Aussagen und Aussageformen

a) Begriffe

Eine Aussage ist in der Mathematik allgemein etwas, das wahr oder falsch sein kann.
Beispiele:

- „5 ist eine ungerade Zahl"
- „Hans ist ein männlicher Vorname"
- „3 = 5"

Aussagen werden mit p, q, r, ... (oder auch A_1, A_2, ...) bezeichnet.

Eine Aussageform ist eine Aussage, die Variablen enthält. Ihre Wahrheit hängt i. A. davon ab, was für die Variablen eingesetzt wird.
Beispiele:

- „x ist eine ungerade Zahl"
- „x ist ein männlicher Vorname"
- „x < 5"

Es gibt aber auch Aussageformen, die immer wahr oder immer falsch sind, z. B.

- „x ist gerade, aber nicht durch 2 teilbar" (immer)
- „x = x" (immer)
- „Zwei Zahlen x und y sind immer entweder gleich oder ungleich." (immer)

Aussageformen werden mit p(x), q(x,y), ... (oder $A_1(x)$, ...) bezeichnet (sprich: „p von x" usw.).
Setzt man etwas ein, so schreibt man entsprechend z. B. p(1).
Beispiel: p(x): „x < 5"
Dann gilt:

p(1): „1 < 5" ( )
p(4,9): „4,9 < 5" ( )
p(5): „5 < 5" ( )

b) Verknüpfung von Aussagen

- „und"-Verknüpfung: $p \wedge q$ (p und q gelten gleichzeitig)
- „oder"-Verknüpfung: $p \vee q$ (p oder q (oder beide!) gelten) (*einschließendes oder*)

Beispiel: p(x): „x ist gerade", q(x): „x ist eine Primzahl"; dann gilt:
$p(x) \wedge q(x)$: „x ist eine gerade Primzahl" (wahr nur für x =) und
$p(x) \vee q(x)$: „x ist gerade oder eine Primzahl" (wahr für x =)

- Gegenteil einer Aussage p: $\neg p$ („nicht p")

Beispiel: Wenn p(x): „x ist eine gerade Zahl" ist, dann ist $\neg p(x)$: „x ist eine Zahl".

- „daraus folgt"-Verknüpfung: Man sagt, dass aus einer Aussage(form) p eine andere Aussage(form) q folgt, wenn man q aus p logisch herleiten kann.
  Kurz schreibt man dafür „$p \Rightarrow q$" oder auch „$q \Leftarrow p$"
  (*die Richtung des Pfeils ist egal, solange er nur von p zu q zeigt*)
  Anmerkung: Man sagt auch, dass die Gültigkeit von p „hinreichend" für die Gültigkeit von q ist; andererseits ist dann die Gültigkeit von q „notwendig" für die Gültigkeit von p.

Beispiele:

- „Hans ist ein männlicher Vorname" $\Rightarrow$ „Hans ist ein Vorname"
- „x ist eine Zahl" $\Leftarrow$ „x ist eine Primzahl
- „x = 1" $\Rightarrow$ „2x = 2"
- „0 = 1" $\Rightarrow$ „1 = 2"

Beachte: Wie das letzte Beispiel zeigt, muss die Aussage p nicht wahr sein! Es geht hier nur darum, dass die Aussage q aus der Aussage p folgt!

- Äquivalenz: Man nennt zwei Aussage(forme)n p und q äquivalent zueinander, wenn q aus p folgt und gleichzeitig auch p aus q, also p $\Rightarrow$ q und q $\Rightarrow$ p; kurz: p $\Leftrightarrow$ q.
  Beispiel: aus „x = 1“ folgt „2x = 2“, andererseits folgt aus „2x = 2“ aber auch „x = 1“
  Also gilt: „x = 1“ $\Leftrightarrow$ „2x = 2“

(*Der Begriff „Äquivalenz“ kommt übrigens von den lateinischen Wörtern lat. aequus = gleich und vales = wertig, heißt zu Deutsch also „Gleichwertigkeit“*.)