Zusammengesetzte Funktionen – Anzahl besonderer Stellen

Typ 0: $f(x) = a\, e^{c(x-d)} + y_0$

1. keine Nullstellen, wenn $y_0/a \geq 0$; ansonsten eine 2. keine Extremstellen 3. keine Wendestellen

Begründungen:

1. $a\, e^{c(x-d)} + y_0 = 0 \Leftrightarrow e^{c(x-d)} = -y_0/a$
   Diese Gleichung hat nur dann eine Lösung, wenn die rechte Seite > 0 ist (denn nur dann kann man von der rechten Seite den Logarithmus nehmen), also $-y_0/a > 0$ ist. Für $y_0/a \geq 0$ ist die rechte Seite dagegen ≤ 0, also gibt es keine Lösung.
2. $f'(x) = a\, c\, e^{c(x-d)}$ ist immer ungleich 0
3. $f''(x) = a\, c^2\, e^{c(x-d)}$ ist immer ungleich 0

Typ 1: $f(x) = h(e^x)$ mit h ganzrational, Grad n (nur T-Zweig!)

1. höchstens n Nullstellen
2. höchstens n–1 Extremstellen
3. höchstens n–1 Wendestellen

insbesondere im Lehrplan: h ist quadratisch ➔ höchstens 2 Nullstellen, 1 Extremstelle, 1 Wendestelle

Begründungen:

1. Substituiere $u = e^x$ ➔ aus f(x) = 0 wird h(u) = 0; da h eine ganzrationale Funktion vom Grad n ist, hat die letztere Gleichung höchstens n Lösungen $u_1, u_2, \ldots, u_n$; Resubstitution $e^x = u$ ergibt also höchstens n Gleichungen, von denen jede einzelne jeweils höchstens eine Lösung hat (denn wenn ein Wert von u ≤ 0 ist, gibt es ja keine Lösung) ➔ höchstens n Lösungen für x
2. $f'(x) = h'(e^x)\cdot e^x$ (Kettenregel!); da $e^x \neq 0$ ist, ist $f'(x) = 0$ gleichbedeutend mit $h'(e^x) = 0$, und nach Substitution $u = e^x$ hat man dann $h'(u) = 0$. Da h eine ganzrationale Funktion vom Grad n war, ist h' eine ganzrationale Funktion vom Grad n–1. Also hat h'(u) höchstens n–1 Lösungen, und daraus folgt wie eben, dass f'(x) = 0 höchstens n–1 Lösungen hat. Insbesondere: Ist h quadratisch, also $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$ und existiert eine Lösung, so ergibt sich für den y-Wert des Extrempunkts $c - \frac{b^2}{4a}$, also genau dasselbe wie bei einer quadratischen Funktion! (Und die Art ist auch dieselbe wie bei einer quadratischen Funktion: Tiefpunkt für a > 0, Hochpunkt für a < 0.)
3. Mit Produkt- und Kettenregel ergibt sich
   $$f''(x) = (h''(x)\cdot e^x)\cdot e^x + h'(x)\cdot e^x = (h''(x)\cdot e^x + h'(x))\cdot e^x$$
   Wegen $e^x \neq 0$ ist f''(x) = 0 gleichbedeutend mit $h''(e^x)\cdot e^x + h'(e^x) = 0$. Mit der Substitution $u = e^x$ folgt $h''(u)\cdot u + h'(u) = 0$. Da h eine ganzrationale Funktion vom Grad n war, ist h' eine ganzrationale Funktion vom Grad n–1 und h'' eine ganzrationale Funktion vom Grad n–2. Also ist $h''(u)\cdot u + h'(u)$ insgesamt eine ganzrationale Funktion vom Grad n–1. Die Gleichung $h''(u)\cdot u + h'(u) = 0$ hat also höchstens n–1 Lösungen, und daraus folgt wie eben, dass f''(x) = 0 höchstens n–1 Lösungen hat.

Typ 2: $f(x) = g(x)e^{h(x)} + y_0$ mit g, h ganzrational, Grad m bzw. n

1. für $y_0 = 0$ höchstens m Nullstellen; für $y_0 \neq 0$ höchstens m+n Nullstellen
2. höchstens m+n–1 Extremstellen
3. höchstens m+2(n–1) Wendestellen

insbesondere im Lehrplan:

- g linear, h linear: genau 1 Nullstelle ($y_0 = 0$) bzw. höchstens 2 Nullstellen ($y_0 \neq 0$); genau 1 Extremstelle; genau 1 Wendestelle
- g quadratisch, h linear: höchstens 2 Nullstellen ($y_0 = 0$) bzw. höchstens 3 Nullstellen ($y_0 \neq 0$); höchstens 2 Extremstellen; höchstens 2 Wendestellen
- g linear, h quadratisch: genau 1 Nullstelle ($y_0 = 0$) bzw. höchstens 3 Nullstellen ($y_0 \neq 0$); höchstens 2 Extremstellen; höchstens 3 Wendestellen
- g quadratisch, h quadratisch: höchstens 2 Nullstellen ($y_0 = 0$) bzw. höchstens 4 Nullstellen ($y_0 \neq 0$); höchstens 3 Extremstelle; höchstens 4 Wendestellen

Begründungen:

1. Für $y_0 = 0$ hat man einfach $g(x)e^{h(x)} = 0$. Wegen $e^{h(x)} \neq 0$ bleibt davon nur $g(x) = 0$. Weil g eine ganzrationale Funktion vom Grad m ist, hat diese Gleichung höchstens m Lösungen. Insbesondere wenn g linear ist, hat man genau eine Nullstelle.
   Für $y_0 \neq 0$ muss man komplizierter argumentieren: Damit man die maximal mögliche Anzahl an Nullstellen hat, muss die x-Achse jeweils in allen Intervallen zwischen den Extremstellen und zusätzlich noch in den beiden Intervallen „außerhalb‘‘ der Extremstellen geschnitten werden; zwischen je zwei Extremstellen kann die x-Achse aber jeweils nur höchstens einmal geschnitten werden. Es gibt aber laut 2. höchstens m+n–1 Extremstellen, also gibt es insgesamt höchstens m+n solcher Intervalle, also hat f höchstens m+n Nullstellen.
2. Mit der Produkt- und Kettenregel folgt
   $$f'(x) = g'(x) \cdot e^{h(x)} + g(x) \cdot e^{h(x)} \cdot h'(x) = (g'(x) + g(x) \cdot h'(x)) \cdot e^{h(x)}$$
   Wegen $e^{h(x)} \neq 0$ führt $f'(x) = 0$ also auf $g'(x) + g(x) \cdot h'(x) = 0$. Hier ist h‘ eine ganzrationale Funktion vom Grad n–1, und deshalb ist $g(x) \cdot h'(x)$ vom Grad m+n–1 (weil laut Potenzregel $x^m \cdot x^{n-1} = x^{n+n-1}$ ist). Außerdem ist g‘ eine ganzrationale Funktion vom Grad m – 1, was sicher kleiner als m+n–1 ist. Beim Addieren zweier ganzrationaler Funktionen von verschiedenem Grad ergibt sich sicher eine ganzrationale Funktion mit dem größeren Grad, also ist $g'(x) + g(x) \cdot h'(x)$ auch vom Grad m+n–1. Damit hat die Gleichung $g'(x) + g(x) \cdot h'(x) = 0$ höchsten m+n–1 Lösungen. Insbesondere für g, h linear ist die Gleichung vom Grad 1, also wieder linear, also gibt es genau eine einfache Lösung, und damit gibt es genau eine Extremstelle.
3. Mit der Produkt- und Kettenregel folgt
   $$f''(x) = \cdots = (g''(x) + 2g'(x) \cdot h'(x) + g(x) \cdot h''(x) + g(x) \cdot (h'(x))^2) \cdot e^{h(x)}$$
   Wieder verwendet man $e^{h(x)} \neq 0$, und wie bei 2. argumentiert man, dass $g''(x) + 2g'(x) \cdot h'(x) + g(x) \cdot h''(x) + g(x) \cdot (h'(x))^2$ eine ganzrationale Funktion vom Grad m+2(n–1) ist. Wieder folgt für g, h linear, dass die Gleichung wieder vom Grad 1 ist, und damit gibt es genau eine Wendestelle.

Noch genauer:

- g quadratisch, h linear: Dann kann man den Funktionsterm schreiben als
$$f(x) = (a(x - x_S)^2 + y_s)e^{mx+t}$$
Es folgt
$$\begin{aligned} f'(x) &= (2a(x - x_S) + (a(x - x_S)^2 + y_s) \cdot m)e^{mx+t} \\ &= (ma(x^2 - 2x_S x + x_S^2) + 2a(x - x_S) + my_s)e^{mx+t} \\ &= (max^2 - 2max_S x + max_S^2 + 2ax - 2ax_S + my_s)e^{mx+t} \\ &= (max^2 + 2a(1 - mx_S)x + max_S^2 - 2ax_S + my_s)e^{mx+t} \end{aligned}$$
Die Diskriminante des quadratischen Terms ist dann
$$\begin{aligned} D &= 4a^2(1 - mx_S)^2 - 4ma(max_S^2 - 2ax_S + my_s) \\ &= 4a^2(1 - 2amx_S + m^2x_S^2) - 4ma(max_S^2 - 2ax_S + my_s) \\ &= 4a^2 - 8a^2mx_S + 4a^2m^2x_S^2 - 4m^2a^2x_S^2 + 8ma^2x_S - 4m^2ay_S \\ &= 4a^2 - 4m^2ay_S \end{aligned}$$
Für D > 0 hat der Graph zwei Extremstellen. Für $ay_S < 0$ ist dies immer erfüllt (genau dann hat f auch zwei Nullstellen); für $ay_S < 0$ muss gelten:
$$4a^2 - 4m^2ay_S > 0 \Rightarrow m^2 < \frac{a}{y_S}$$
Insbesondere für $ay_S < 0$ ist dies immer erfüllt.
- g linear, h quadratisch: Dann kann man den Funktionsterm schreiben als
$$f(x) = m(x - x_1)e^{a(x-x_S)^2+y_S}$$
Es folgt
$$\begin{aligned} f'(x) &= m(1 + (x - x_1) \cdot 2a(x - x_S))e^{a(x-x_S)^2+y_S} \\ &= m(1 + 2a(x^2 - (x_1 + x_S)x + x_1x_S))e^{a(x-x_S)^2+y_S} \\ &= m(2ax^2 - 2a(x_1 + x_S)x + 2ax_1x_S + 1)e^{a(x-x_S)^2+y_S} \end{aligned}$$
Die Diskriminante des quadratischen Terms ist dann
$$\begin{aligned} D &= 4a^2(x_1 + x_S)^2 - 16a^2x_1x_S - 8a \\ &= 4a^2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_S^2) - 4a^2 \cdot 4x_1x_S - 8a \\ &= 4a^2(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_S^2) - 8a \\ &= 4a^2(x_1 - x_S)^2 - 8a \end{aligned}$$
Für D > 0 hat der Graph zwei Extremstellen. Für a < 0 ist dies immer erfüllt; für a > 0 muss gelten:
$$4a^2(x_1 - x_S)^2 - 8a > 0 \Rightarrow a > \frac{2}{(x_1-x_S)^2}$$
- g quadratisch mit doppelter Nullstelle, h quadratisch: Dann kann man den Funktionsterm schreiben als
$$f(x) = A(x - x_0)^2e^{a(x-x_S)^2+y_S}$$
Es folgt
$$\begin{aligned} f'(x) &= A(2(x - x_0) + (x - x_0)^2 \cdot 2a(x - x_S))e^{a(x-x_S)^2+y_S} \\ &= 2A(x - x_0)(1 + a(x - x_0)(x - x_S))e^{a(x-x_S)^2+y_S} \\ &= 2A(x - x_0)(1 + a(x^2 - (x_0 + x_S)x + x_0x_S))e^{a(x-x_S)^2+y_S} \\ &= 2A(x - x_0)(ax^2 - a(x_0 + x_S)x + ax_0x_S + 1)e^{a(x-x_S)^2+y_S} \end{aligned}$$
Damit gibt es schon mal immer mindestens eine Extremstelle, nämlich genau die Nullstelle $x = x_0$. Die Diskriminante des quadratischen Terms ist nun
$$\begin{aligned} D &= a^2(x_0 + x_S)^2 - 4a^2x_1x_S - 4a \\ &= \cdots = a^2(x_0 - x_S)^2 - 4a \end{aligned}$$
Für D > 0 hat der Graph zwei weitere Extremstellen, also insgesamt dann drei. (Man prüft leicht durch Einsetzen in die quadratische Gleichung nach, dass keine dieser weiteren beiden Extremstellen mit x_0 übereinstimmen kann.) Für a < 0 ist dies immer erfüllt; für a > 0 muss gelten:
$$a^2(x_0 - x_S)^2 - 4a > 0 \Rightarrow a > \frac{4}{(x_0-x_S)^2}$$

- g quadratisch, h quadratisch mit derselben Scheitelstelle: Dann kann man den Funktionsterm schreiben als

$$f(x) = A((x - x_S)^2 + C)e^{a(x-x_S)^2+y_S}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2A(x - x_S) + A((x - x_S)^2 + C) \cdot 2a(x - x_S))e^{a(x-x_S)^2+y_S} \\ &= 2Aa(x - x_S) \cdot (\frac{1}{a} + A((x - x_S)^2 + C) \cdot \frac{1}{A})e^{a(x-x_S)^2+y_S} \\ &= 2Aa(x - x_S) \cdot ((x - x_S)^2 + C + \frac{1}{a})e^{a(x-x_S)^2+y_S} \end{aligned}$$

Damit gibt es schon mal immer mindestens eine Extremstelle für f (nämlich $x = x_S$, denn dies ist offensichtlich eine einfache Nullstelle von f' (außer für $C + \frac{1}{a} = 0$, dann ist die Nullstelle aber dreifach, also hat man wieder eine Extremstelle). Damit es noch zwei weitere Extremstellen gibt, also insgesamt dann drei, muss die Gleichung $(x - x_S)^2 + C + \frac{1}{a} = 0$ genau zwei einfache Lösungen haben, also muss $C + \frac{1}{a} < 0$ sein. Falls C < 0 ist (genau dann hat f auch zwei einfache Nullstellen), ist dies für alle a < 0 erfüllt, wenn dagegen a > 0 ist, dann muss zusätzlich noch $a > -\frac{1}{C}$ gelten

- g quadratisch mit zwei einfachen Nullstellen, h quadratisch: Dann kann man den Funktionsterm schreiben als

$$f(x) = A(x - x_1)(x - x_2)e^{ax^2+bx+c}$$

Damit zu rechnen, ist sehr unübersichtlich. Stattdessen betrachten wir wieder die Funktion u, deren Graph durch eine Verschiebung von f in x-Richtung entsteht – diesmal so, dass danach die beiden Nullstellen x_0 und $-x_0$ sind; den quadratischen Term im Exponenten schreiben wir wieder in Scheitelform:

$$u(x) = A(x - x_0)(x + x_0)e^{a(x-x_S)^2+y_S} = A(x^2 - x_0^2)e^{a(x-x_S)^2+y_S}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} u'(x) &= A\big(2x + (x^2 - x_0^2) \cdot 2a(x - x_S)\big)e^{a(x-x_S)^2+y_S} \\ &= 2Aa\left(\frac{x}{a} + (x^3 - x_S x^2 - x_0^2 x + x_0^2 x_S)\right)e^{a(x-x_S)^2+y_S} \\ &= 2Aa\left(x^3 - x_S x^2 + \left(\frac{1}{a} - x_0^2\right)x + x_0^2 x_S\right)e^{a(x-x_S)^2+y_S} \end{aligned}$$

Das kubische Polynom $x^3 - x_S x^2 + \left(\frac{1}{a} - x_0^2\right)x + x_0^2 x_S$ kürzen wir nun mit $v(x)$ ab und betrachten zunächst den Fall $a < 0$. Dann folgt für $x_S > 0$, dass $v(0) = x_0^2 x_S > 0$ ist und $v(x_S) = \frac{x_S}{a} < 0$.

Zusammen mit dem Globalverhalten von v folgt, dass v mindestens drei Vorzeichenwechsel hat (je mindestens einen für $x < 0$, für $0 < x < x_S$ und für $x_S > 0$), also hat v mindestens drei einfache Nullstellen bzw., da v ja kubisch ist, sogar genau drei einfache Nullstellen. Genauso argumentiert man für $x_S < 0$. Also hat u und damit auch f für $a < 0$ immer genau drei Extremstellen.

Für $a > 0$ funktioniert diese Argumentation nicht. Man kann aber $v'(x) = 3x^2 - 2x_S x + \frac{1}{a} - x_0^2$ betrachten. Die Diskriminante ist hier $D = (-2x_S)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{a} - x_0^2\right) = 4x_S^2 + 12x_0^2 - \frac{12}{a}$. Wenn nun $D \leq 0$ ist, also $a \leq \frac{3}{x_S^2+3x_0^2}$, dann folgt, dass v' keine Nullstelle oder eine doppelte Nullstelle hat, und wegen des Globalverlaufs von v' ergibt sich dann, dass $v'(x) \geq 0$ für alle x gilt. Damit ist v überall sms, und da v kubisch ist, folgt, dass v dann genau eine einfache Nullstelle hat. Also folgt für $0 < a \leq \frac{3}{x_S^2+3x_0^2}$, dass u und damit auch f immer genau eine Extremstelle hat.

- g quadratisch ohne Nullstellen, h quadratisch: Dann kann man den Funktionsterm, wieder nach geeigneter Verschiebung, schreiben als
$$u(x) = A(x^2 + c)e^{a(x-x_S)^2+y_S}$$
mit $c > 0$. Es folgt
$$u'(x) = A\big(2x + (x^2 + c) \cdot 2a(x - x_S)\big)e^{a(x-x_S)^2+y_S}$$
$$= 2Aa\left(\frac{x}{a} + (x^3 - x_S x^2 + cx - cx_S)\right)e^{a(x-x_S)^2+y_S}$$
$$= 2Aa\left(x^3 - x_S x^2 + \left(\frac{1}{a} + c\right)x - cx_S\right)e^{a(x-x_S)^2+y_S}$$
Das kubische Polynom $x^3 - x_S x^2 + \left(\frac{1}{a} + c\right)x - cx_0^2$ kürzen wir wieder mit $v(x)$ ab und betrachten wieder $v'(x) = 3x^2 - 2x_S x + \frac{1}{a} + c$. Die Diskriminante ist hier $D = (-2x_S)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{a} + c\right) = 4x_S^2 - 12c - \frac{12}{a}$. Wenn nun $D \leq 0$ ist, also $x_S^2 \leq 3c + \frac{3}{a}$, dann folgt wieder, dass v' keine Nullstelle oder eine doppelte Nullstelle hat, und wegen des Globalverlaufs von v' ergibt sich dann, dass $v'(x) \geq 0$ für alle x gilt. Damit ist v überall sms, und da v kubisch ist, folgt, dass v dann genau eine einfache Nullstelle hat. Also folgt für $x_S^2 \leq 3c + \frac{3}{a}$, dass u immer genau eine Extremstelle hat.

Es fehlen noch die Fälle: h quadratisch und g mit zwei einfachen Nullstellen, wobei der Scheitel des quadratischen Terms nicht in der Mitte zwischen den Nullstellen liegt und $a > \frac{3}{x_S^2+3x_0^2}$ ist, bzw. h quadratisch und g mit keiner Nullstelle, wobei g und h nicht dieselbe Scheitelstelle haben und $x_S^2 > 3c + \frac{3}{a}$ ist; diese sind aber anscheinend nochmals deutlich schwieriger zu lösen…