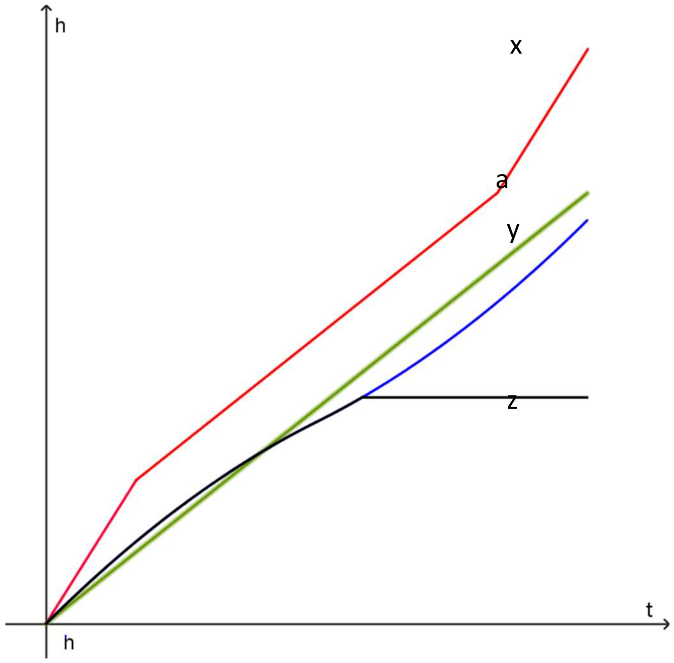
III.1 Steigung eines Funktionsgraphen und Änderungsraten

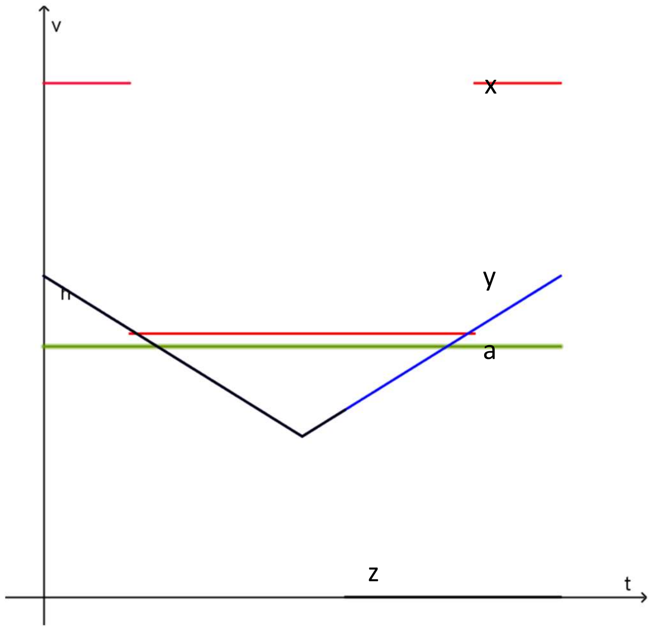
121/1 (T) bzw. 117/1 (NT)
zeichnerisch: jeweils G_f zeichnen, Sekanten einzeichnen, deren Steigungen mit Steigungsdreiecken ermitteln; rechnerisch: übliche Formel für Steigung verwenden
a) 12 bzw. 6 b) –62 bzw. –42 c) 2 bzw. 2

121/2 (T) bzw. 117/2 (NT)
a) 2020 bis 2030
b) D: 0,54% pro Jahr; E: 0,5% pro Jahr; F: 0,3% pro Jahr; P: 0,24% pro Jahr

121/3 (T) bzw. 117/3 (NT)
a)



b)



c) Die Graphen aus (b) geben die Änderungsraten zu den Graphen aus (a) an.

121/4 (T) bzw. 117/4 (NT)
Differenzenquotient = Sekantensteigung = mittlere Steigung in einem Intervall
Differenzialquotient = Grenzwert der Sekantensteigung = Tangentensteigung = momentane / lokale Steigung an einer Stelle / zu einem Zeitpunkt; die Differenzen in Zähler und Nenner werden „unendlich klein"
Beispiel: $f(x) = x^2$
$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 3 = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ist ein Differenzenquotient,
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2 = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1}$ ist ein Differenzialquotient

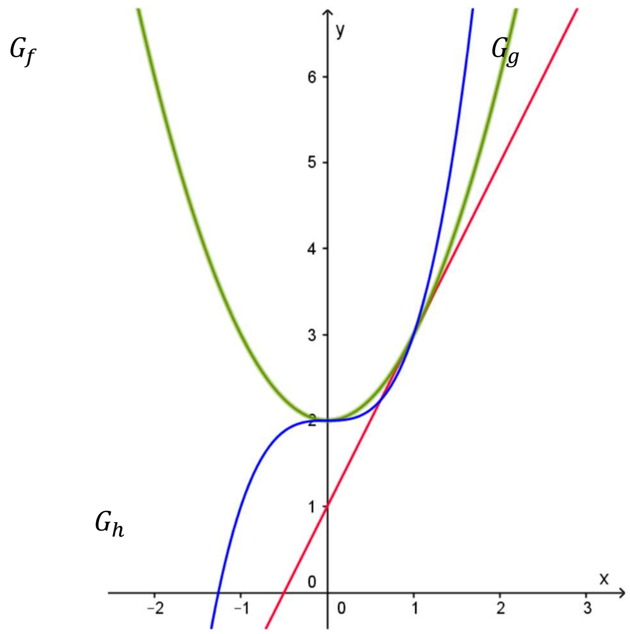
121/5 (T) bzw. 117/5 (NT) a) 2 b) −2 c) 6 d) −1

121/6 (T) bzw. 117/6 (NT) a) −1 bzw. 0

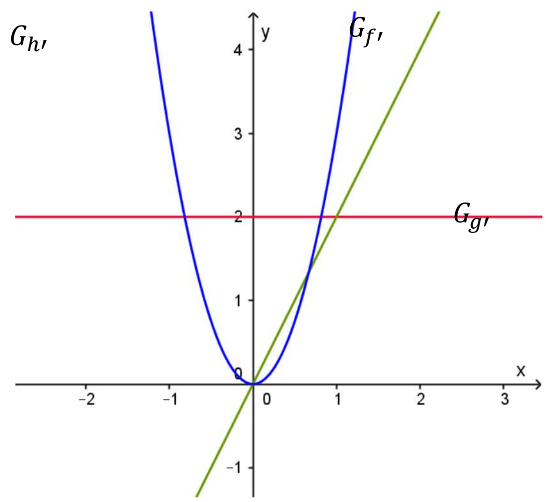
III.2 Ableitungsfunktionen und Ableitungsregeln

121/6 (T) bzw. 117/6 (NT) b) $0{,}5x_0$ bzw. $2x_0 + 4$ c) 2,5 bzw. 14

122/8 (T) bzw. 118/8 (NT)
a)



b) keine allgemeine Lösung angebbar - machen Sie selbst mal!
(bei g(x) ergibt es allerdings keinen Sinn, Tangenten einzuzeichnen...)
c) $f'(x) = 2x$; $g'(x) = 2$; $h'(x) = 3x^2$
d)



122/9 (T) bzw. 118/9 (NT) ***eigentlich eher Stoff Klasse 12***

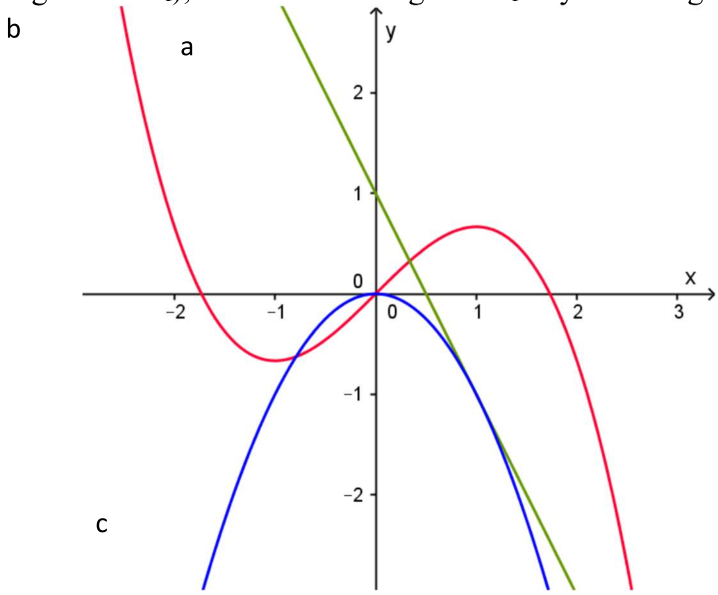
a) Graph 2 (G_f hat die konstante Steigung 2, also muss der Wert der Ableitung konstant gleich 2 sein.)

b) Graph 3 (G_f hat erst negative Steigung (bis x = 0), dann positive Steigung, also muss die Ableitung erst negativ sein (bis x = 0), dann positiv. Alternativ rechnerisch: $f(x) = 0{,}5x^2 - 2 \Longrightarrow f'(x) = x$)

c) Graph 1 (G_f hat überall positive Steigung, außer bei x = 0 (dort ist G_f waagrecht), also muss die Ableitung überall positiv sein, außer bei x = 0 (dort ist die Ableitung gleich 0).)

122/10 (T) bzw. 118/10 (NT) ***eigentlich eher Stoff Klasse 12***

Die Art der Ableitungsfunktion (konstant bzw. quadratisch bzw. linear) und Parameter können entnommen werden (alternativ: man kann an verschiedenen Stellen Funktionswerte der Ableitungsfunktion entnehmen und hat dann dort Steigungen von G_f); die Verschiebung von G_f in y-Richtung kann man selbst festlegen.



131/1 (T) bzw. 127/1 (NT)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{4x^3-4x_0^3}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(4x^3-4x_0^3):(x-x_0) \underset{PD}{=} \lim_{x\to x_0}(4x^2+4xx_0+4x_0^2) = 12x_0^2$$

bzw.

$$\lim_{h\to 0}\frac{4(x_0+h)^3-4x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4(x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3)-4x_0^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{12x_0^2h+12x_0h^2+4h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(12x_0^2+12x_0h+4h^2) = 12x_0^2$$

127/1 (T) bzw. 123/1 (NT)

a) $f'(x) = 4x$; m = 2
b) $f'(x) = 6x^3$; m = 384
c) $f'(x) = 1{,}5x^2$; m = 3,375
d) $f'(x) = 1{,}5x^2$; m = 0,375
e) $f'(x) = 1{,}5x^2$; m = 6
f) $f'(x) = 12{,}5x^4$; m = 12,5
g) $f'(x) = 2{,}5x^4$; m = 0,004
h) $f'(x) = 9x^2 + 6x$; m = 3
i) $f'(x) = 5$; m = 5
j) $f'(x) = 0$; m = 0

127/2 (T) bzw. 123/2 (NT)

a) $f^{(5)}(x) = 300$
b) $f^{(10)}(x) = 1\,451\,520$
c) $f^{(7)}(x) = -560$
d) $f^{(2)}(x) = 2a$

127/3 (T) bzw. 123/3 (NT)

a) wahr; Beispiel: $f(x) = x^4 \Longrightarrow f'''(x) = 24x$
b) falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = m\,x \Longrightarrow f'(x) = m$
c) falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$
d) wahr; Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x$ (zwei ExP) $\Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$ (zwei Achsenschnittpunkte)
e) wahr; Beispiel: $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$ (waagrechte Tangente bei $x_1 = 0$) $\Longrightarrow f''(x) = 6x$ (Nullstelle $x_1 = 0$)
f) wahr; Beispiel: $f(x) = x^n \Longrightarrow f^{(n)}(x) = n!$

127/4 (T) bzw. 123/4 (NT)
Die Steigung der Tangente an den Graph von f an der Stelle $x_0 = 3$ beträgt 4.

127/5 (T) bzw. 123/5 (NT) ***eigentlich eher Stoff Klasse 12*** f2, g3, h1

127/6 (T) bzw. 123/6 (NT) $f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$

131/2 (T) bzw. 127/2 (NT)
a) $f'''(x) = 3$ b) $f'''(x) = -30x^2$ c) $f'''(x) = 18$ d) $f'''(x) = 6 + 120x^2$
e) $f'''(x) = 3$ f) $f'''(x) = -630x^4$ g) $f'''(x) = -12x^{-6}$ h) $f'''(x) = 0$

131/4 (T) bzw. 127/4 (NT)
Wegen der Potenzregel nimmt bei jedem Summanden, also auch beim führenden, der Exponent jeweils um 1 ab ==> Der Grad nimmt um 1 ab.

132/8 (T) bzw. 128/8 (NT) ***Stoff 12. Klasse...***keine allgemeine Lösung angebbar - machen Sie selbst mal!

Übungsblatt (altes Buch aus Bildungsverlag EINS, 229/1):
a) $f'(x) = 6x + 2$; $f''(x) = 6$ b) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x + 5$; $f''(x) = 12x^2 - 12x + 6$
c) $f'(x) = \frac{1}{6}(6x^2 + 2x - 4)$; $f''(x) = \frac{1}{6}(12x + 2)$ d) $f'(x) = 4x^5 - 3x^3 + x$; $f''(x) = 20x^4 - 9x^2 + 1$
e) $f'(x) = 4x - 2$; $f''(x) = 4$ f) $f'(x) = 12x - 1$; $f''(x) = 12$
g) $f'(x) = 9x^2 + 2(a+1)x - 3a^2$; $f''(x) = 18x + 2(a+1)$ h) $f'(x) = 2{,}5x^4 + (a - 2)x$; $f''(x) = 10x^3 + a - 2$
i) $f'(x) = 6x^5 + 12a^3x^2 - 2a$; $f''(x) = 30x^4 + 24a^3x$ k) $f'(x) = 8ax^3 - 2x$; $f''(x) = 24ax^2 - 2$

Buch Klasse 12:
12/1
a) $f'(x) = 4x - 5$; $f''(x) = 4$; $f'''(x) = 0$
b) $f'(x) = 25x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 40x + 30$; $f''(x) = 100x^3 - 24x^2 + 24x + 40$;
$f'''(x) = 300x^2 - 48x + 24$
c) $f'(x) = -9x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$; $f''(x) = -18x + \frac{1}{2}$; $f'''(x) = -18$
d) $f'(x) = -x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{5}{11}$; $f''(x) = -2x + \frac{4}{5}$; $f'''(x) = -2$
e) $f'(x) = -x^3 - 2x^2 + \frac{4}{9}x - 7$; $f''(x) = -3x^2 - 4x + \frac{4}{9}$; $f'''(x) = -6x - 4$
f) (T) $f'(x) = 16ax^3 - 9x^2 + 5ax - a$; $f''(x) = 48ax^2 - 18x + 5a$; $f'''(x) = 96ax - 18$
(NT) $f'(x) = 2x^3 - 9x^2 + 5x + 10$; $f''(x) = 6x^2 - 18x + 5$; $f'''(x) = 12x - 18$
g) (T) $f'(x) = \frac{5}{2}ax^4 - ax^2 + 5x$; $f''(x) = 10ax^3 - 2ax + 5$; $f'''(x) = 30ax^2 - 2a$
(NT) $f'(x) = 3x^5 - 40x^3 - 18x + 6$; $f''(x) = 15x^4 - 120x^2 - 18$; $f'''(x) = 60x^3 - 240x$

82/2 (T) bzw. 78/2 (NT) (zweiter Teil) a) $g'(x) = 3 - 10x$

130/1 (T) bzw. 126/1 (NT)

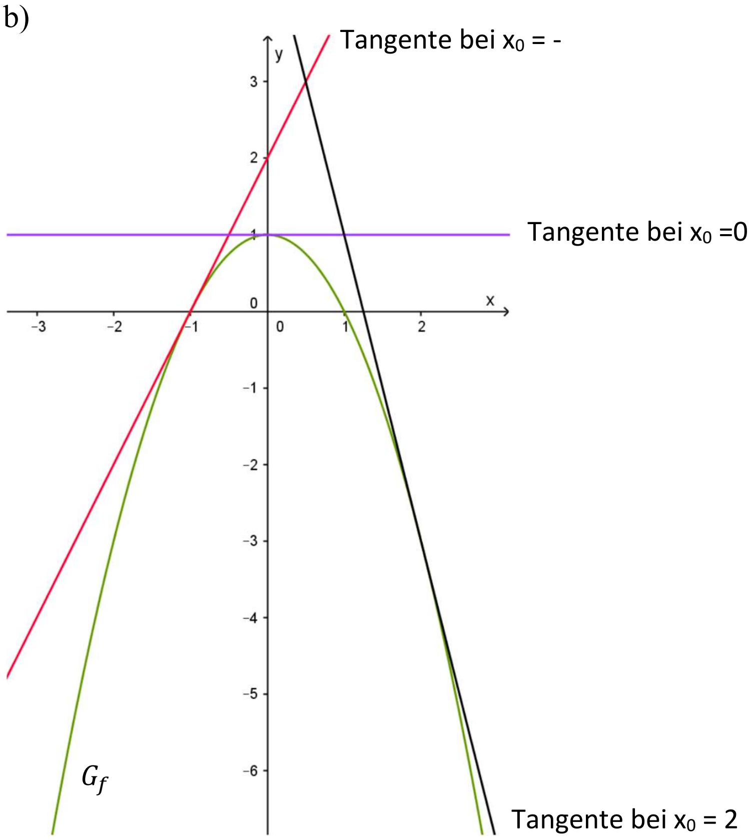
a) f: m = 2 bzw. 0 bzw. –4; y = 2x + 2 bzw. y = 1 bzw. y = –4x + 5

g: m = –3 bzw. –1 bzw. 3; y = –3x – 4 bzw. y = –x – 3 bzw. y = 3x – 7

h: m = 4 bzw. –3 bzw. 1; y = 4x + 6 bzw. y = –3x + 2 bzw. y = x – 6

i: m = –0,5 bzw. –2 bzw. 4; y = –0,5x + 1 bzw. y = –2x bzw. y = 4x –8

b)



130/2 (T) bzw. 126/2 (NT)

a) $x_1 = -0{,}5;\ x_2 = -0{,}25; x_3 = 0;\ x_4 = 0{,}5;\ x_5 = 1$

b) $x_1 = -4;\ x_2 = -3{,}5; x_3 = -3;\ x_4 = -2;\ x_5 = -1$

c) $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3};\ x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}; x_5 = 0;\ -;\ -$

d) $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3};\ x_2 = \pm 1; x_3 = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3};\ x_4 = \pm\sqrt{2};\ x_5 = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$

e) $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{6};\ x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{7}}{6}; x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{3};\ -;\ -$

130/3 (T) a) 10 m/s² b) 100 m/s c) 20 m/s

126/3 (NT)

a) 6; 3; 3,75; 15; 34,6875 b) ??? Ich bin Physiker, kein Ökonom!

126/4 (NT)

a) Die Grenzkosten sind für alle Produktionsmengen gleich, nämlich 5. b) keine

126/5 (NT)

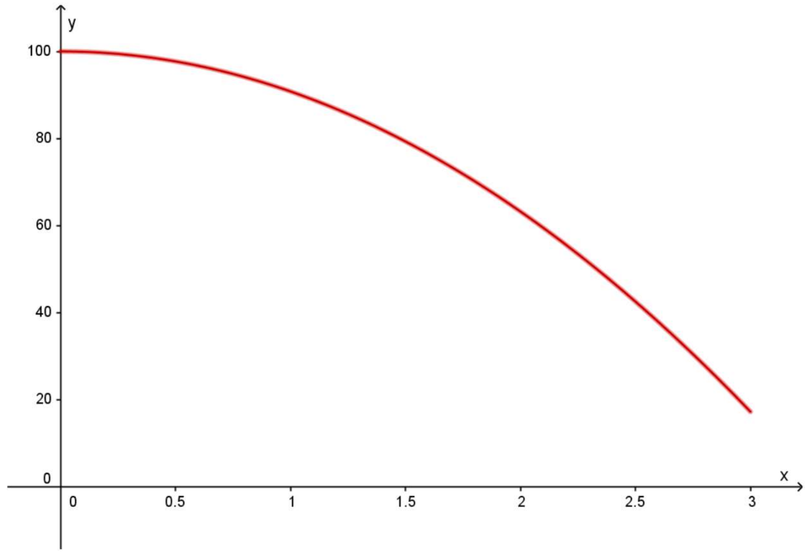
a) 10,25 bzw. 0 b) ??? Ich bin Physiker, kein Ökonom!

131/3 (T) bzw. 127/3 (NT)

t_1: W; t_2: V; t_3: P; t_4: R; t_5: T; t_6: S; t_7: Q; t_8: U

131/5 (T) bzw. 127/5 (NT) ***Zeitvariable wird hier mit x bezeichnet!?!***

a)



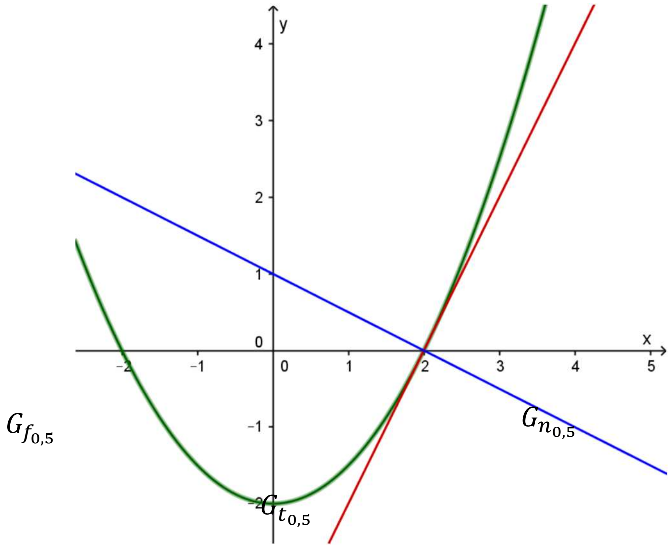
b) 100 m
c) (–)99,36 km/h, d. h. im Schnitt war das Fahrzeug unter der Höchstgeschwindigkeit
d) (–)66,24 km/h bzw. (–)132,48 km/h
e) $v(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(-9{,}2(x_0+h)^2+100)-(-9{,}2{x_0}^2+100)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-18{,}4x_0h-9{,}2h^2}{h} = -18{,}4x_0$
f) unklar, was hier gemeint ist... soll man vielleicht eine Gerade mit Steigung (–)100 km/h einzeichnen und dann schauen, ob der Graph von f steiler verläuft?
g) 0 km/h (d. h. also, das Fahrzeug beschleunigt aus dem Stand in 3 Sekunden (!) von 0 auf knapp 200 km/h, und das auch noch auf die Radarfalle zu (!!!) ... wer denkt sich solche bescheuerten Aufgaben aus?!)

<u>131/6</u> (T) bzw. <u>127/6</u> (NT)
a) 25 m; 40 m; 25 m b) 20 m/s; 10 m/s; –20 m/s
c) $\pm$15 m/s; 1,5 s und 4,5 s d) 6 s; –30 m/s e) 0 m/s; 45 m

<u>132/7</u> (T) bzw. <u>128/7</u> (NT)
a) 12,2%; (–)2,925%; 6,875%; (–)17,8%; 1,2%
b) 10,8%; (–)4,2%; 10,8%; (–)16,2%
c) $x_2 = 8$
d) $x_1 = 2$; $x_2 = 5$; $x_3 = 10$; Höhen: 244 m; 156,25 m; 500 m

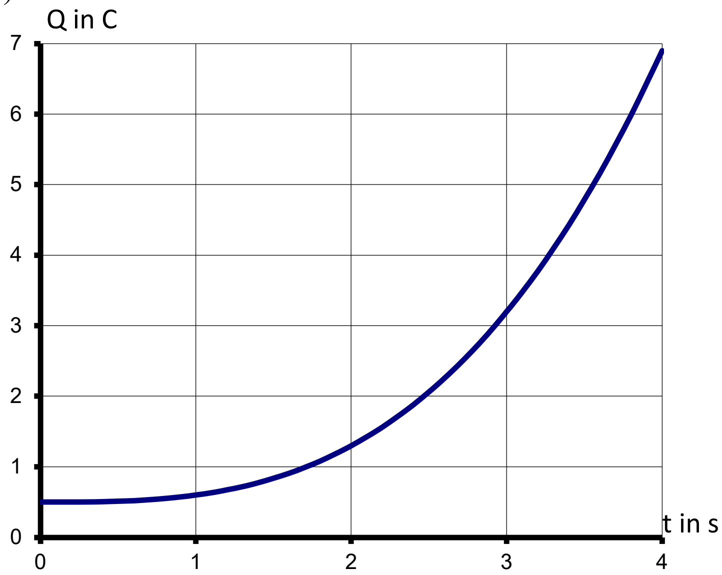
<u>132/10</u> (T) bzw. <u>128/10</u> (NT)
a) (–)10 ℓ pro 100 km
b) (–) $6,\overline{6}$ ℓ pro 100 km
c) Der Benzinverbrauch war zwischen 50 km und 150 km deutlich höher als vorher. Herr Söst ist auf dieser Strecke anscheinend deutlich schneller gefahren, und/oder die Strecke war bergiger.

<u>166/8</u> (nur T) a) $t_a(x) = 4ax - 8a$ b) $n_a(x) = -\frac{1}{4a}x + \frac{1}{2a}$
c)



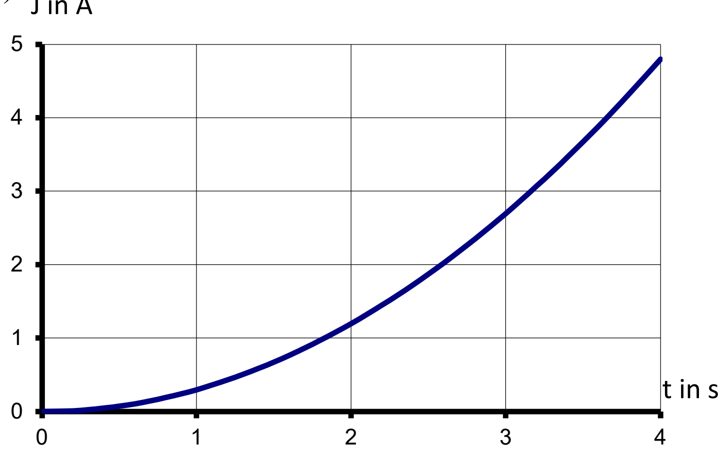
altes Buch (Bildungsverlag EINS):
<u>241/1</u>
a) $v(t) = 2\,\frac{m}{s}$; $a(t) = 0$ b) $v(t) = 10\,\frac{m}{s^2}\cdot t + 10\,\frac{m}{s}$; $a(t) = 10\,\frac{m}{s^2}$ c) $v(t) = v_0 - 9\,\frac{m}{s^2}\cdot t$; $a(t) = -9\,\frac{m}{s^2}$

<u>243/11</u>
a)



b) $J(t) = 0{,}3t^2$

c)



altes NT-Buch Klasse 12 (winklers-Verlag):

29/1 a) $P_{1,2}\left(\pm\sqrt{3} \mid \mp\sqrt{3}\right)$ b) $P_1(0|1)$; $P_2(2|0)$ c) $P_1(-3|4)$; $P_2\left(-\frac{1}{3}\middle|-5\frac{13}{27}\right)$ d) $P_1(0|0)$; $P_2(4|0)$; $P_3(2|16)$

30/2 a) $P_1\left(1\middle|\frac{4}{3}\right)$; $P_2\left(-1\middle|-\frac{10}{3}\right)$ b) $P(-2|-2)$

30/3 a) $P(1{,}5|1)$ b) $P(3|5)$

III.4 Weitere Ableitungsregeln

Buch Klasse 12!

a) Ableitung von Verkettungen

82/3 (T) bzw. 78/3 (NT)   c) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}\right)$

93/3 (T) bzw. 89/3 (NT)
Überprüfen: Klammern ausmultiplizieren, dann mit Summen- und Faktorregel ableiten
a) $f'(x) = 8x - 20$ d) $f'(x) = 2\,(1+2x)^2$
b) $f'(x) = 32x - 48$ e) $f'(x) = 3\,(x+2)^3$
c) $f'(x) = -0{,}5x - 1$ f) $f'(x) = 3\,(x-2)^2$

93/7 (T) bzw. 89/7 (NT)   keine allgemeine Lösung angebbar; machen Sie mal!

94/5 (T) bzw. 90/5 (NT)
a) $k'(x) = 2\cos(2x)$ b) $l'(x) = -3\sin(3x)$ c) $q'(x) = 2x\cdot\cos(x^2-3)$

94/7 (T) bzw. 90/7 (NT)   Denis und Ferhat liegen beide richtig

Übungsblatt (Lambacher-Schweizer Analysis 2 S. 195f):
11) a) $4+8x$ b) $-3\,(x-3)^2$ c) $2\,(x+x^2)\,(1+2x)$ d) $12x^2\,(1+x^3)^3$ e) $4\,(x^3-2x)^3\,(3x^2-2)$
f) $3\,(5x+x^2)^2\,(5+2x)$ g) $2\,(t^3-4t^2)\,(3t^2-8t)$ h) $-12t^2\,(a^3-t^3)^3$ i) $3\,(2-3x+x^2)^2\,(-3+2x)$
j) $(1-x+0{,}5x^3)\,(3x^2-2)$ k) $4\,(-0{,}5a^2+a\sqrt{2}\,)^3\,(-a+\sqrt{2}\,)$ l) $3\,(x\sqrt{2}-x^2)^2\,(\sqrt{2}-2x)$

b) Ableitung von Produkten
23/3
a) wahr (Bei einer einfachen Nullstelle von f schneidet der Graph von f die x-Achse „steil", also mit einer Steigung ungleich 0, also ist f ' dort ungleich 0. Alternativ mit Produktregel nachrechnen:
$f(x) = (x-x_0)\cdot g(x)$ mit $g(x_0)\neq 0$ ==> $f'(x) = g(x) + (x-x_0)\cdot g'(x)$ ==> $f'(x_0) = g'(x_0) \neq 0$)
b) wahr (Bei einer doppelten Nullstelle von f berührt der Graph von f die x-Achse, hat dort also einen ExP, also muss f ' dort eine Nullstelle mit VZW haben. Diese könnte natürlich auch 3fach, 5fach, ... sein; dass sie wirklich einfach ist, kann man mit der Produktregel nachrechnen:
$f(x) = (x-x_0)^2\cdot g(x)$ mit $g(x_0)\neq 0$
==> $f'(x) = 2(x-x_0)\cdot g(x) + (x-x_0)^2\cdot g'(x) = (x-x_0)\cdot\big(2\,g(x) + (x-x_0)\cdot g'(x)\big)$,
also $f'(x) = (x-x_0)\cdot h(x)$ mit $h(x) = 2\,g(x) + (x-x_0)\cdot g'(x)$, also $h(x_0) = 2\,g(x_0)\neq 0$)
c) falsch (Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 + 1$ ==> $f'(x) = 2x$ hat die einfache Nullstelle $x_1 = 0$, aber f hat offensichtlich *nicht* die doppelte Nullstelle $x_{1,2} = 0$.)

82/2 (T) bzw. 78/2 (NT) (zweiter Teil)   c) $g'(x) = 1 - x^{-2}$ d) $g'(x) = \frac{1}{(3x+1)^2}$

82/3 (T) bzw. 78/3 (NT)
d) $f'(x) = 2\,(3x+5)\cdot 3\cdot(6-2x)^2 + (3x+5)^2\cdot 2\,(6-2x)\cdot(-2)$
$= 6\,(3x+5)(6-2x)^2 - 4\,(3x+5)^2\,(6-2x)$
$= 2\,(3x+5)(6-2x)\,[3(6-2x) - 2(3x+5)]$
$= 2\,(3x+5)(6-2x)\,[8-12x] = 16\,(3x+5)(3-x)\,(2-3x)$

86/4 (T) bzw. 82/4 (NT)
c) Produkt; $x_1 = 0$
$f'(x) = 1\cdot(2x^2+3) + x\cdot 4x = 6x^2 + 3$; $-$
$f''(x) = 12x$; $x_1 = 0$
94/1 (T) bzw. 90/1 (NT)
a) $f'(x) = 5x^4 + 15x^2 - 2x$ b) $f'(x) = 6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1$

Übungsblatt (Lambacher-Schweizer Analysis 2):

189/4 a) $f'(x) = ... = 15x^4 - 4x^3 - 6x + 1$ b) $f(x) = 3x^5 - 3x^2 - x^4 + x \Rightarrow f'(x) = 15x^4 - 4x^3 - 6x + 1$

189/5 a) $-12x + 1$ b) $5x^4 - 12x^2 + 2x$ c) $-1{,}2x^2 + 1{,}6x + 2$ d) $-12t^3 - 3t^2 + 6t + 1$ e) $-4x^3 + 2x$ f) $4r^3 + 4r$

189/14 a) $f'(x) = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)$

b) $\dfrac{u'vw + uv'w + uvw'}{uvw} = \dfrac{u'vw}{uvw} + \dfrac{uv'w}{uvw} + \dfrac{uvw'}{uvw} = \dfrac{u'}{u} + \dfrac{v'}{v} + \dfrac{w'}{w}$

für $f(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x)$: $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{u'_1}{u_1} + \dfrac{u'_2}{u_2} + \ldots + \dfrac{u'_n}{u_n}$

195/16 a) $(3x + 4)(18x + 2)$ b) $(5 - 4x)^2 (16x - 17)$ c) $(1{,}5x + 6)(5 - 0{,}4x)(-2{,}4x + 10{,}2)$ d) $(x - x^2)^2 (1 + 3x)(-24x^2 + 9x + 3)$

III.5 Differenzierbarkeit

121/7 (T) bzw. 117/7 (NT)
f ist bei $x = 1$ nicht differenzierbar, weil die Steigung „von links" gleich 2 ist, „von rechts" aber gleich 1, es gibt also keine eindeutige (Tangenten-)Steigung. Anschaulich: Dort ist ein Knick im Graph.