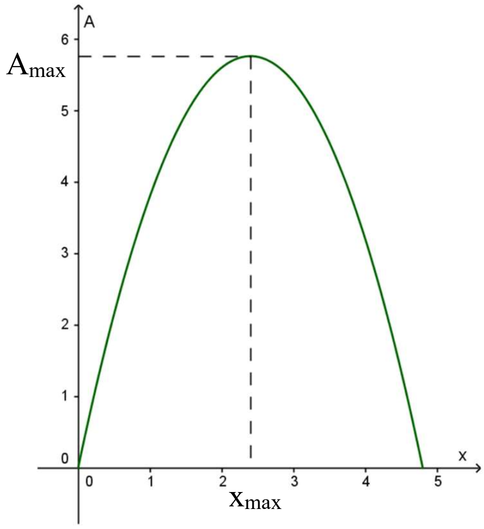
V.1 Extremwertaufgaben

46/1 (T) bzw. 44/1 (NT)

a) $A(x) = -x^2 + 4{,}8x$ mit $D_A =]0; 4{,}8[$ (Kantenlänge x in m, A in m²)

$A_{max} = 5{,}76$ für $x_{max} = 2{,}4$ (also ist die Länge der anderen Kante auch 2,4 m, d. h. das Rechteck ist ein Quadrat)

b)



46/2 (T) bzw. 44/2 (NT)

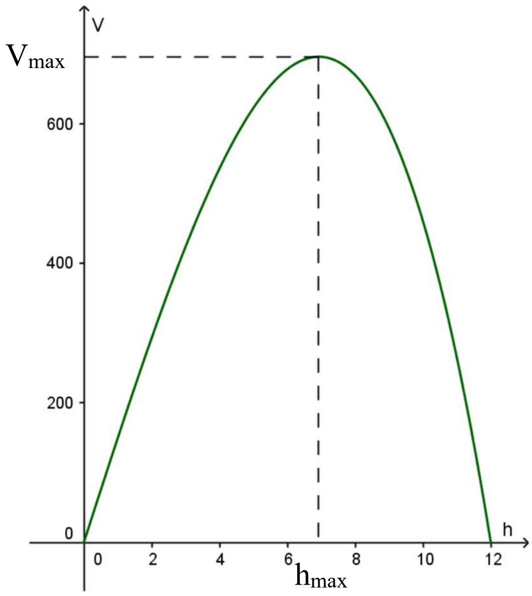
a) Alle Kantenlängen sind 0,2 m. (Es handelt sich also um einen Würfel.)

b) 0,008 m³ c) Was weiß ich, ob ihm ein Würfel gefällt?!?

46/3 (T) bzw. 44/3 (NT) vgl. 49/17 (T) und 49/21 (T) bzw. 45/10 (NT)!

a) $V_{max} = 128\sqrt{3}\pi \approx 696$ (cm³) b) $r_{max} = 4\sqrt{6} \approx 9{,}80$ (cm), $h_{max} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ (cm)

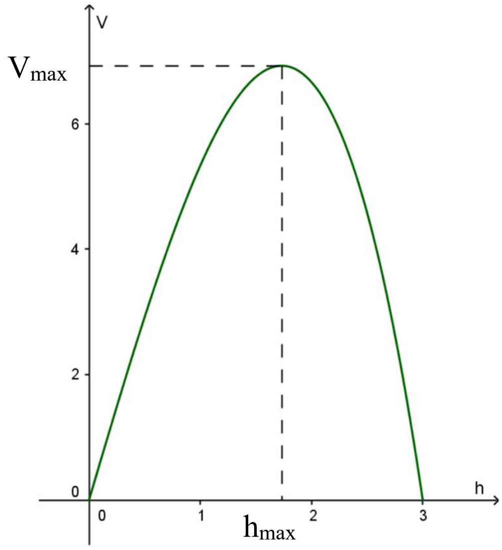
c) $D_V =]0; 12[$



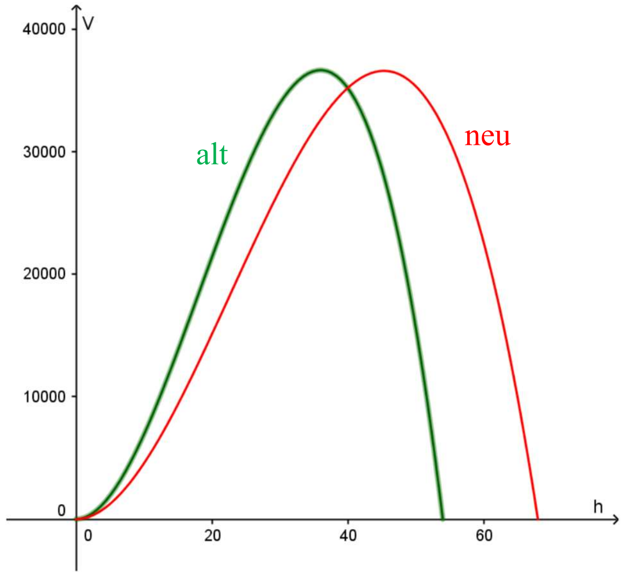
46/4 (T) bzw. 44/4 (NT)

a) $h_{max} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ (m) b) $V = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ (m³); $a_{max} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ (m); $G_{max} = 12$ (m²)

c) $D_V =]0; 3[$



<u>46/5</u> (T) bzw. <u>44/5</u> (NT)
a) ältere Gebührenordnung: $V_{max} = 11664\pi \approx 36644$ (cm^3); $\ell_{max} = 36$ (cm); $d_{max} = 36$ (cm)
neuere Gebührenordnung: $V_{max} = \frac{314\,432}{27}\pi \approx 36586$ (cm^3); $\ell_{max} = \frac{68}{3}$ (cm); $d_{max} = \frac{136}{3}$ (cm)

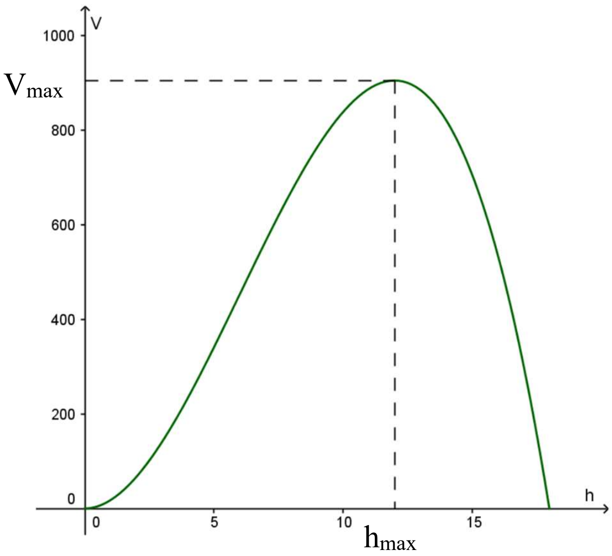


Bei der alten Gebührenordnung war das maximale Volumen knapp größer, und die Maße waren etwas sinnvoller. (Bei der neuen Gebührenordnung ist der Durchmesser doppelt so groß wie die Länge, der Zylinder ist also reichlich flach; bei der alten waren Durchmesser und Länge gleich groß.)

<u>47/6</u> (T) bzw. <u>45/6</u> (NT) $V_{max} = \frac{2000}{9}\sqrt{3}\,\pi \approx 1209$ (cm^3)

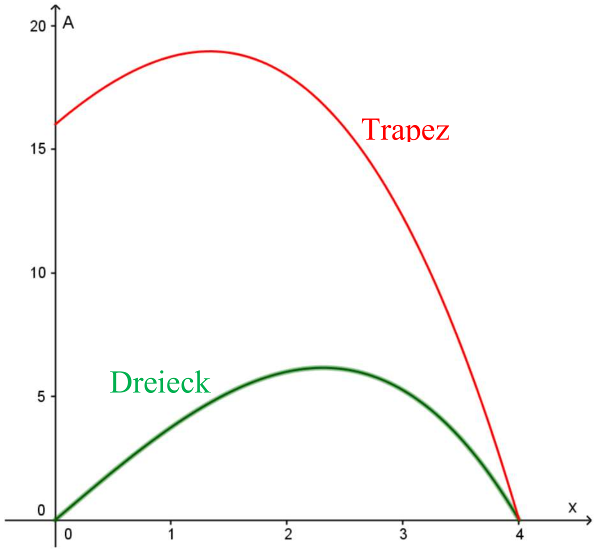
<u>47/7</u> (T) bzw. <u>45/7</u> (NT) $A_{max} = 19200$ (cm^2) für $a_{max} = 120$ (cm), $b_{max} = 160$ (cm)

<u>47/8</u> (T) bzw. <u>45/8</u> (NT)
a) $r_{max} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ (cm); $h_{max} = 12$ (cm) b) $V_{max} = 288\pi \approx 905$ (cm^3)
c) $D_V =]0; 18[$



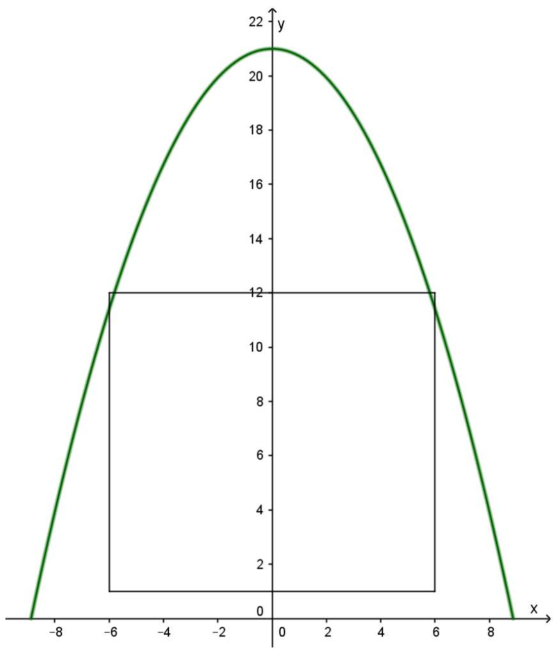
<u>47/9</u> (T) bzw. <u>45/9</u> (NT) a) $a_{max} = 2$; $b_{max} = \frac{88}{75}$ b) $A_{max} = \frac{176}{75}$

<u>47/10</u> (T)
a) $g_{max} = \frac{8}{3}\sqrt{3} \approx 4{,}62$; $h_{max} = \frac{8}{3}$; $A_{max} = \frac{32}{9}\sqrt{3} \approx 6{,}16$
b) $h_{max} = \frac{32}{9}$; $a = 8$; $c_{max} = \frac{8}{3}$; $A_{max} = \frac{512}{27} \approx 19{,}0$ (Seitenkanten: $\frac{40}{9}$)
c)



<u>47/11</u> (T) $a_{max} = 4$ (cm); $h_{max} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ (cm); $V_{max} = 288$ (cm^3)

<u>48/12</u> (T) bzw. <u>46/12</u> (NT)
a) $h_{max} = 21$ dm; $b_{max} = 3\sqrt{35}$ dm $\approx 17{,}75$ dm
b) passt nicht durch:



c) f(12/2) = 11,4 < 11 + 1 ==> passt nicht durch

d) $h_{max} = 13,\overline{3}$ (dm); t_{max} = 10 (dm); $V_{max} = 2000\ \ell$

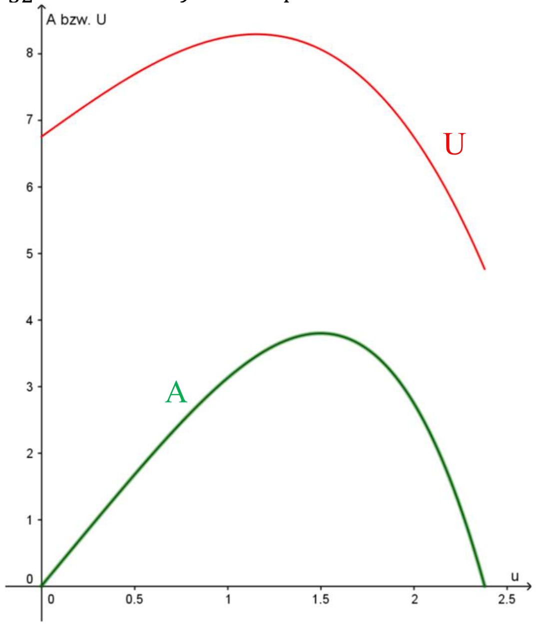
48/13 (T) bzw. 46/13 (NT)

a) Graph: siehe Buch!

z. B.: $Q\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{107}{32}\right)$ ==> $A = \frac{107}{64}$; $Q\left(1\middle|\frac{25}{8}\right)$ ==> $A = \frac{25}{8}$; $Q\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{81}{32}\right)$ ==> $A = \frac{243}{64}$; $Q\left(2\middle|\frac{11}{8}\right)$ ==> $A = \frac{11}{4}$

b) $u_{max} = \frac{3}{2}$; $v_{max} = \frac{81}{32}$; $A_{max} = \frac{243}{64} \approx 3{,}80$

c) $u_{max} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15$; $v_{max} = \frac{81}{32}$; $U_{max} = \frac{8}{9}\sqrt{3} + \frac{27}{4} \approx 8{,}29$



48/14 (T) bzw. 46/14 (NT) a) C(3|2,4) b) A_{max} = 3,6

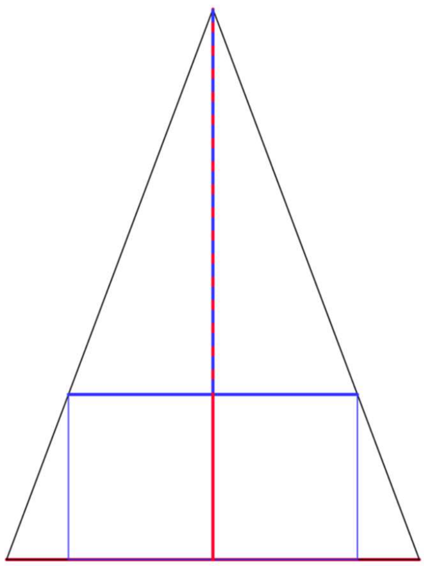
48/15 (T) bzw. 46/15 (NT)

b) Behauptung stimmt

c) siehe dick markierte Strecken; $\frac{b}{4-h} = \frac{3}{4}$ ==> $b = 3 - \frac{3}{4}h$

d) $A(h) = 3h - \frac{3}{4}h^2$

e) A_{max} = 3 für b_{max} = 1,5, h_{max} = 2; füllt dann 50% der Wandfläche aus a,b,c)



49/16 (nur T)
A = $\ell \cdot b$
Nebenbedingung: u = 2 ℓ + 2b ==> ℓ = 0,5u – b
==> A(b) = 0,5ub – b^2; wird maximal für b_{max} = u/4 ==> ℓ_{max} = u/4
==> beide Seitenlängen gleich ==> Quadrat

49/17 (nur T) vgl. 46/3 und 49/21 (T)! $r_{max} = 8\sqrt{6} \approx 19{,}60$ (cm)

49/18 (nur T) a) $g_{max} = \frac{8}{3}$; $h_{max} = \frac{32}{9}$; $A_{max} = \frac{128}{27}$ b) g_{max} = 4; h_{max} = 4; A_{max} = 8

49/19 (nur T) $r_{max} = h_{max} = \frac{5}{\pi+4} \approx 0{,}70$ (m)

49/20 (nur T) x_{max} = 4; y_{max} = 2

49/21 (T) bzw. 45/10 (NT) vgl. 46/3 und 49/17 (T)!
a) $r_{max} = 4\sqrt{6} \approx 9{,}80$ (cm), $h_{max} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ (cm); $V_{max} = 128\sqrt{3}\pi \approx 696$ (cm^3)
b) h kann beliebig groß werden ==> V kann beliebig groß werden

49/22 (nur T) $\ell_{max} \approx 21{,}6$ cm, $b_{max} \approx 12{,}9$ cm, $h_{max} \approx 4{,}0$ cm ==> $V_{max} \approx 1128$ cm^3

49/23 (T) bzw. 45/11 (NT)
a) $p(x) = -0{,}08x^2 + 8$
b) ja, passt gerade so (p(3,5) – 3 = 4,02 > 4)
c) $A(u) = -0{,}16u^3 + 10u;$ $D_A = \left]0; \frac{5}{2}\sqrt{10}\right[$
$u_{max} \approx 4{,}56$; $h_{max} \approx 3{,}33$; $b_{max} \approx 9{,}13$; $A_{max} \approx 30{,}43$

50/24 (nur T) a) $V(r) = \frac{\pi}{3}(-r^4 + 8r^3)$ b) $D_V = [0; 8]$ c) B(6|12); $V_{max} = 144\pi \approx 452$

50/25 (nur T)
a,b) keine allgemeine Lösung angebbar; machen Sie mal!
c) $h = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ d) $V(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}(800x - x^3)$
e) $x_{max} = \frac{20}{3}\sqrt{6} \approx 16{,}33$ (cm); $V_{max} = \frac{16\,000}{27}\sqrt{3} \approx 1026$ (cm^3); $h_{max} = \frac{20}{3}\sqrt{3} \approx 11{,}55$ (cm)

50/26 (nur T)

a) $A = A_{Rechteck} + A_{Halbkreis} = x \cdot 2x + \frac{1}{2}\pi r^2$

Nebenbedingung: $2r + 4 = 2x \Longrightarrow r = x - 2$

$\Longrightarrow A(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}\pi(x-2)^2 = 2x^2 + \frac{1}{2}\pi(x^2 - 4x + 4) = 2x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2 - 2\pi x + 2\pi = (2+0{,}5\pi)\, x^2 - 2\pi x + 2\pi$

b) $r > 0 \Longrightarrow x - 2 > 0 \Longrightarrow x > 2$; $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{DE}| + |\overline{EF}| \leq 12 \Longrightarrow x + 2 + 2 + x \leq 12 \Longrightarrow x \leq 4$

c) $x_{max} = 4$ d) $\frac{28+2\pi}{32+2\pi} \approx 89{,}55\%$

50/27 (nur T)

a) $A(a) = -3a^3 + 12a$; $D_A =]0;2[$

b) $a_{max} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15$; $A_{max} = \frac{16}{3}\sqrt{3} \approx 9{,}24$; $b_{max} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}31$; $\ell_{max} = 4$

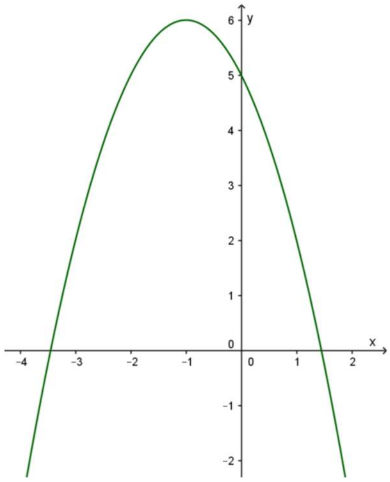
V.2 Aufstellen von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben‘‘)

33/1 (T) bzw. 32/1 (NT)

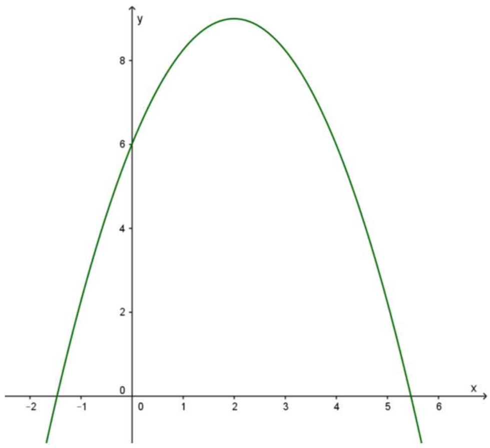
a) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{4}$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$ c) $f(x) = -\frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{9}x^3$

33/2 (T) bzw. 32/2 (NT)

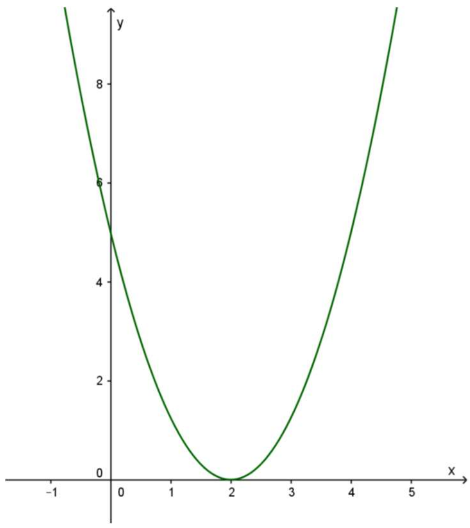
a) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$



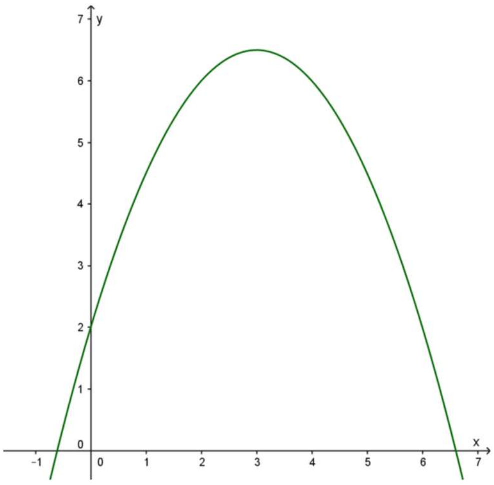
b) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 6$



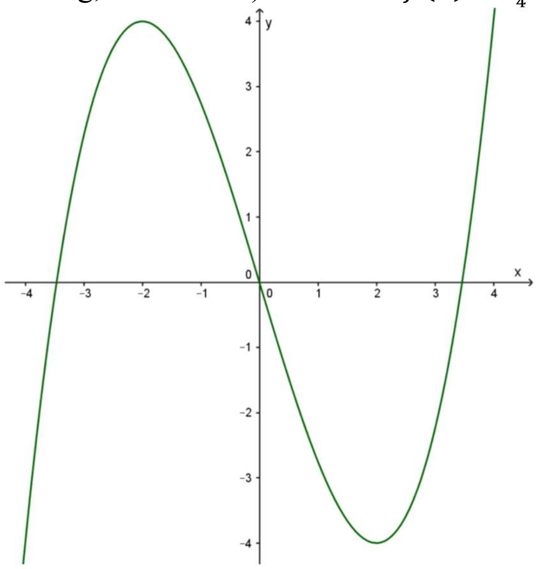
c) $f(x) = \frac{5}{4}x^2 - 5x + 5$



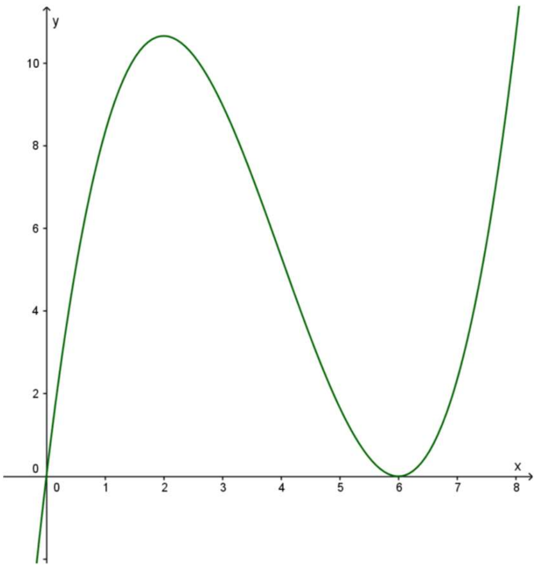
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$



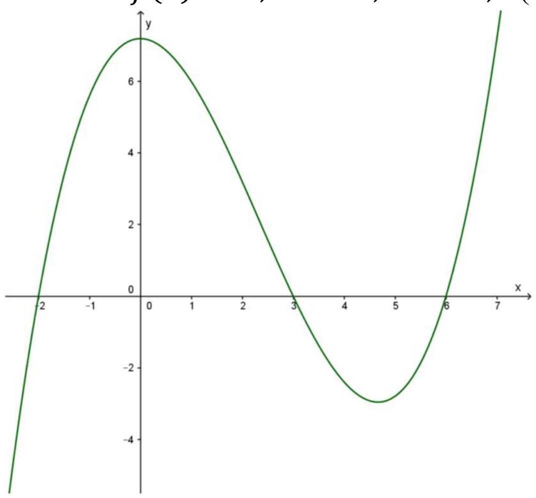
e) $f(x) = -\frac{k}{16}x^3 + \frac{3k}{4}x$ (T; k < 0 nötig, sonst HoP!) bzw. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ (NT)



f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x$

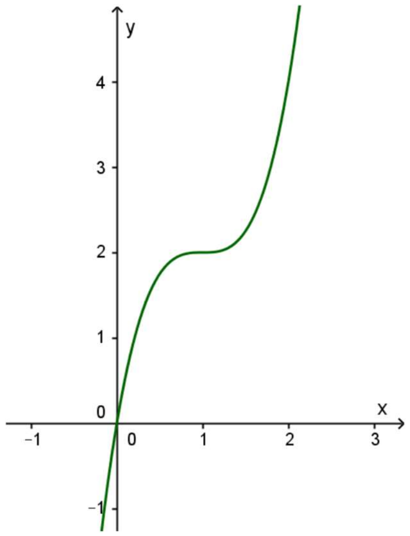


g) $f(x) = \frac{k}{36}x^3 - \frac{7k}{36}x^2 + k$ (T)   bzw. $f(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}4x^2 + 7{,}2$ (NT)

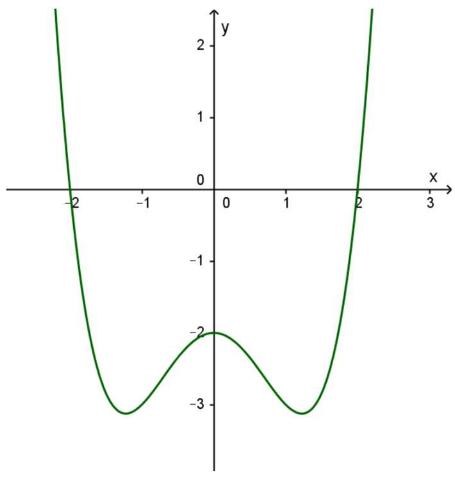


h) $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 4$;   Graph: siehe Abbildung 1

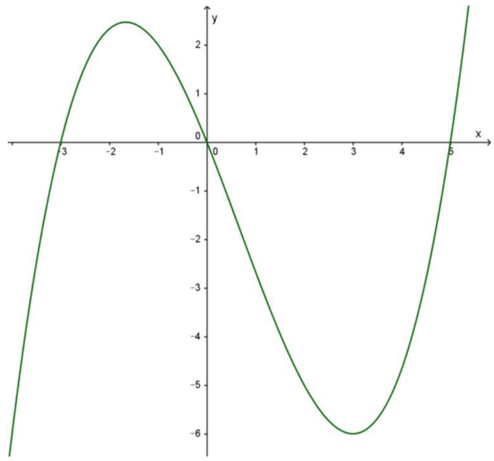
i) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x$



j) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 2$

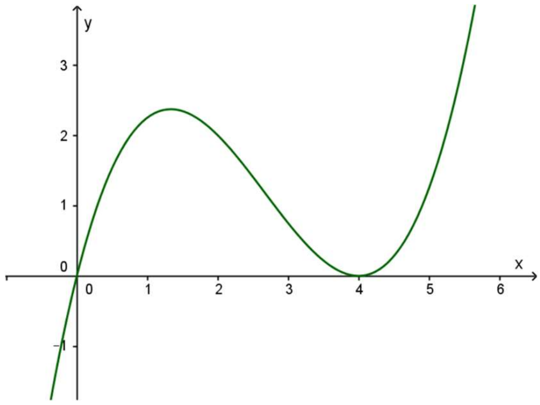


k) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}x$

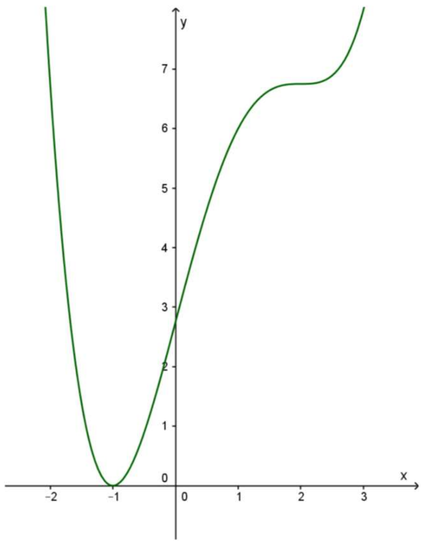


l) $f(x) = \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$; Graph: siehe Abbildung 2

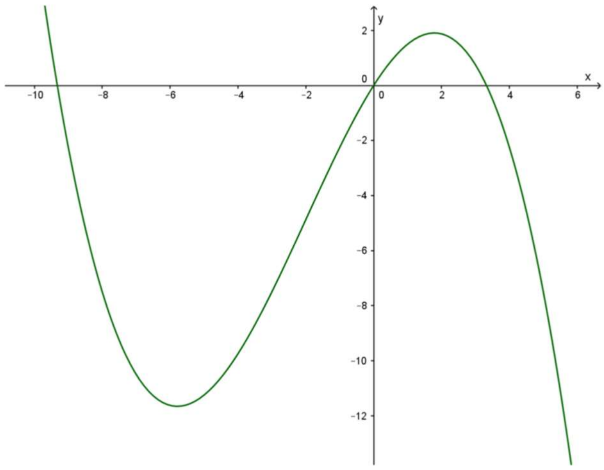
m) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 4x$



n) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x + \frac{11}{4}$

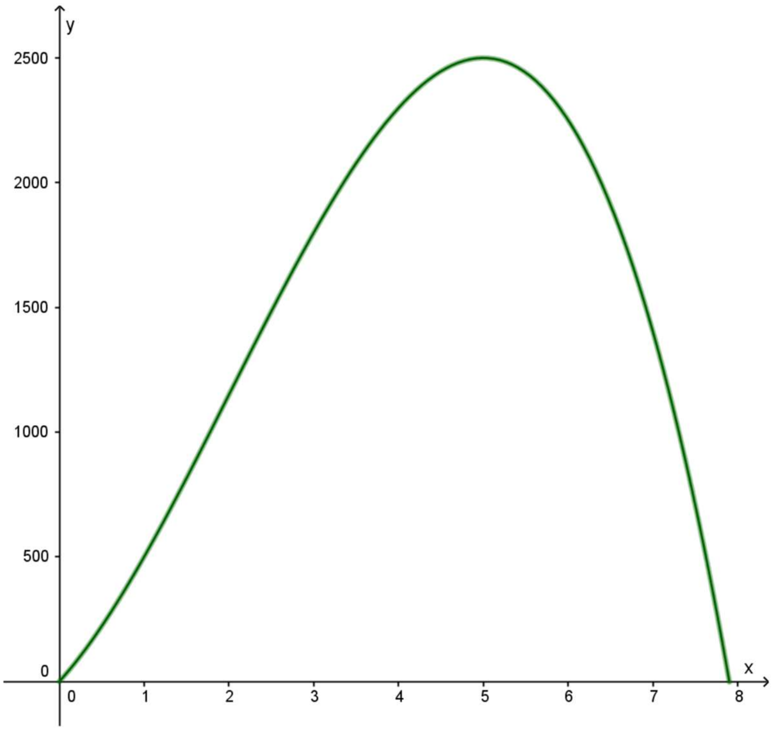


o) $f(x) = -\frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{31}{16}x$



34/3 (T) bzw. 33/3 (NT) a) grün b) gelb c) grün

34/4 (T) bzw. 33/4 (NT)
a,c)



b) $f(x) = -25x^3 + 150x^2 + 375x$ d) 2500 e) 675 f) knapp 8

34/5 (T) bzw. 33/5 (NT) $g(x) = -x^3 + 3x^2 + 144x - 432$

34/6 (T) bzw. 33/6 (NT)
Man nehme A als Ursprung des Koordinatensystems. Da der Graph einen TeP und einen HoP hat, muss die Funktion (mindestens!) vom Grad 4 sein.

$$f(x) = -\frac{10}{9}x^4 + \frac{200}{9}x^3 - 140x^2 + 360x$$

34/7 (T) bzw. 33/7 (NT)
a) absolutes Minimum im Februar, absolutes Maximum im Juli; lokales Minimum im November, lokales Maximum im Dezember (damit ist das Steigungsverhalten klar...)
b) Da man 4 ExP hat, braucht man mindestens eine Funktion 5. Grades. Zu den gegebenen ExP (8 Informationen) gibt es aber keine passende Funktion 5. Grades, also bräuchte man eine höheren Grades. Diese Aufgabe ist eine Zumutung! Damit ist auch (c) nicht lösbar.
d) T(t) ≈ $0{,}01813t^4 - 0{,}47144t^3 + 3{,}29102t^2 - 2{,}94650t - 3{,}49121$
Auch diese Teilaufgabe ist (ohne CAS) eine Zumutung, aber zumindest noch halbwegs lösbar...

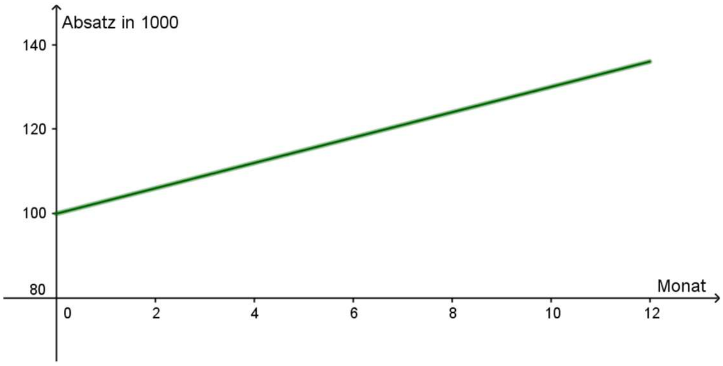
35/8 (T) $f(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 8$

35/9 (T)
a) Ursprung: A; x-Achse nach rechts, y-Achse nach oben; x und f(x) in m
b) $f(x) = \frac{1}{180}x^2 - x$ c) 20 (bei x = 60)

35/10 (T) $f(t) = \frac{25}{64}t^3 - \frac{125}{8}t^2 + \frac{425}{4}t + 300$

35/11 (T) $f(t) = -\frac{1}{20}t^3 + \frac{9}{5}t^2 - \frac{96}{5}t + 62{,}5$

35/12 (T)
a)

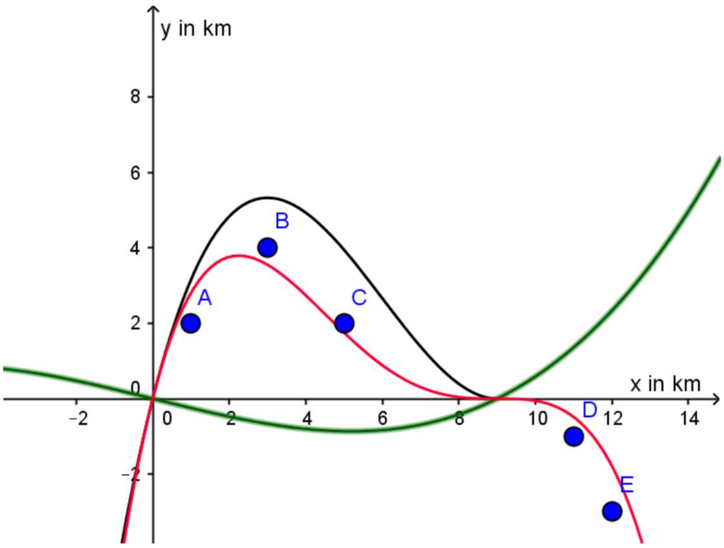


b) nimmt zu für $0 \leq t < 3$ (April bis Juli) und $9 < t \leq 12$ (Januar bis April), nimmt ab für $3 < t < 9$ (Juli bis Januar)
c) t = 6 (Oktober)
d) t ≈ 1,5 (Modell f zu hoch) und t ≈ 10,5 (Modell g zu hoch)

36/13 (T) bzw. 34/8 (NT)
a) mit $g(0) = f(0) = 0$, $g(9) = f(9) = 0$, $g'(0) = -\frac{1}{f'(0)} = 4$, $g'(9) = 0$ folgt:

$$g(x) = \frac{4}{81}x^3 - \frac{8}{9}x^2 + 4x$$

b)



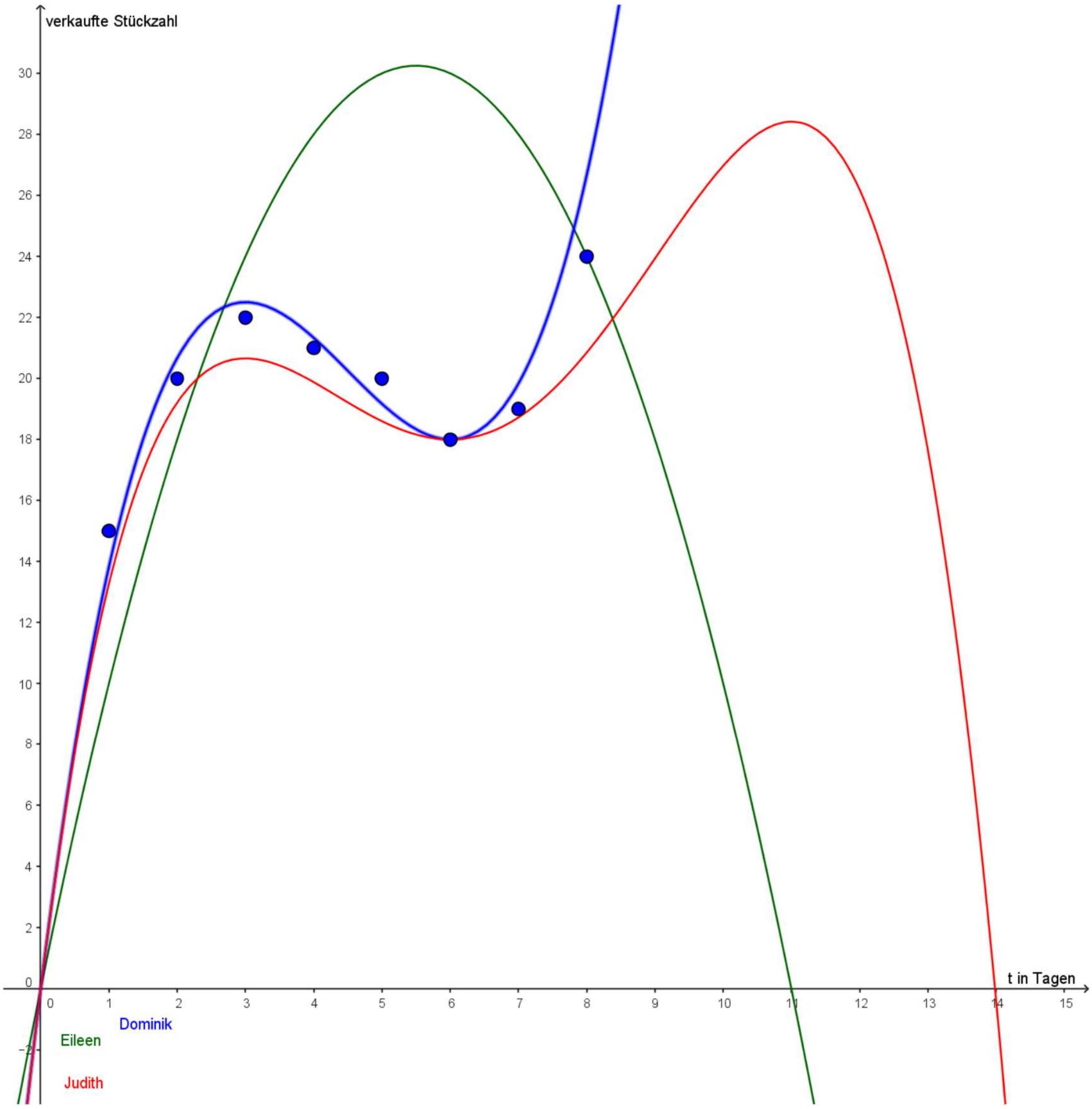
c) selbe Bedingungen wie an g; allerdings muss bei x = 81 nun ein TeP sein, damit die Straße von dort aus nach unten weiterverläuft, d. h. wir haben zusätzlich $h''(81) = 0$. Damit folgt:

$$h(x) = -\frac{4}{729}x^4 + \frac{4}{27}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 4x$$

36/14 (T) bzw. 34/9 (NT)
keine allgemeine Lösung angebbar; machen Sie mal!

36/15 (T) bzw. 34/10 (NT)

a,c) Punkte einzeichnen: Man nummeriere die Tage einfach durch (beginnend bei 1) und ignoriere dabei das Wochenende.



b) $f(x) = -x^2 + 11x;$ $\quad g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4{,}5x^2 + 18x;$ $\quad h(x) = -\frac{1}{44}x^4 + \frac{20}{33}x^3 - \frac{117}{22}x^2 + 18x$

(„dieselben Extrempunkte wie Dominiks Graph" ist bei Judiths Graph nicht möglich, nur „dieselben Bedingungen an die Extrempunkte wie bei Dominiks Graph"!)

c) Eileens Graph ist eine sehr schlechte Modellierung der Daten, außer dem Punkt bei 2 und dem bei 8 passt eigentlich nichts. Der Graph von Dominik passt sehr gut zu den Daten, allerdings hat er den Nachteil, dass er unbegrenzt ansteigt, was sicher unrealistisch ist. Der Graph von Judith passt halbwegs zu den Daten und modelliert außerdem richtig, dass die Verkaufszahl mit der Zeit gegen null gehen sollte. Verwendet man den Graph von Judith, so werden in den folgenden Tagen noch etwa 123 Taschenrechner verkauft.

123/7 $\qquad f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - x + 1$