Aufstellen von Funktionstermen

1. zunächst die allgemeine Form des Funktionsterms hinschreiben:
   Grad 3: $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$; Grad 4: $f(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$; usw.

   wenn Grad „kleinstmöglich“, beachte: eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen, n-1 Extremstellen, n-2 Wendestellen
   wenn also z. B. gegeben ist, dass die Funktion zwei Wendestellen haben soll, so muss sie mindestens vom Grad 4 sein; da „kleinstmöglich“ verlangt ist, muss der Grad also genau 4 sein

   wenn eine Ableitungsfunktion gegeben ist: erst mal aufleiten (Stammfunktion finden, wie bei der Integralrechnung); dabei beachten: hinten muss immer eine Konstante addiert werden!
   z. B. $f''(x) = 12\,x^2 + 6\,x + 2 \Rightarrow f'(x) = 4\,x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + a \Rightarrow f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + a\,x + b$

2. wenn gegeben: Symmetrie ausnutzen!
   Graph symmetrisch zur y-Achse ➔ nur gerade Potenzen
   Graph symmetrisch zum Ursprung ➔ nur ungerade Potenzen
   z. B. Grad 4, Graph symmetrisch zur y-Achse: $f(x) = a\,x^4 + c\,x^2 + e$

3. Ableitungen berechnen (wenn nur Hoch-/Tief-/Extrempunkte und/oder Steigungen gegeben sind, genügt die erste Ableitung; wenn auch Wende-/Terrassenpunkte gegeben sind, braucht man zwei)

4. Punkte und andere Bedingungen einsetzen

a) allgemeiner Punkt: nur eine Gleichung für f(x) (= y-Wert); z. B. $P(1|2) \Rightarrow f(1) = 2$

b) Hoch-/Tief-/Extrempunkt: eine Gleichung für f(x) (= y-Wert), eine für f ’(x) (= 0)
   z. B. $HoP(2|3) \Rightarrow f(2) = 3$ und $f'(2) = 0$

c) Wendepunkt: eine Gleichung für f(x) (= y-Wert), eine für f ’’(x) (= 0)
   z. B. $WeP(-1|1) \Rightarrow f(-1) = 1$ und $f''(-1) = 0$

d) Terrassenpunkt: eine Gleichung für f(x) (= y-Wert), eine für f ’(x) (= 0) und eine für f ’’(x) (= 0); z. B. $TeP(-2|-1) \Rightarrow f(-2) = -1$ und $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = 0$

e) Steigung: eine Gleichung für f ’(x)
   z. B. „der Graph hat bei x = 2 die Steigung –1“ ➔ $f'(2) = -1$
   Spezialfälle: „der Graph verläuft parallel zur Geraden mit der Gleichung ...“ bzw. „parallel zur 1. / 2. Winkelhalbierenden“; hier liest man aus der Geradengleichung die Steigung ab (bei den Winkelhalbierenden ist die Steigung 1 bzw. –1)

f) Wendestelle und Wendetangente: Gleichung der Wendetangente (wenn nötig) nach y umstellen, daraus den y-Wert des Wendepunkts berechnen und die Steigung ablesen; daraus dann eine Gleichung für f(x) (= y-Wert) und eine für f ’(x) (= Steigung)
   z. B. Wendestelle 1, Wendetangente $3\,x + 2\,y = 4 \Rightarrow y = -1{,}5\,x + 2$
   $\Rightarrow y_W = -1{,}5\cdot 1 + 2 = 0{,}5$ und $m = -1{,}5 \Rightarrow f(1) = 0{,}5$ und $f'(1) = -1{,}5$

g) G_f schneidet G_g in einem Punkt: $f(x) = g(x)$
   G_f berührt G_g in einem Punkt / hat dieselbe Tangente: $f(x) = g(x)$ und $f'(x) = g'(x)$

5. lineares Gleichungssystem aufstellen; z. B. folgt
   - aus $f(x) = a\,x^4 + c\,x^2 + e$ und $f(1) = 2$ die Gleichung $a + c + e = 2$
   - aus $f'(x) = 4\,a\,x^3 + 2\,c\,x$ und $f'(2) = 0$ die Gleichung $32\,a + 4\,c = 0$

6. Gleichungssystem lösen (Vorsicht: man muss genauso viele Gleichungen wie unbekannte Variablen haben; hat man weniger Gleichungen, so hat man in Schritt 4 Bedingungen vergessen!)

7. Funktionsterm hinschreiben; z. B. hat man für $f(x) = a\,x^4 + c\,x^2 + e$ und $a = 2$, $c = -0{,}5$ und $e = 3$ den Term

$$f(x) = 2\,x^4 - 0{,}5\,x^2 + 3$$