

# Aussagen und Aussageformen

## a) Begriffe

Eine Aussage ist in der Mathematik allgemein etwas, das wahr oder falsch sein kann.

Beispiele:

- „5 ist eine ungerade Zahl“
- „Hans ist ein männlicher Vorname“
- „ $3 = 5$ “

Aussagen werden mit  $p, q, r, \dots$  (oder auch  $A_1, A_2, \dots$ ) bezeichnet.

Eine Aussageform ist eine Aussage, die Variablen enthält. Ihre Wahrheit hängt i. A. davon ab, was für die Variablen eingesetzt wird.

Beispiele:

- „ $x$  ist eine ungerade Zahl“
- „ $x$  ist ein männlicher Vorname“
- „ $x < 5$ “

Es gibt aber auch Aussageformen, die immer wahr oder immer falsch sind, z. B.

- „ $x$  ist gerade, aber nicht durch 2 teilbar“ (immer )
- „ $x = x$ “ (immer )
- „Zwei Zahlen  $x$  und  $y$  sind immer entweder gleich oder ungleich.“ (immer )

Aussageformen werden mit  $p(x), q(x,y), \dots$  (oder  $A_1(x), \dots$ ) bezeichnet (sprich: „ $p$  von  $x$ “ usw.).

Setzt man etwas ein, so schreibt man entsprechend z. B.  $p(1)$ .

Beispiel:  $p(x)$ : „ $x < 5$ “

Dann gilt:

- $p(1)$ : „ $1 < 5$ “ (  )
- $p(4,9)$ : „ $4,9 < 5$ “ (  )
- $p(5)$ : „ $5 < 5$ “ (  )

## b) Verknüpfung von Aussagen

- „und“-Verknüpfung:  $p \wedge q$  ( $p$  und  $q$  gelten gleichzeitig)
- „oder“-Verknüpfung:  $p \vee q$  ( $p$  oder  $q$  (oder beide!) gelten) (*einschließendes oder*)

Beispiel:  $p(x)$ : „ $x$  ist gerade“,  $q(x)$ : „ $x$  ist eine Primzahl“; dann gilt:

- $p(x) \wedge q(x)$ : „ $x$  ist eine gerade Primzahl“ (wahr nur für  $x =$  ) und
- $p(x) \vee q(x)$ : „ $x$  ist gerade oder eine Primzahl“ (wahr für  $x =$  )

- Gegenteil einer Aussage  $p$ :  $\neg p$  („nicht  $p$ “)

Beispiel: Wenn  $p(x)$ : „ $x$  ist eine gerade Zahl“ ist, dann ist  $\neg p(x)$ : „ $x$  ist eine  Zahl“.

- „daraus folgt“-Verknüpfung: Man sagt, dass aus einer Aussage(form)  $p$  eine andere Aussage(form)  $q$  folgt, wenn man  $q$  aus  $p$  logisch herleiten kann.

Kurz schreibt man dafür „ $p \Rightarrow q$ “ oder auch „ $q \Leftarrow p$ “

(*die Richtung des Pfeils ist egal, solange er nur von  $p$  zu  $q$  zeigt*)

Anmerkung: Man sagt auch, dass die Gültigkeit von  $p$  „hinreichend“ für die Gültigkeit von  $q$  ist; andererseits ist dann die Gültigkeit von  $q$  „notwendig“ für die Gültigkeit von  $p$ .

Beispiele:

- „Hans ist ein männlicher Vorname“  $\Rightarrow$  „Hans ist ein Vorname“
- „ $x$  ist eine Zahl“  $\Leftarrow$  „ $x$  ist eine Primzahl“
- „ $x = 1$ “  $\Rightarrow$  „ $2x = 2$ “
- „ $0 = 1$ “  $\Rightarrow$  „ $1 = 2$ “

**Beachte:** Wie das letzte Beispiel zeigt, muss die Aussage p nicht wahr sein! Es geht hier nur darum, dass die Aussage q aus der Aussage p folgt!

- Äquivalenz: Man nennt zwei Aussage(forme)n p und q äquivalent zueinander, wenn q aus p folgt und gleichzeitig auch p aus q, also  $p \Rightarrow q$  und  $q \Rightarrow p$ ; kurz:  $p \Leftrightarrow q$ .

Beispiel: aus „ $x = 1$ “ folgt „ $2x = 2$ “, andererseits folgt aus „ $2x = 2$ “ aber auch „ $x = 1$ “

Also gilt: „ $x = 1$ “  $\Leftrightarrow$  „ $2x = 2$ “

(Der Begriff „Äquivalenz“ kommt übrigens von den lateinischen Wörtern *lat. aequus = gleich und vales = wertig*, heißt zu Deutsch also „Gleichwertigkeit“.)