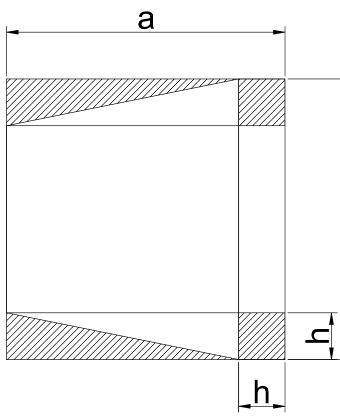
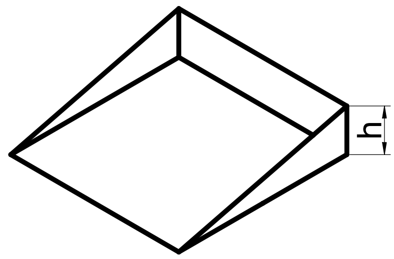
Anwendungen ganzrationaler Funktionen

1.0 Aus einem quadratischen Stück Blech mit der Seitenlänge a = 10 dm soll durch Abschneiden von zwei Dreiecken und zwei Quadraten (siehe Skizze links) und anschließendes Aufbiegen der Seitenteile eine Schaufel gefertigt werden (siehe Skizze rechts).





1.1 Stellen Sie das Volumen V(h) der Schaufel („halbierter Quader“) in Abhängigkeit von der Höhe dar (Einheiten können dabei ignoriert werden). Geben Sie zudem eine sinnvolle Definitionsmenge D_V an. [Ergebnis: $V(h) = h^3 - 15h^2 + 50h$]

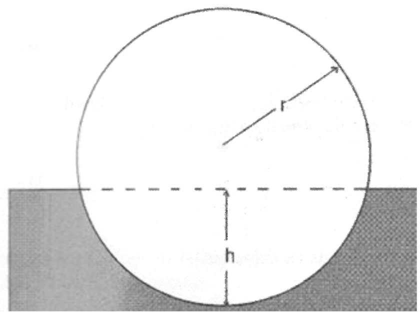
1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion V einschließlich ihrer Vielfachheiten.

1.3 Das Volumen wird (etwa) für h = 2 (dm) am größten. Berechnen Sie dieses größte Volumen.

1.4 Skizzieren Sie den Graphen G_V der Funktion V mit Hilfe aller bisheriger Ergebnisse in einem sinnvollen Bereich.

1.5 Berechnen Sie auf zwei Dezimalen genau die Werte von h, für die das Volumen größer als 36 (dm^3) ist. (nach Nichttechnik-Abschlussprüfungs-Nachtermin 2005)

2.0 Aus der Eintauchtiefe h einer Kugel mit dem Radius r in Wasser kann die Dichte ρ der Kugel bestimmt werden (siehe Skizze). Dabei gilt, dass die Gewichtskraft der Kugel gleich der Gewichtskraft des verdrängten Wassers ist. Ohne Verwendung von Einheiten und mit dem Wert für die Dichte von Wasser $\rho_W = 1$ und der Fallbeschleunigung g ergibt sich :



Gewichtskraft des verdrängten Wasservolumens: $F_W = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3r - h) \cdot g$;

Gewichtskraft der Kugel: $F_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g$.

2.1 Leiten Sie aus der Gleichung $F_W = F_K$ und der Ersetzung $x = \frac{h}{r}$ die folgende Funktion für ρ in Abhängigkeit von x her: $\rho(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$.

Begründen Sie genau , warum $D_\rho =]0; 2]$ eine sinnvolle Definitionsmenge für $\rho(x)$ ist.

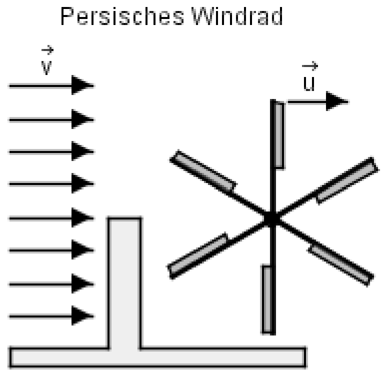
2.2 Berechnen Sie die Dichte einer Kugel mit dem Radius r = 1 und der Eintauchtiefe h = 1,5.

2.3 Begründen Sie, dass es einen x-Wert aus D_ρ gibt, für den $\rho(x) = 0{,}2$ gilt.

(aus Abschlussprüfung-Nachtermin 2002)

3.0 Zur Nutzung der Windenergie kann dem Wind Leistung durch einen so genannten „Widerstandsläufer“ (persisches Windrad) entnommen werden.
Die im Wind enthaltene Leistung P_0 und die davon nutzbare Leistung P_N werden folgendermaßen berechnet:

$P_0 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3$ und $P_N = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot (v-u)^2 \cdot u$



A:	angeströmte Fläche in m^2	ρ:	Luftdichte in $\frac{kg}{m^3}$
c_w:	Widerstandsbeiwert	v:	Windgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$
u:	Umfangsgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$		

Die Schnelllaufzahl λ ist das Verhältnis aus Umfangsgeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit: $\lambda = \frac{u}{v}$ wobei gilt: $u < v$. Die Leistungsausbeute eines Windrades kann über den Leistungsbeiwert c_p berechnet werden. Der Leistungsbeiwert ist das Verhältnis der dem Wind entnommenen Leistung P_N zur im Wind enthaltenen Leistung P_0.

3.1 Ermitteln Sie die Funktionsgleichung des Leistungsbeiwertes $c_p(\lambda)$ mit einem geeigneten Definitionsbereich. [Mögliches Teilergebnis: $c_p(\lambda) = c_w \cdot (1-\lambda)^2 \cdot \lambda$]

3.2 Der Leistungsbeiwert $c_p(\lambda)$ erreicht bei einer Schnelllaufzahl von $\lambda = \frac{1}{3}$ seinen größten Wert. Berechnen Sie, wie groß die vom Wind angeströmte Querschnittsfläche gewählt werden muss, um bei einer Windgeschwindigkeit $v = 10\ \frac{m}{s}$, einem optimalen Widerstandsbeiwert $c_w = 1{,}3$ und einer Luftdichte $\rho = 1{,}188\ \frac{kg}{m^3}$ die maximale Nutzleistung $P_N = 1{,}0$ kW zu erhalten. [Hinweis: $1\ J = 1\ Ws = 1\ Nm = 1\ \frac{kg\, m^2}{s^2}$]

(aus Abschlussprüfungs-Nachtermin 2005)

4.0 Die Gebührenordnung des Paketdienstes „Paket Ahoi“ enthält folgende Klausel: „Bei Päckchen in Zylinderform darf die Summe aus der Höhe h des Zylinders und dem Durchmesser d des Grundkreises 10 dm nicht überschreiten.“ Auf Einheiten wird im Folgenden verzichtet!

4.1 Berechnen Sie das Volumen V(d) eines solchen Päckchens, wenn die in der Gebührenordnung erwähnte Summe genau 10 dm beträgt (mögliches Ergebnis: $V(d) = \pi \cdot \left(2{,}5d^2 - \frac{1}{4}d^3\right)$). Geben Sie auch eine geeignete Definitionsmenge an.

4.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion V einschließlich ihrer Vielfachheiten.

4.3 Das Volumen wird für einen Durchmesser von (etwa) d = 6,5 am größten. Berechnen Sie dieses größte Volumen (runden Sie auf eine ganze Zahl).

4.4 Skizzieren Sie den Graph von V im Bereich $0 \le d \le 10$ mit Hilfe *aller* bisherigen Ergebnisse.

4.5 Berechnen Sie auf zwei Dezimalen genau, für welche Durchmesser d das Volumen größer als 8π (dm^3) ist. (nach Nichttechnik-Abschlussprüfung 2009 – AII)

1.1 $V = \ell \cdot b \cdot h/2 = (10 - h)\cdot(10 - 2h)\cdot h/2 = (100 - 30h + 2h^2)\cdot h/2 = h^3 - 15h^2 + 50h$

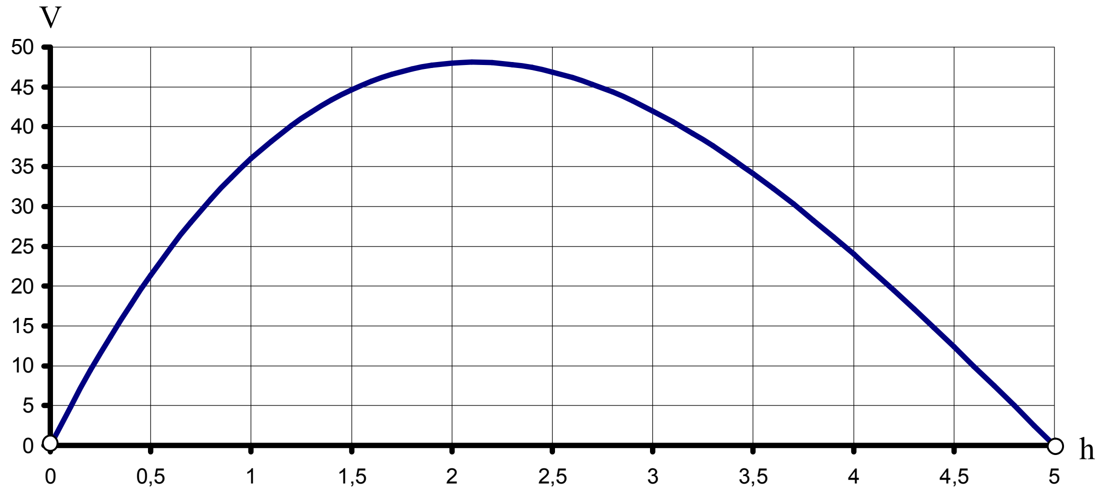
$h > 0$ und $b > 0$ ➔ $10 - 2h > 0$ ➔ $h < 5$ (und $\ell > 0$ ➔ ... $h < 10$) ➔ $D_V =]0;5[$

1.2 $(10 - h)\cdot(10 - 2h)\cdot h/2 = 0$ ➔ ($h_1 = 10 \notin D_V$) $h_2 = 5$; $h_3 = 0$

(oder $h^3 - 15h^2 + 50h = 0$; h ausklammern; Mitternachtsformel; .....)

1.3 $V(2) = 48$

1.4



1.5 $h^3 - 15h^2 + 50h > 36$ ➔ $h^3 - 15h^2 + 50h - 36 > 0$

Gleichung lösen: $h^3 - 15h^2 + 50h - 36 = 0$; durch Probieren: $h_1 = 1$

$(h^3 - 15h^2 + 50h - 36):(h - 1) = h^2 - 14h + 36$

$h^2 - 14h + 36 = 0$ ➔ $h_2 \approx 3{,}39$ (; $h_3 \approx 10{,}61 \notin D_V$)

Skizze (oder Skizze in 1.4 verwenden!) ➔ Das Volumen ist größer als 36 (dm^3) für Höhen zwischen 1 (dm) und etwa 3,39 (dm).

2.1 $$F_W = F_K \implies \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot(3r-h)\cdot g = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\cdot\rho\cdot g$$

$$\implies \rho = \frac{1}{4}\frac{h^2\cdot(3r-h)}{r^3} = \frac{1}{4}\frac{h^2}{r^2}\frac{3r-h}{h} = \frac{1}{4}\left(\frac{h}{r}\right)^2\left(\frac{3r}{h}-\frac{h}{h}\right) = \frac{1}{4}x^2(3x-1)$$

$$\implies \rho(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$$

$h > 0$ (Kugel muss eintauchen) und $h \le 2r$ (komplett eingetaucht) ==> $x > 0$ und $x \le 2$

$\implies D_\rho =]0; 2]$

2.2 $r = 1$ und $h = 1{,}5 \implies x = 1{,}5$; $\rho(1{,}5) = \frac{3}{4}1{,}5^2 - \frac{1}{4}1{,}5^3 = 0{,}84375$

3.1 $$c_p = \frac{P_N}{P_0} = \frac{\frac{1}{2}\cdot c_w\cdot\rho\cdot A\cdot(v-u)^2\cdot u}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot A\cdot v^3} = c_w\cdot\frac{(v-u)^2\cdot u}{v^3} = c_w\cdot\frac{(v-u)^2}{v^2}\cdot\frac{u}{v} = c_w\cdot\frac{\left(v\left(1-\frac{u}{v}\right)\right)^2}{v^2}\cdot\frac{u}{v}$$

$$= c_w\cdot\frac{v^2\left(1-\frac{u}{v}\right)^2}{v^2}\cdot\frac{u}{v} = c_w\cdot\left(1-\frac{u}{v}\right)^2\cdot\frac{u}{v} \implies c_p(\lambda) = c_w\cdot(1-\lambda)^2\cdot\lambda$$

3.2 $c_p(1/3) = 1{,}13\cdot(1-1/3)^2\cdot 1/3 \approx 0{,}1925$; $P_0 = \frac{P_N}{c_p} \approx \frac{1000\ \text{W}}{0{,}1925} \approx 5192\ \text{W}$

$$P_0 = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot A\cdot v^3 \implies A = \frac{2P_0}{\rho v^3} \approx \frac{2\cdot 5192\ \text{W}}{1{,}188\ \text{kg/m}^3\cdot(10\ \text{m/s})^3} \approx 8{,}74\ \text{m}^2$$

4.1 $V = \pi r^2 h$; r und h müssen durch d ausgedrückt werden!

bekannt: $r = \frac{d}{2}$; in Aufgabe gegeben: $h + d = 10 \Rightarrow h = 10 - d$

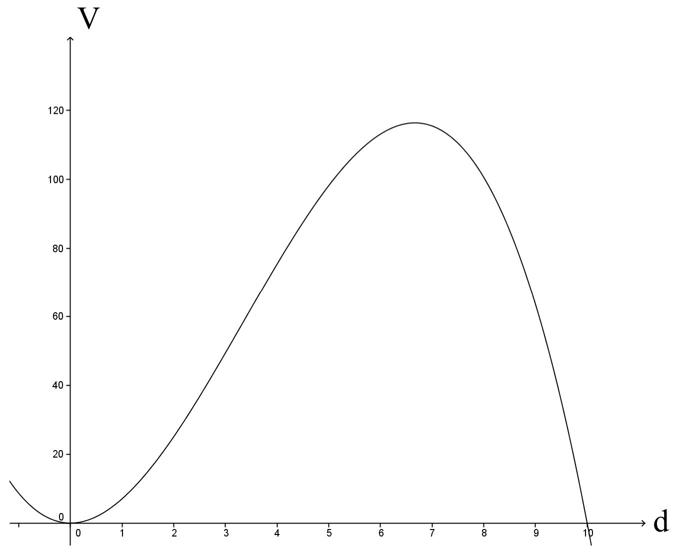
beides einsetzen: $V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot (10-d) = ... = \pi \cdot \left(2{,}5d^2 - \frac{1}{4}d^3\right)$

$d > 0$ und $h > 0 \Rightarrow 10 - d > 0 \Rightarrow d < 10$; damit: $D_V =]0;10[$

4.2 $\pi \cdot \left(2{,}5d^2 - \frac{1}{4}d^3\right) = 0 \Rightarrow 2{,}5d^2 - \frac{1}{4}d^3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}d^2(-10 + d) = 0 \Rightarrow d_{1,2} = 0$ doppelt; $d_3 = 10$ einfach

4.3 $V(6{,}5) = \pi \cdot \left(2{,}5 \cdot 6{,}5^2 - \frac{1}{4} \cdot 6{,}5^3\right) = 36{,}96875\pi \approx 116$

4.4



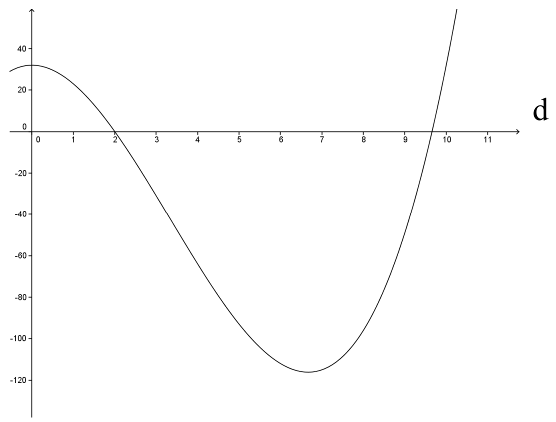
4.5 $\pi \cdot \left(2{,}5 \cdot 6{,}5^2 - \frac{1}{4} \cdot 6{,}5^3\right) > 8\pi \Rightarrow 2{,}5d^2 - \frac{1}{4}d^3 > 8 \Rightarrow d^3 - 10d^2 + 32 < 0$

Gleichung lösen: $d^3 - 10d^2 + 32 = 0$

durch Probieren: $d_1 = 2$; Polynomdivision: $(d^3 - 10d^2 + 0d + 32):(d - 2) = d^2 - 8d - 16$

$d^2 - 8d - 16 = 0 \Rightarrow d_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{128}}{2} \Rightarrow d_2 \approx 9{,}7$ (; $d_3 \approx -1{,}7 \notin D_V$)

Skizze:



(oder Skizze in 4.4 verwenden!)

$\Rightarrow$ Das Volumen ist größer als 8π (dm^3) für einen Durchmesser zwischen 2 und etwa 9,7 (dm).