<u>Aufgabentypen zum Hypothesentest</u>

Oft nimmt man von einer Größe an, dass sie einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt; wir beschränken uns hier auf den Fall, dass diese <u>Testgröße</u> T mit einer bestimmten Trefferwahrscheinlichkeit p binomialverteilt ist.

Um das zu überprüfen, untersucht man eine gewisse Anzahl von Fällen (eine <u>Stichprobe</u>, diese sollte möglichst repräsentativ sein!). Werden dann Abweichungen vom zum erwartenden Wert dieser Größe beobachtet, so muss man entscheiden, ob sie rein zufällig sind („statistische Schwankung“: bei binomialverteilten Größen muss ja nicht immer der Erwartungswert auftreten, sondern prinzipiell können alle möglichen Werte auftreten!) oder ob sie darauf hindeuten, dass die angenommene Trefferwahrscheinlichkeit falsch ist („signifikante Abweichung“).

Die Annahme „die Abweichung ist rein zufällig, d. h. die angenommene Wahrscheinlichkeit stimmt“ bezeichnet man als <u>Nullhypothese</u> H_0; die Annahme „die Abweichung ist signifikant, d. h. die Wahrscheinlichkeit ist in Wirklichkeit wohl anders“ als <u>Gegenhypothese</u> H_1. Um zu überprüfen, welche Hypothese stimmt, führt man einen <u>Signifikanztest</u> durch. Wir machen hier nur <u>einseitige</u> Signifikanztests (und auch die nur für binomialverteilte Größen): bei einem <u>linksseitigen</u> Signifikanztest lautet die Gegenhypothese „die Wahrscheinlichkeit ist kleiner als die angenommene“, bei einem <u>rechtsseitigen</u> „die Wahrscheinlichkeit ist größer als die angenommene“.

Um zu überprüfen, ob die Nullhypothese stimmt, berechnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beobachtete Abweichung rein zufällig ist. Dafür berechnet man die Wahrscheinlichkeit, dass der beobachtete Wert zufällig auftrat; da es sich hier um eine Binomialverteilung handelt, kann man diesen Wert im Tafelwerk einfach nachschauen. Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der beobachtete Wert auftritt, z. B. nur 1% ist, ist es sehr unwahrscheinlich, dass die Abweichung rein zufällig ist; man kann die Nullhypothese dann also ablehnen. Allerdings ist es nicht **sicher**, dass die Nullhypothese falsch ist – die Abweichung könnte doch rein zufällig sein (mit einer Wahrscheinlichkeit von 1%). Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese **irrtümlich** abgelehnt wird (die <u>Irrtumswahrscheinlichkeit</u>), hier 1%. Dies ist immer so: die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese irrtümlich abzulehnen (man nennt dies auch einen <u>Fehler 1. Art</u> oder <u>α-Fehler</u>), ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die beobachtete Abweichung rein zufällig ist, dass der beobachtete Wert also rein zufällig auftritt. Formelmäßig ist die Irrtumswahrscheinlichkeit also:

linksseitiger Signifikanztest	rechtsseitiger Signifikanztest
α' = Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert kleiner gleich k auftritt = $P(T \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$	α' = Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert größer gleich k+1 auftritt = $P(T \geq k+1) = 1 - P(T \leq k)$ $= 1 - \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$

(dass man beim rechtsseitigen Test k+1 verwendet statt k, ist üblich, aber nicht zwingend – macht das Nachschauen im Tafelwerk einfacher!)

Die Nullhypothese irrtümlich anzunehmen, obwohl sie falsch ist (man nimmt also an, dass die Abweichung rein zufällig ist, obwohl sie das nicht ist), bezeichnet man als einen <u>Fehler 2. Art</u> oder <u>β-Fehler</u>. Die Wahrscheinlichkeit dafür kann aber nicht so leicht bestimmt werden – wird auch in Aufgaben nie verlangt!

Meist will man aber auch nicht die Irrtumswahrscheinlichkeit α' für eine vorgegebene beobachtete Abweichung wissen, sondern man will wissen, welche Werte beobachtet werden müssen, damit man die Nullhypothese mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit (dem Signifikanzniveau) ablehnen kann; man spricht hier auch davon, die Entscheidungsregel zu ermitteln. Man muss dann also den Wert von k ermitteln, für den die Irrtumswahrscheinlichkeit α' kleiner oder gleich dem vorgegebenen Signifikanzniveau α ist:

$$\alpha' \leq \alpha$$

Für α' kann man einfach die obigen Formeln verwenden; man muss dann mit Hilfe des Tafelwerks diejenigen Wert von k ermitteln, für die diese Ungleichung erfüllt ist. Der Ablehnungsbereich enthält alle diese k-Werte; der Annahmebereich enthält die übrigen möglichen Werte. Also:

linksseitiger Signifikanztest	rechtsseitiger Signifikanztest
$P(\overline{A}) = P(T \leq k) \leq \alpha$ muss gelten, also $\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i) \leq \alpha$ Man schaut im Tafelwerk nach, für welche Werte von k dies gilt.	$P(\overline{A}) = P(T \geq k+1) \leq \alpha$ muss gelten, also $1 - \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i) \leq \alpha$, also $\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i) \geq 1 - \alpha$ Man schaut im Tafelwerk nach, für welche Werte von k dies gilt.
Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0, ..., k\}$	$\overline{A} = \{k+1, ..., n\}$
Annahmebereich: $A = \{k+1, ..., n\}$	$A = \{0, ..., k\}$

nochmals ganz kurz zusammengefasst:

Es gilt immer $\alpha' = P(\overline{A})$. Ob $\overline{A}$ der linke oder der rechte Teil von Ω ist, liest man an H_1 ab.

Im einen Aufgabentyp ist $\overline{A}$ vorgegeben, und α' soll berechnet werden; im anderen Aufgabentyp ist ein α vorgegeben, und man muss $\overline{A}$ so ermitteln, dass $\alpha' \leq \alpha$ ist.