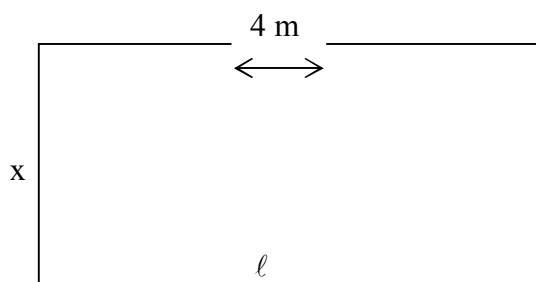


Weitere Anwendungen quadratischer Funktionen

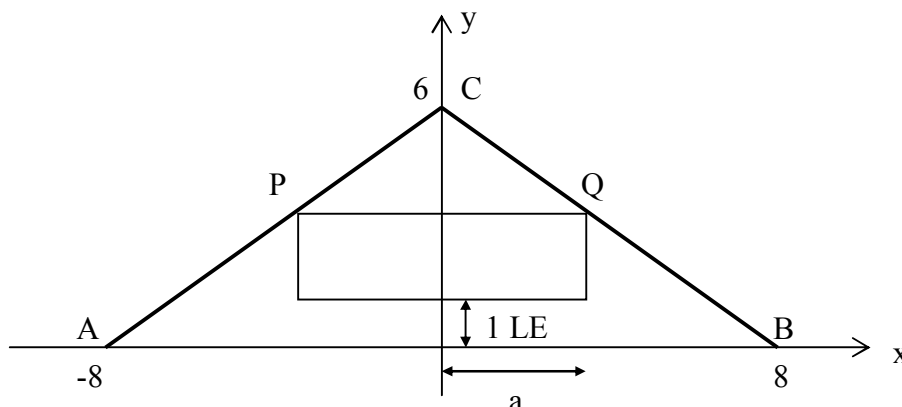
- 1.0 Auf einer Wiese soll mit einem 60 m langen Zaun eine rechteckige Fläche eingezäunt werden; dabei sollen 4 m als Einfahrt frei bleiben:



Die Funktion A ordnet jeder möglichen Seitenlänge x den Inhalt der Fläche zu; Einheiten können dabei ignoriert werden.

- 1.1 Ermitteln Sie einen Funktionsterm von A (mögliches Ergebnis: $A(x) = -x^2 + 32x$) und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge an.
 1.2 Ermitteln Sie rechnerisch, für welchen Wert von x der Inhalt der eingezäunten Fläche am größten ist, und geben Sie diesen größten Flächeninhalt an.
 1.3 Ermitteln Sie, für welche Werte von x der Inhalt der eingezäunten Fläche größer als $220 \text{ (m}^2\text{)}$ ist.

- 2.0 In einem dreieckigen Dachgiebel ABC soll *symmetrisch* zur Mittelachse (y -Achse) ein rechteckiges Fenster eingebaut werden. Das Fenster soll auf einem Sims der Höhe 1 LE aufsitzen und mit den oberen Ecken P und Q an den Dachgiebel heranreichen (siehe Skizze):



- 2.1 Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte B und C . Geben Sie damit die Koordinaten des Punktes Q in Abhängigkeit von a (siehe Skizze) an.
 2.2 Stellen Sie den Flächeninhalt $A(a)$ des Fensters in Abhängigkeit von a dar und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge an. (mögliches Ergebnis: $A(a) = -1,5a^2 + 10a$)
 2.3 Bestimmen Sie nun a so, dass der Flächeninhalt des Fensters möglichst groß ist. Geben Sie diesen größten Flächeninhalt an. Ermitteln Sie auch Breite und Höhe dieses Fensters.

- 2.4 Ermitteln Sie, für welche Werte von a der Flächeninhalt des Fensters mindestens $\frac{42}{3}$ (FE) beträgt.
 (nach Abschlussprüfung NT 2007 – A II, abgewandelt und vereinfacht!)

- 3.0 Zwei positive reelle Zahlen x und y haben die Summe 10.

- 3.1 Begründen Sie, dass sich für das Produkt p der beiden Zahlen in Abhängigkeit von x ergibt:
 $p(x) = -x^2 + 10x$. Geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge D_p an.
 3.2 Ermitteln Sie, für welche Zahlen x und y das Produkt am größten wird.
 3.3 Ermitteln Sie, für welche Zahlen x das Produkt größer als 21 ist.

4.0 Die lineare Funktion $p(x) = mx + t$ gibt an, zu welchem Preis p (in € pro Stück) ein Kleinunternehmen seine Waren verkaufen kann, wenn x Stück davon produziert werden. Dabei ist bekannt: bei einer Produktionsmenge von 1000 Stück kann die Ware zum Preis von 12 € pro Stück verkauft werden; werden 100 Stück mehr produziert, so sinkt der erzielbare Preis um 2 €.

4.1 Ermitteln Sie einen Term für die Funktion p und begründen Sie damit, dass für den Erlös E (in €) in Abhängigkeit von der produzierten Menge x gilt:

$$E(x) = -0,02 x^2 + 32 x$$

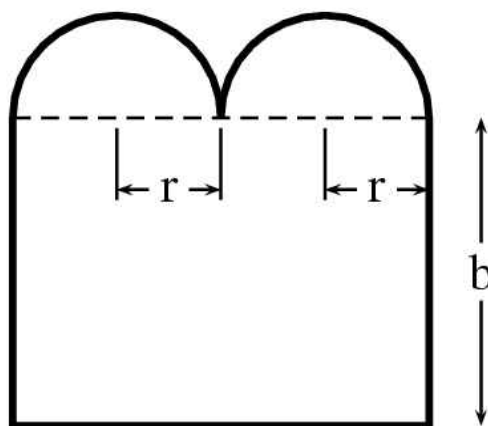
Geben Sie eine im Zusammenhang der Aufgabenstellung sinnvolle Definitionsmengen D_E an.

4.2 Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Stückzahl der erzielte Erlös am größten ist.

4.3 Ermitteln Sie, für welche Stückzahlen der erzielte Erlös größer als 11 000 (€) ist.

5.0 Ein Doppelrundbogenfenster (siehe Zeichnung) wird von drei Seiten eines Rechtecks sowie von zwei Halbkreisen (jeweils Radius r) begrenzt.

Der Umfang des Fensters beträgt 10 m. (Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet!)



5.1 Stellen Sie den Flächeninhalt $A(r)$ des Fensters in Abhängigkeit vom Radius r der Halbkreise dar (mögliches Ergebnis: $A(r) = 20r - (3\pi + 8) \cdot r^2$) und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A an.

5.2 Berechnen Sie auf drei Nachkommastellen genau denjenigen Wert von r , für den der Flächeninhalt des Fensters seinen größten Wert annimmt. Wie viel Prozent des Inhalts nimmt in diesem Fall der rechteckige Teil des Fensters ein?

(aus Abschlussprüfung NT 2008 – AII)

Lösungen

allgemeine Anmerkung: Die quadratischen Ungleichungen kann man statt mit einer Skizze auch anders lösen; siehe Buch!

1.1 $A = x \cdot \ell$; ℓ ist noch unbekannt!

gesamter Umfang: 60 m Zaun + 4 m Einfahrt = 64 m $\rightarrow 2x + 2\ell = 64 \rightarrow 2\ell = 64 - 2x \rightarrow \ell = 32 - x$

oben einsetzen $\rightarrow A(x) = x \cdot (32 - x) = -x^2 + 32x$

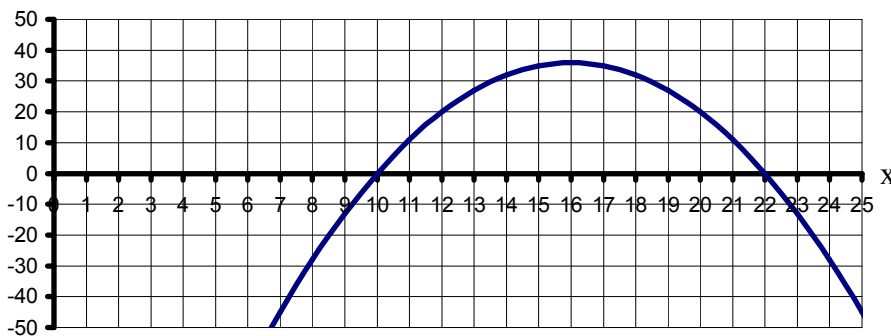
$x > 0$ und $\ell > 0 \rightarrow 32 - x > 0 \rightarrow x < 32$; damit: $D =]0; 32[$

1.2 $A(x) = -x^2 + 32x = -(x^2 - 32x) = -(x^2 - 32x + 16^2 - 16^2) = -(x - 16)^2 - 256 = -(x - 16)^2 + 256$
 $\rightarrow S(16|256) \rightarrow$ Die Fläche ist für $x = 16$ (m) am größten, nämlich $256 \text{ (m}^2\text{)}$.

1.3 $-x^2 + 32x > 220 \rightarrow -x^2 + 32x - 220 > 0$; Gleichung lösen: $-x^2 + 32x - 220 = 0$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-220)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-32 \pm 12}{-2} \rightarrow x_1 = 10; x_2 = 22$$

Skizze:



\rightarrow Der Flächeninhalt ist größer als $220 \text{ (m}^2\text{)}$ für $10 < x < 22$. (weil dort der Graph über der x-Achse ist!)

2.1 $m = \frac{6-0}{0-8} = -0,75$; $t = 6 \rightarrow y = -0,75x + 6$

Die x-Koordinate von Q ist gleich a (siehe Zeichnung); einsetzen $\rightarrow y_Q = -0,75a + 6$

2.2 $A = b \cdot h$; $b = 2a$ (siehe Zeichnung!); $h = y_Q - 1 = -0,75a + 5$ (1 Meter Sims unten!)

einsetzen: $A(a) = 2a \cdot (-0,75a + 5) = -1,5a^2 + 10a$

$b > 0 \rightarrow 2a > 0 \rightarrow a > 0$ und $h > 0 \rightarrow -0,75a + 5 > 0 \rightarrow a < \frac{20}{3}$; damit: $D = \left]0; \frac{20}{3}\right[$

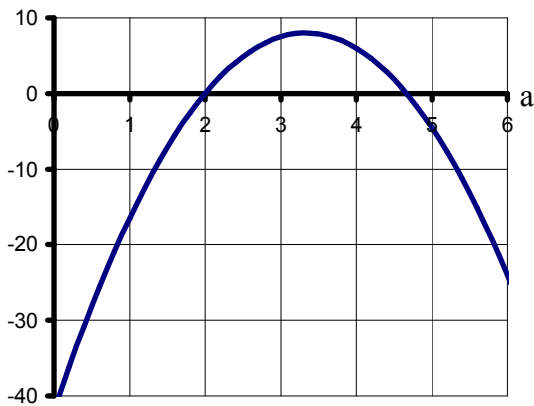
2.3 $A(a) = -1,5 \left(a^2 - \frac{10}{1,5}a \right) = -1,5 \left(a^2 - \frac{20}{3}a + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 \right) = -1,5 \left(\left(a - \frac{10}{3} \right)^2 - \frac{100}{9} \right)$
 $= -1,5 \left(a - \frac{10}{3} \right)^2 + \frac{50}{3} \rightarrow S\left(\frac{10}{3} \mid \frac{50}{3}\right) \rightarrow$ Die Fläche ist am größten für $a = \frac{10}{3}$ (LE), nämlich $\frac{50}{3}$ (FE).

Breite: $b = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$ (LE); Höhe: $h = -0,75 \cdot \frac{10}{3} + 5 = 2,5$ (LE)

$$2.4 \quad -1,5 a^2 + 10 a \geq \frac{42}{3} \quad | -\frac{42}{3} \quad | \cdot 3 \rightarrow -4,5 a^2 + 30 a - 42 \geq 0; \quad \text{Gleichung lösen: } -4,5 a^2 + 30 a - 42 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot (-4,5) \cdot (-42)}}{2 \cdot (-4,5)} = \frac{-30 \pm 12}{-9} \rightarrow a_1 = 2; a_2 = \frac{14}{3}$$

Skizze:



→

Der Flächeninhalt ist mindestens $\frac{42}{3}$ (FE) für $2 \leq a \leq \frac{14}{3}$.
(weil dort der Graph über bzw. auf der a-Achse ist!)

$$3.1 \quad p = x \cdot y, \quad \text{wobei } x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x \rightarrow p(x) = x \cdot (10 - x) = -x^2 + 10x$$

$$x > 0 \text{ und } y > 0 \text{ (positive Zahlen verlangt!) } \rightarrow 10 - x > 0 \rightarrow x < 10 \rightarrow D_p =]0; 10[$$

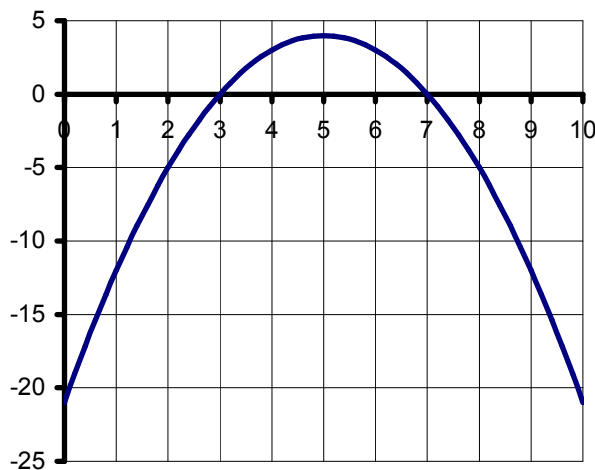
$$3.2 \quad p(x) = -(x^2 - 10x) = -(x^2 - 10x + 5^2 - 5^2) = -((x - 5)^2 - 25) = -(x - 5)^2 + 25 \rightarrow S(5|25)$$

→ Das Produkt wird am größten (nämlich gleich 25) für $x = 5$ – und damit auch $y = 5$.

$$3.3 \quad -x^2 + 10x > 21 \rightarrow -x^2 + 10x - 21 > 0$$

$$\text{Gleichung lösen: } -x^2 + 10x - 21 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-21)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm 4}{-2}$$

$$\rightarrow x_1 = 3; x_2 = 7; \quad \text{Skizze:}$$



→ Das Produkt ist größer als 21 für $3 < x < 7$. (weil dort der Graph über der x-Achse ist!)

$$4.1 \quad \text{pro 100 Stück mehr sinkt der Preis um 2 (€)} \rightarrow m = \frac{-2}{100} = -0,02 \rightarrow p(x) = -0,02x + t$$

$$\text{bei 1000 Stück Preis von 12 (€)} \rightarrow 12 = -0,02 \cdot 1000 + t \rightarrow t = 32 \rightarrow p(x) = -0,02x + 32$$

(oder, länger: bei 1000 Stück 12 €, also bei 1100 Stück 10 €; man hat also die Punkte P(1000|12) und Q(1100|10) gegeben; dann stellt man wie bekannt die Gleichung der Gerade durch P und Q auf)

$$\text{Erlös} = \text{Stückzahl mal Preis pro Stück, also: } E(x) = x \cdot p(x) = -0,02 x^2 + 32 x$$

$x > 0$ und $p > 0 \rightarrow -0,02x + 32 > 0 \rightarrow x < 1600$; damit: $D_E =]0;1600[$

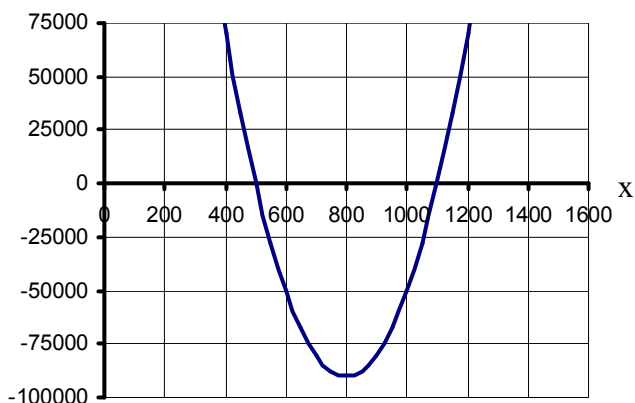
$$4.2 \quad E(x) = -0,02(x^2 - 1600x) = -0,02(x^2 - 1600x + 800^2 - 800^2) = -0,02((x - 800)^2 - 640\,000) \\ = -0,02(x - 800)^2 + 12\,800$$

$\rightarrow S(800|12\,800) \rightarrow$ Der Erlös ist am größten (nämlich 12 800 €) bei 800 Stück.

$$4.3 \quad -0,02x^2 + 32x > 11\,000 \quad | -11\,000 \quad | :(-0,02) \rightarrow x^2 - 1600x + 550\,000 < 0;$$

$$\text{Gleichung lösen: } x^2 - 1600x + 550\,000 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1600 \pm \sqrt{(-1600)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 550\,000}}{2 \cdot 1} = \frac{1600 \pm 600}{2}$$

$\rightarrow x_1 = 500; x_2 = 1100$; Skizze:



\rightarrow Der Erlös ist größer als 11 000 (€) für $500 < x < 1100$. (weil dort der Graph unter der x-Achse ist!)

$$5.1 \quad A = A_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot A_{\text{Halbkreis}} = A_{\text{Rechteck}} + A_{\text{Kreis}} = 4r \cdot b + \pi r^2; \quad b \text{ ist noch unbekannt!}$$

Umfang: 10 m = Länge unten + Seitenlängen + 2 Halbkreise = Länge unten + Seitenlängen + Kreis

$$\rightarrow 10 = 4r + 2b + 2\pi r \rightarrow 2b = 10 - 2\pi r - 4r \rightarrow b = 5 - \pi r - 2r$$

$$\text{oben einsetzen: } A(r) = 4r \cdot (5 - \pi r - 2r) + \pi r^2 = 20r - 4\pi r^2 - 8r^2 + \pi r^2 = 20r - 3\pi r^2 - 8r^2 = 20r - (3\pi + 8)r^2$$

$$r > 0 \text{ und } b > 0 \rightarrow 5 - \pi r - 2r > 0 \rightarrow 5 - (\pi + 2)r > 0 \rightarrow r < \frac{5}{2 + \pi} \approx 0,972$$

$$5.2 \quad A(r) = -(3\pi + 8) \cdot \left(r^2 - \frac{20}{3\pi + 8} r \right) = -(3\pi + 8) \cdot \left(r^2 - \frac{20}{3\pi + 8} r + \left(\frac{10}{3\pi + 8} \right)^2 - \left(\frac{10}{3\pi + 8} \right)^2 \right)$$

$$= -(3\pi + 8) \cdot \left(\left(r - \frac{10}{3\pi + 8} \right)^2 - \frac{100}{(3\pi + 8)^2} \right) = -(3\pi + 8) \cdot \left(r - \frac{10}{3\pi + 8} \right)^2 + \frac{100}{3\pi + 8}$$

$$\rightarrow S\left(\frac{10}{3\pi + 8} \approx 0,574 \mid \frac{100}{3\pi + 8} \approx 5,739 \right)$$

\rightarrow Der Flächeninhalt nimmt seinen größten Wert (nämlich etwa 5,739 (m²)) für einen Radius von etwa 0,574 (m) an.

$$\text{Fläche des rechteckigen Teils: } A_{\text{Rechteck}} = A - A_{\text{Kreis}} = \frac{100}{3\pi + 8} - \pi \left(\frac{10}{3\pi + 8} \right)^2 \approx 4,704 \text{ (m}^2\text{)}$$

$4,704 : 5,739 \approx 0,82 \rightarrow$ Der rechteckige Teil nimmt etwa 82% des Fensters ein.