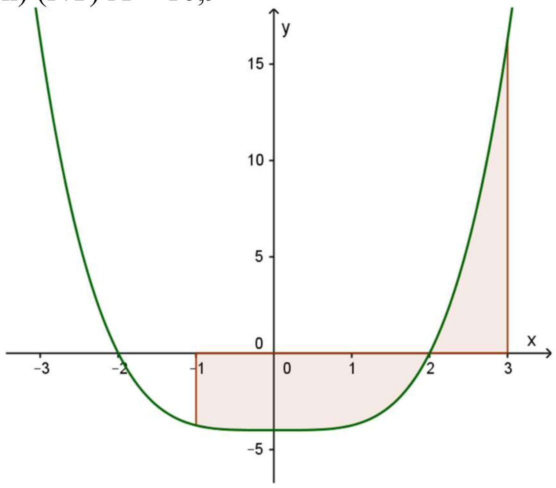
f) A = $\frac{80}{3}$



g) A = 4,5

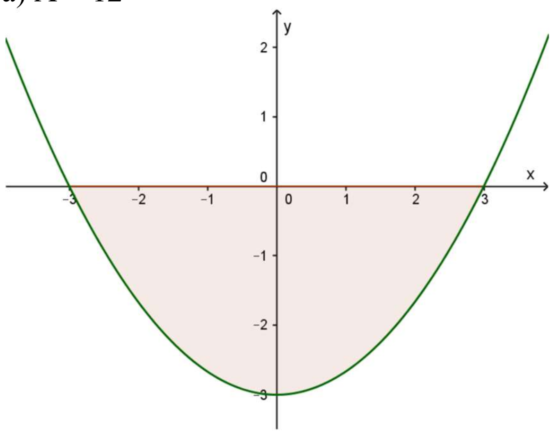


h) (NT) A = 16,9

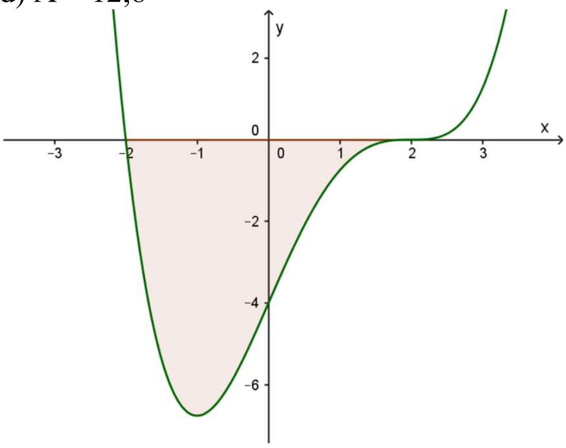


<u>142/4</u> (T) bzw. <u>130/4</u> (NT)

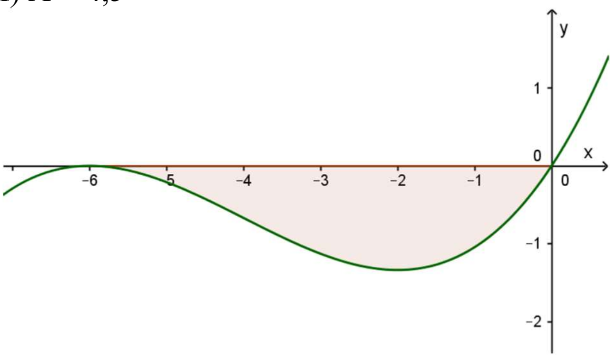
a) A = 12



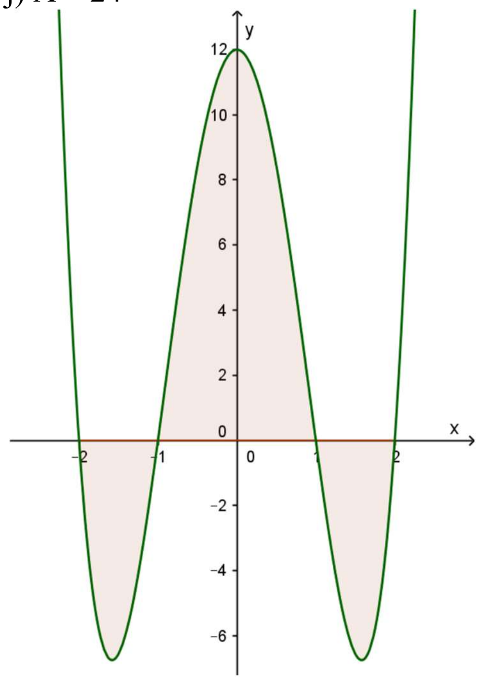
d) A = 12,8



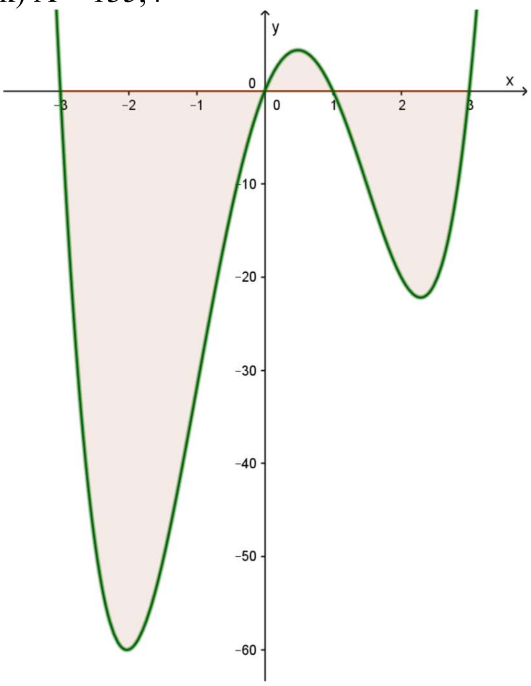
f) A = 4,5



j) A = 24



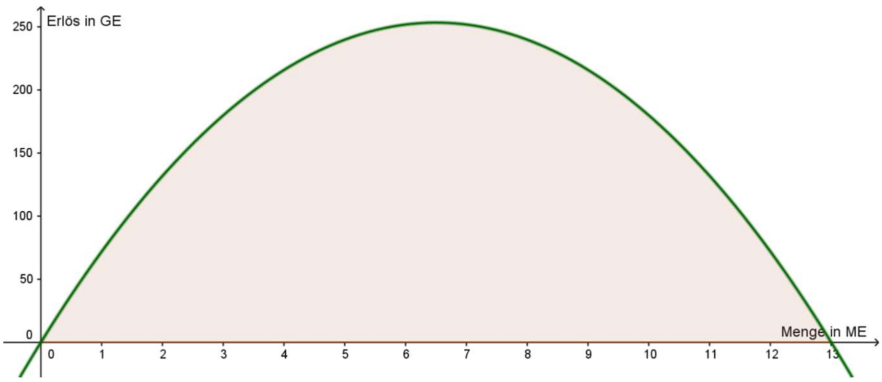
k) A = 135,4



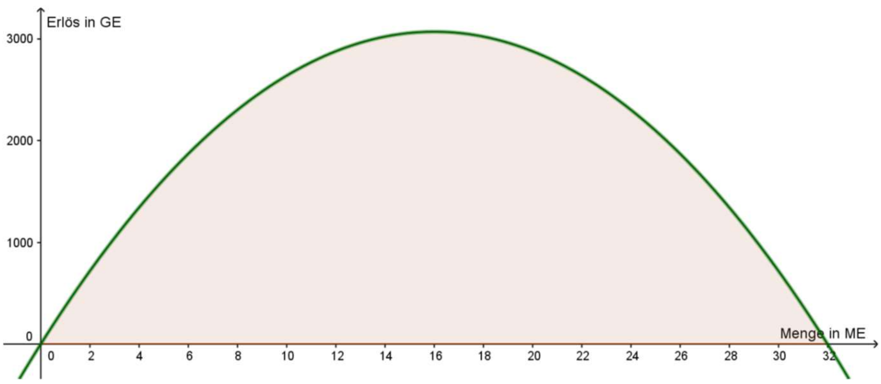
<u>143/5</u> (T) bzw. <u>131/5</u> (NT) a) A = 13,875 b) 176,45

<u>143/6</u> (T) bzw. <u>131/6</u> (NT)
Für $m > -1$ oder $m < -4$ ist die Aufgabe ohne Hilfsmittel lösbar ($m = 3$ bzw. $m = -6{,}2$); ansonsten ist sie eine ziemliche Zumutung (nach langer Rechnerei folgt, dass es dann keine Lösung gibt).

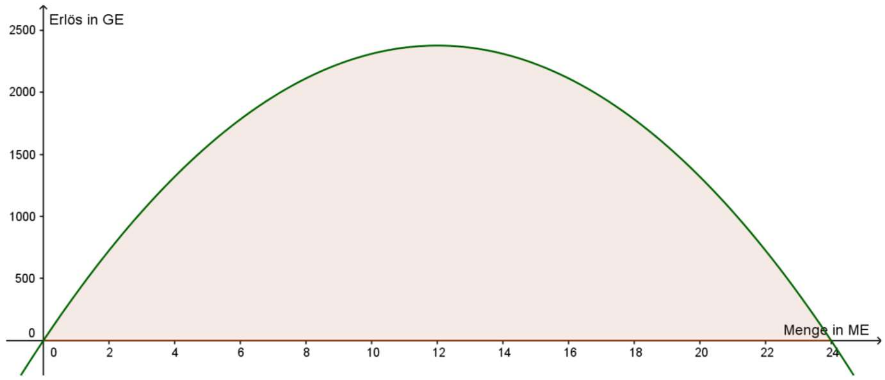
<u>131/9</u> (NT)
a) 2 197 GE



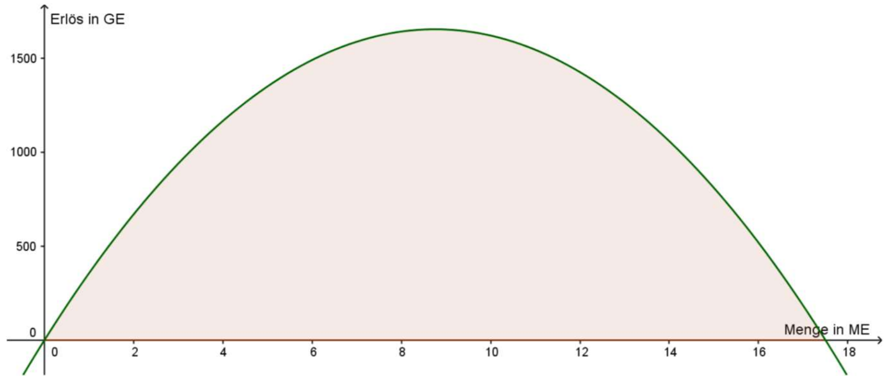
b) 65 536 GE



c) 38 016 GE

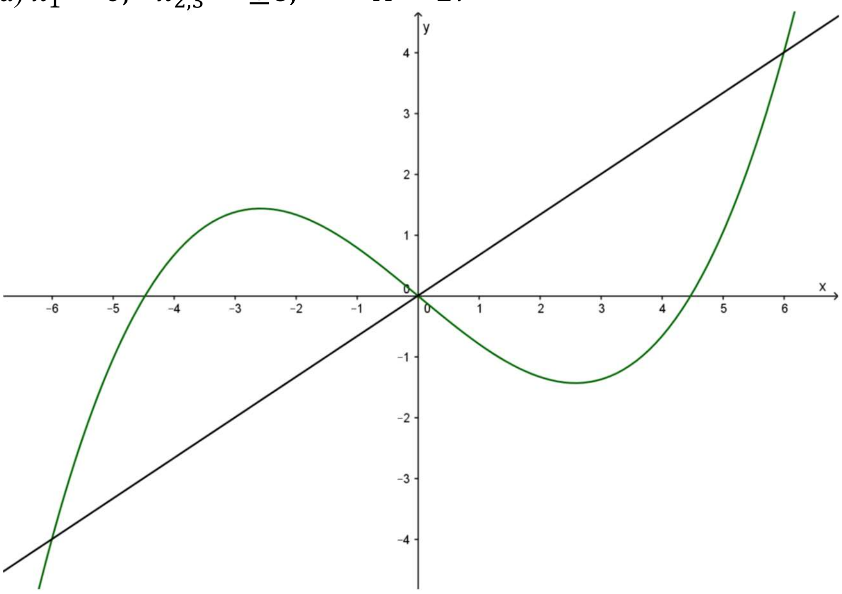


d) 19 293,75 GE

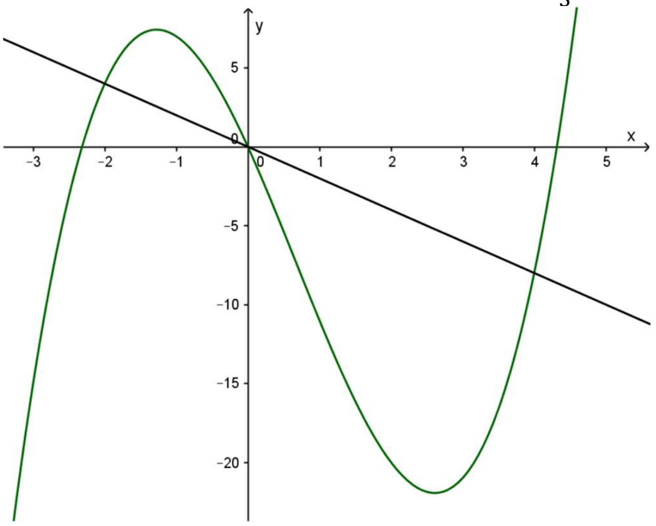


<u>146/1</u> (T) bzw. <u>134/1</u> (NT) jeweils grün: G_f; schwarz: G_g

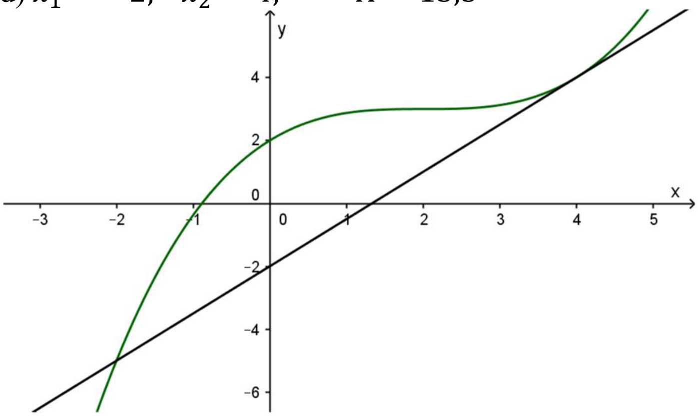
a) $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 6$; $A = 27$



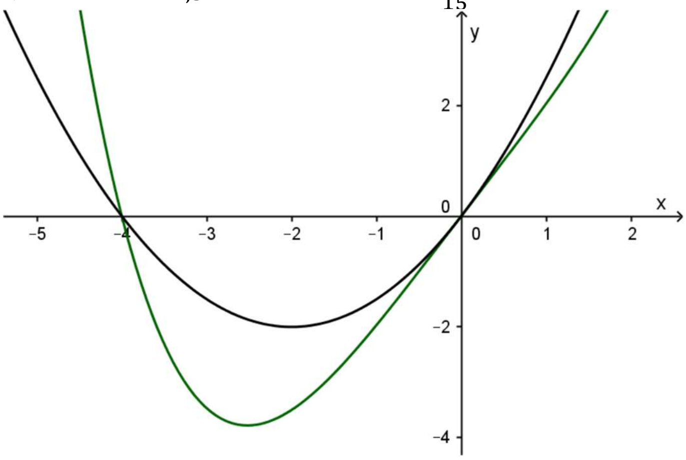
b) $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4$; $A = \frac{148}{3}$



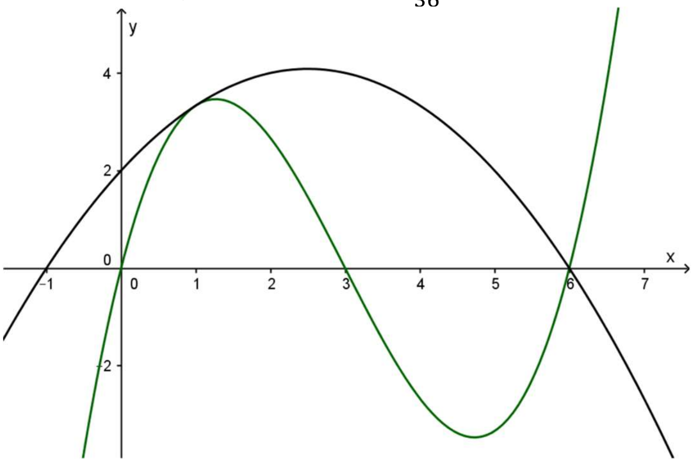
d) $x_1 = -2$; $x_2 = 4$; $A = 13{,}5$



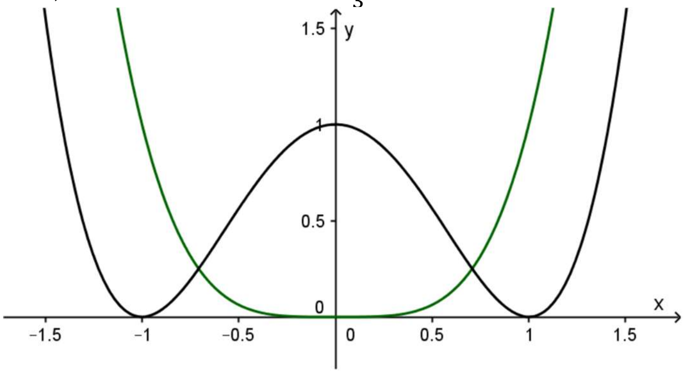
e) $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 4$; $A = \frac{128}{15}$



f) $x_1 = 1; \quad x_{2,3} = 6; \qquad A = \frac{625}{36}$



j) $x_{1,2} = \pm\sqrt{0{,}5}; \qquad A = \frac{2}{3}\sqrt{2}$



<u>147/2</u> (T) bzw. <u>135/2</u> (NT)

a) $\frac{59}{6}$ c) 19,8

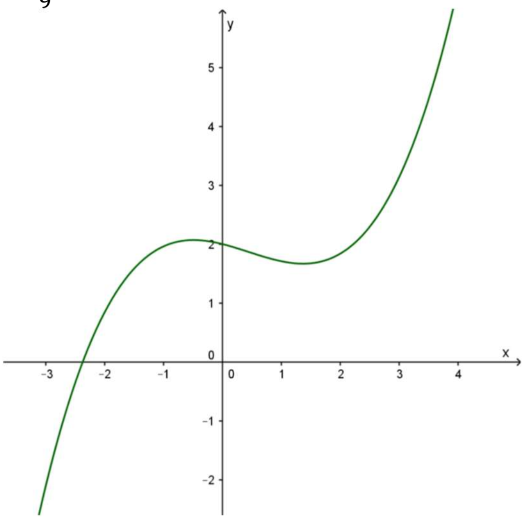
b) $\frac{155}{3}$ d) $\frac{20}{3}$ f) 77,65

<u>147/3</u> (T) bzw. <u>135/3</u> (NT)

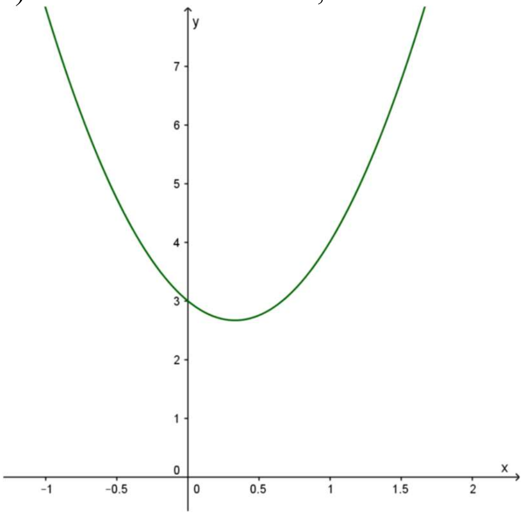
a_1) neg.	a_2) neg.	a_3) pos.
b_1) –	b_3) W	b_5) U
b_2) V	b_4) –	b_6) –

<u>148/3</u> (T) bzw. <u>136/3</u> (NT)

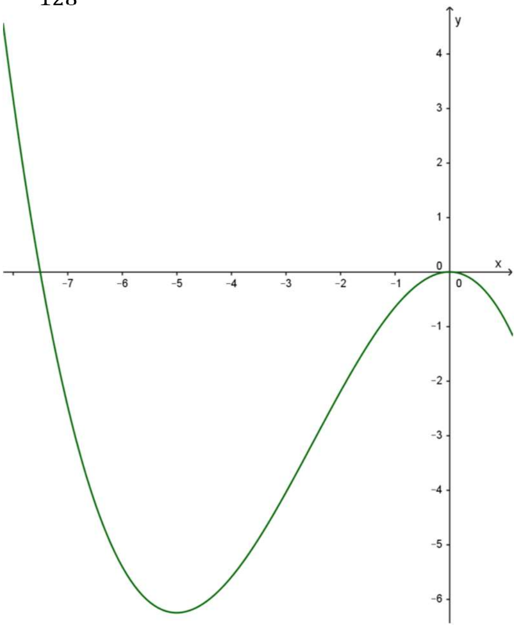
a) $\frac{64}{9}$ = Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, G_f und den Geraden x = –2 und x = 2 eingeschlossen wird



b) 15 = Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, G_f und den Geraden x = −1 und x = 2 eingeschlossen wird

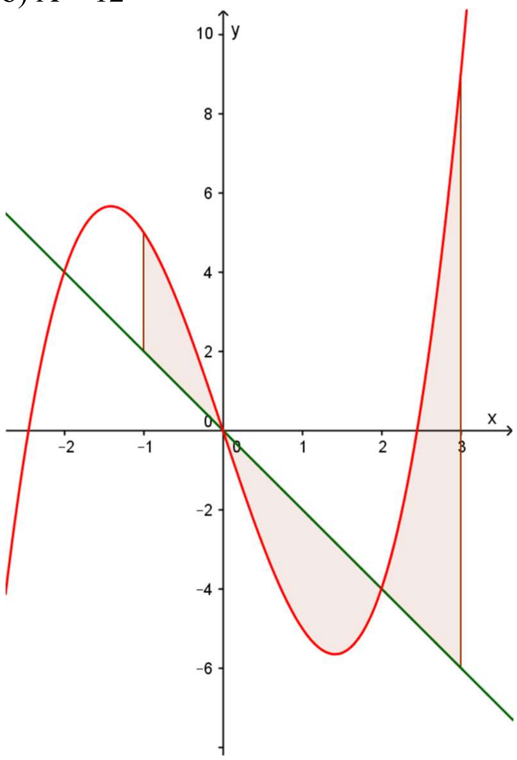


c) $\frac{3375}{128}$ = der Fläche, die von der x-Achse und G_f eingeschlossen wird



148/2 (T) bzw. 136/2 (NT) grün: G_f; rot: G_g

b) A = 12



148/3 (T) bzw. 136/3 (NT) A = 1,28 (m^2)

148/6 (T) bzw. 136/6 (NT)

$f_1(x) = -0{,}1\,(x-1)^2 + 2{,}6$; $f_2(x) = -0{,}1\,x^2 + 2{,}5$ ==> A ≈ 3,0716 (cm^2)

==> V = A · 0,05 cm ≈ 0,15358 cm^3

==> insgesamt werden 1535,8 cm^3 = 1,5358 ℓ Farbe benötigt ==> etwa 82,92 €

VI.4 Weitere Anwendungen des Integrals

Lösungen: siehe Rückseite des Übungsblatts!