Zusammengesetzte Funktionen – Anzahl besonderer Stellen

Typ 0: $f(x) = a\, e^{c(x-d)} + y_0$

1. keine Nullstellen, wenn $y_0/a \geq 0$; ansonsten eine 2. keine Extremstellen 3. keine Wendestellen

Begründungen:

1. $a\, e^{c(x-d)} + y_0 = 0 \Leftrightarrow e^{c(x-d)} = -y_0/a$
   Diese Gleichung hat nur dann eine Lösung, wenn die rechte Seite > 0 ist (denn nur dann kann man von der rechten Seite den Logarithmus nehmen), also $-y_0/a > 0$ ist. Für $y_0/a \geq 0$ ist die rechte Seite dagegen ≤ 0, also gibt es keine Lösung.
2. $f'(x) = a\, c\, e^{c(x-d)}$ ist immer ungleich 0
3. $f''(x) = a\, c^2\, e^{c(x-d)}$ ist immer ungleich 0

Typ 1: $f(x) = h(e^x)$ mit h ganzrational, Grad n (nur T-Zweig!)

1. höchstens n Nullstellen
2. höchstens n–1 Extremstellen
3. höchstens n–1 Wendestellen

insbesondere im Lehrplan: h ist quadratisch ➔ höchstens 2 Nullstellen, 1 Extremstelle, 1 Wendestelle

Begründungen:

1. Substituiere $u = e^x$ ➔ aus f(x) = 0 wird h(u) = 0; da h eine ganzrationale Funktion vom Grad n ist, hat die letztere Gleichung höchstens n Lösungen $u_1, u_2, \ldots, u_n$; Resubstitution $e^x = u$ ergibt also höchstens n Gleichungen, von denen jede einzelne jeweils höchstens eine Lösung hat (denn wenn ein Wert von $u \leq 0$ ist, gibt es ja keine Lösung) ➔ höchstens n Lösungen für x
2. $f'(x) = h'(e^x) \cdot e^x$ (Kettenregel!); da $e^x \neq 0$ ist, ist $f'(x) = 0$ gleichbedeutend mit $h'(e^x) = 0$, und nach Substitution $u = e^x$ hat man dann $h'(u) = 0$. Da h eine ganzrationale Funktion vom Grad n war, ist h‘ eine ganzrationale Funktion vom Grad n–1. Also hat $h'(u)$ höchstens n–1 Lösungen, und daraus folgt wie eben, dass $f'(x) = 0$ höchstens n–1 Lösungen hat.
3. Mit Produkt- und Kettenregel ergibt sich
   $$f''(x) = (h''(x) \cdot e^x) \cdot e^x + h'(x) \cdot e^x = (h''(x) \cdot e^x + h'(x)) \cdot e^x$$
   Wegen $e^x \neq 0$ ist $f''(x) = 0$ gleichbedeutend mit $h''(e^x) \cdot e^x + h'(e^x) = 0$. Mit der Substitution $u = e^x$ folgt $h''(u) \cdot u + h'(u) = 0$. Da h eine ganzrationale Funktion vom Grad n war, ist h‘ eine ganzrationale Funktion vom Grad n–1 und h‘‘ eine ganzrationale Funktion vom Grad n–2. Also ist $h''(u) \cdot u + h'(u)$ insgesamt eine ganzrationale Funktion vom Grad n–1. Die Gleichung $h''(u) \cdot u + h'(u) = 0$ hat also höchstens n–1 Lösungen, und daraus folgt wie eben, dass $f''(x) = 0$ höchstens n–1 Lösungen hat.

Typ 2: $f(x) = g(x)e^{h(x)} + y_0$ mit g, h ganzrational, Grad m bzw. n

1. für $y_0 = 0$ höchstens m Nullstellen; für $y_0 \neq 0$ höchstens m+n Nullstellen
2. höchstens m+n–1 Extremstellen
3. höchstens m+2(n–1) Wendestellen

insbesondere im Lehrplan:

- g linear, h linear: höchstens 1 Nullstelle ($y_0 = 0$) bzw. höchstens 2 Nullstellen ($y_0 \neq 0$); höchstens 1 Extremstelle; höchstens 1 Wendestelle
- g quadratisch, h linear: höchstens 2 Nullstellen ($y_0 = 0$) bzw. höchstens 3 Nullstellen ($y_0 \neq 0$); höchstens 2 Extremstellen; höchstens 2 Wendestellen
- g linear, h quadratisch: höchstens 1 Nullstelle ($y_0 = 0$) bzw. höchstens 3 Nullstellen ($y_0 \neq 0$); höchstens 2 Extremstellen; höchstens 3 Wendestellen
- g quadratisch, h quadratisch: höchstens 2 Nullstellen ($y_0 = 0$) bzw. höchstens 4 Nullstellen ($y_0 \neq 0$); höchstens 3 Extremstelle; höchstens 4 Wendestellen

Begründungen:

1. Für $y_0 = 0$ hat man einfach $g(x)e^{h(x)} = 0$. Wegen $e^{h(x)} \neq 0$ bleibt davon nur $g(x) = 0$. Weil g eine ganzrationale Funktion vom Grad m ist, hat diese Gleichung höchstens m Lösungen.
   Für $y_0 \neq 0$ muss man komplizierter argumentieren: Damit man die maximal mögliche Anzahl an Nullstellen hat, muss die x-Achse jeweils in allen Intervallen zwischen den Extremstellen und zusätzlich noch in den beiden Intervallen „außerhalb'' der Extremstellen geschnitten werden; zwischen je zwei Extremstellen kann die x-Achse aber jeweils nur höchstens einmal geschnitten werden. Es gibt aber laut 2. höchstens m+n–1 Extremstellen, also gibt es insgesamt höchstens m+n solcher Intervalle, also hat f höchstens m+n Nulllstellen.
2. Mit der Produkt- und Kettenregel folgt
   $$f'(x) = g'(x) \cdot e^{h(x)} + g(x) \cdot e^{h(x)} \cdot h'(x) = (g'(x) + g(x) \cdot h'(x)) \cdot e^{h(x)}$$
   Wegen $e^{h(x)} \neq 0$ führt $f'(x) = 0$ also auf $g'(x) + g(x) \cdot h'(x) = 0$. Hier ist h‘ eine ganzrationale Funktion vom Grad n–1, und deshalb ist $g(x) \cdot h'(x)$ vom Grad m+n–1 (weil laut Potenzregel $x^m \cdot x^{n-1} = x^{n+n-1}$ ist). Außerdem ist g‘ eine ganzrationale Funktion vom Grad m – 1, was sicher kleiner als m+n–1 ist. Beim Addieren zweier ganzrationaler Funktionen von verschiedenem Grad ergibt sich sicher eine ganzrationale Funktion mit dem größeren Grad, also ist $g'(x) + g(x) \cdot h'(x)$ auch vom Grad m+n–1. Damit hat die Gleichung $g'(x) + g(x) \cdot h'(x) = 0$ höchsten m+n–1 Lösungen.
3. Mit der Produkt- und Kettenregel folgt
   $$f''(x) = \cdots = (g''(x) + 2g'(x) \cdot h'(x) + g(x) \cdot h''(x) + g(x) \cdot (h'(x))^2) \cdot e^{h(x)}$$
   Wieder verwendet man $e^{h(x)} \neq 0$, und wie bei 2. argumentiert man, dass $g''(x) + 2g'(x) \cdot h'(x) + g(x) \cdot h''(x) + g(x) \cdot (h'(x))^2$ eine ganzrationale Funktion vom Grad m+2(n–1) ist.