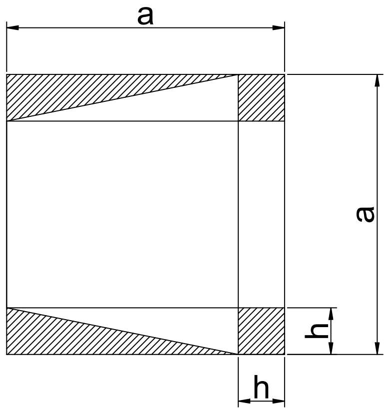
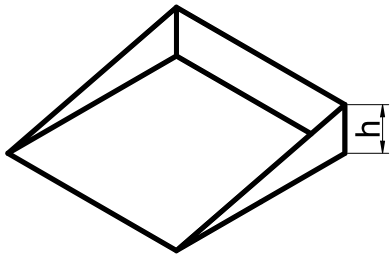
Anwendungen ganzrationaler Funktionen

1.0 Aus einem quadratischen Stück Blech mit der Seitenlänge a = 10 dm soll durch Abschneiden von zwei Dreiecken und zwei Quadraten (siehe Skizze links) und anschließendes Aufbiegen der Seitenteile eine Schaufel gefertigt werden (siehe Skizze rechts).





1.1 Stellen Sie das Volumen V(h) der Schaufel („halbierter Quader") in Abhängigkeit von der Höhe dar (Einheiten können dabei ignoriert werden). Geben Sie zudem eine sinnvolle Definitionsmenge D_V an.
[Ergebnis: $V(h) = h^3 - 15h^2 + 50h$]

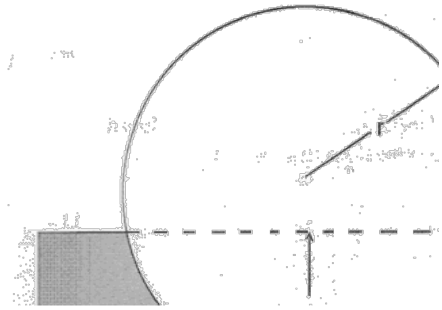
1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion V einschließlich ihrer Vielfachheiten.

1.3 Das Volumen wird (etwa) für h = 2 (dm) am größten. Berechnen Sie dieses größte Volumen.

1.4 Skizzieren Sie den Graphen G_V der Funktion V mit Hilfe aller bisheriger Ergebnisse in einem sinnvollen Bereich.

1.5 Berechnen Sie auf zwei Dezimalen genau die Werte von h, für die das Volumen größer als 36 (dm^3) ist. (nach Nichttechnik-Abschlussprüfungs-Nachtermin 2005)

2.0 Aus der Eintauchtiefe h einer Kugel mit dem Radius r in Wasser kann die Dichte ρ der Kugel bestimmt werden (siehe Skizze). Dabei gilt, dass die Gewichtskraft der Kugel gleich der Gewichtskraft des verdrängten Wassers ist. Ohne Verwendung von Einheiten und mit dem Wert für die Dichte von Wasser $\rho_W = 1$ und der Fallbeschleunigung g ergibt sich :



Gewichtskraft des verdrängten Wasservolumens: $F_W = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3r - h) \cdot g$;

Gewichtskraft der Kugel: $F_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g$.

2.1 Leiten Sie aus der Gleichung $F_W = F_K$ und der Ersetzung $x = \frac{h}{r}$ die folgende Funktion für ρ in Abhängigkeit von x her: $\rho(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$.

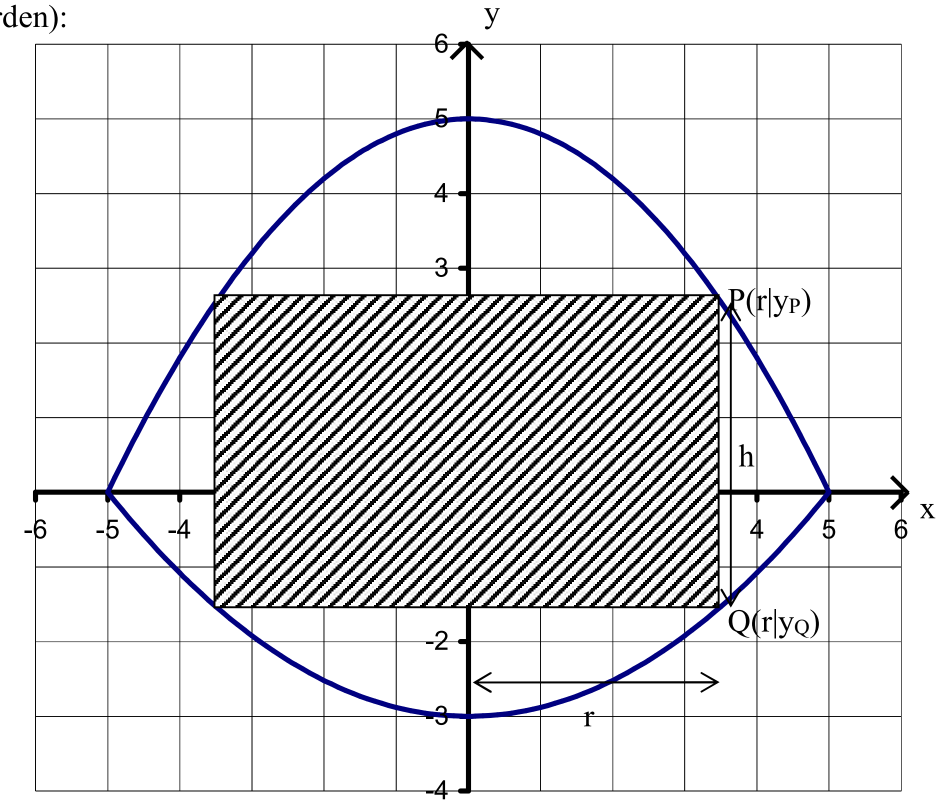
Begründen Sie genau , warum $D_\rho =]0; 2]$ eine sinnvolle Definitionsmenge für $\rho(x)$ ist.

2.2 Berechnen Sie die Dichte einer Kugel mit dem Radius r = 1 und der Eintauchtiefe h = 1,5.

2.3 Begründen Sie, dass es einen x-Wert aus D_ρ gibt, für den $\rho(x) = 0{,}2$ gilt.

(aus Abschlussprüfung-Nachtermin 2002)

3.0 Ein Holzkörper ist von oben aus gesehen kreisrund und hat von der Seite aus gesehen die unten gezeigte, durch zwei Parabeln begrenzte Form (alle Maße in cm; Einheiten können im Folgenden ignoriert werden):



Die beiden Parabeln p_1 bzw. p_2, welche den Körper nach oben bzw. nach unten begrenzen, haben die Gleichungen

$$p_1\colon y = -\frac{1}{5}\,(x^2 - 25) \qquad \text{bzw.} \qquad p_2\colon y = 0{,}12\,x^2 - 3$$

Dieser Körper soll nun so bearbeitet werden, dass ein Zylinder (Radius r, Höhe h) übrig bleibt (von der Seite aus gesehen also das in der Figur oben schraffierte Rechteck).

3.1 Stellen Sie den Rauminhalt V dieses Zylinders in Abhängigkeit von seinem Radius r dar und geben Sie eine im Zusammenhang der Aufgabenstellung sinnvolle Definitionsmenge D_V an.
(Ergebnis: $V(r) = -0{,}32\,\pi\,(r^4 - 25\,r^2)$)

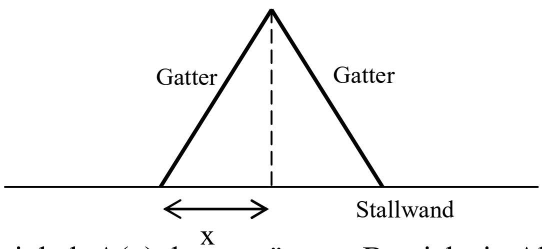
3.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion V einschließlich Vielfachheiten.

3.3 Das größte Volumen erhält man für einen Radius von etwa 3,5. Berechnen Sie dieses größte Volumen.

3.4 Skizzieren Sie den Graphen G_V, auch mit Hilfe aller bisheriger Ergebnisse, im Bereich $0 \le r \le 5$.

3.5 Berechnen Sie, für welche Radien r der Rauminhalt V größer als $26{,}88\pi$ ist.

4.0 Mit zwei jeweils 5 Meter langen Gattern soll ein Freigehege für ein Pony abgezäunt werden. Dafür werden die beiden Gatter folgendermaßen an der Stallwand aufgestellt:



4.1 Berechnen Sie den Flächeninhalt A(x) des umzäunten Bereichs in Abhängigkeit von x. (*Tipp:* Berechnen Sie zunächst die Höhe des Dreiecks in Abhängigkeit von x.)

4.2 Die umzäunte Fläche soll 10 m^2 groß sein. Berechnen Sie, wie muss man x dafür wählen muss. (*Tipp:* Quadrieren Sie die entstehende Gleichung zunächst.)

4.3 Ermitteln Sie auf 2 Dezimalen genau, für welche x-Werte die umzäunte Fläche größer als 10 m^2 ist.

1.1 $V = \ell \cdot b \cdot h/2 = (10 - h)\cdot(10 - 2h)\cdot h/2 = (100 - 30h + 2h^2)\cdot h/2 = h^3 - 15h^2 + 50h$

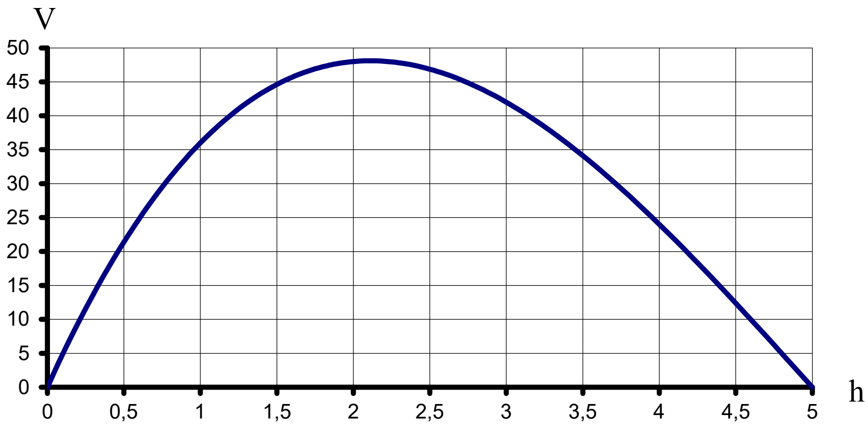
$h > 0$ und $b > 0$ ➔ $10 - 2h > 0$ ➔ $h < 5$ (und $\ell > 0$ ➔ ... $h < 10$) ➔ $D_V =]0;5[$

1.2 $(10 - h)\cdot(10 - 2h)\cdot h/2 = 0$ ➔ ($h_1 = 10 \notin D_V$) $h_2 = 5$; $h_3 = 0$

(oder $h^3 - 15h^2 + 50h = 0$; h ausklammern; Mitternachtsformel; .....)

1.3 $V(2) = 48$

1.4



1.5 $h^3 - 15h^2 + 50h > 36$ ➔ $h^3 - 15h^2 + 50h - 36 > 0$

Gleichung lösen: $h^3 - 15h^2 + 50h - 36 = 0$; durch Probieren: $h_1 = 1$

$(h^3 - 15h^2 + 50h - 36):(h - 1) = h^2 - 14h + 36$

$h^2 - 14h + 36 = 0$ ➔ $h_2 \approx 3{,}39$ (; $h_3 \approx 10{,}61 \notin D_V$)

Skizze (oder Skizze in 1.4 verwenden!) ➔ Das Volumen ist größer als 36 (dm^3) für Höhen zwischen 1 (dm) und etwa 3,39 (dm).

2.1 $F_W = F_K$ ==> $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot(3r - h)\cdot g = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\cdot\rho\cdot g$

==> $\rho = \frac{1}{4}\frac{h^2\cdot(3r-h)}{r^3} = \frac{1}{4}\frac{h^2}{r^2}\frac{3r-h}{r} = \frac{1}{4}\left(\frac{h}{r}\right)^2\left(\frac{3r}{r} - \frac{h}{r}\right) = \frac{1}{4}x^2(3 - x)$

==> $\rho(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$

$h > 0$ (Kugel muss eintauchen) und $h \le 2r$ (komplett eingetaucht) ==> $x > 0$ und $x \le 2$

==> $D_\rho =]0;2]$

2.2 $r = 1$ und $h = 1{,}5$ ==> $x = 1{,}5$; $\rho(1{,}5) = \frac{3}{4}1{,}5^2 - \frac{1}{4}1{,}5^3 = 0{,}84375$

2.3 $\rho(0) = 0$ (bzw. eigentlich: Grenzwert!); $\rho(2) = 1$

$0 < 0{,}2 < 1$ und ρ ist ganzrational, also stetig ➔ Es gibt mind. einen Wert $0 < x < 2$, sodass $\rho(x) = 0{,}2$.

(Zwischenwertsatz)

3.1 $V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h$; $h = y_P - y_Q$ (aus Zeichnung)

$P(r|y_P)$ liegt auf p_1 ➔ $y_P = -\frac{1}{5}(r^2 - 25)$; $Q(r|y_Q)$ liegt auf p_2 ➔ $y_Q = 0{,}12\, r^2 - 3$

➔ $h = -\frac{1}{5}(r^2 - 25) - (0{,}12\, r^2 - 3) = -0{,}32\, r^2 + 8$ ➔ $V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot (-0{,}32\, r^2 + 8) = -0{,}32\pi \cdot (r^4 - 25\, r^2)$

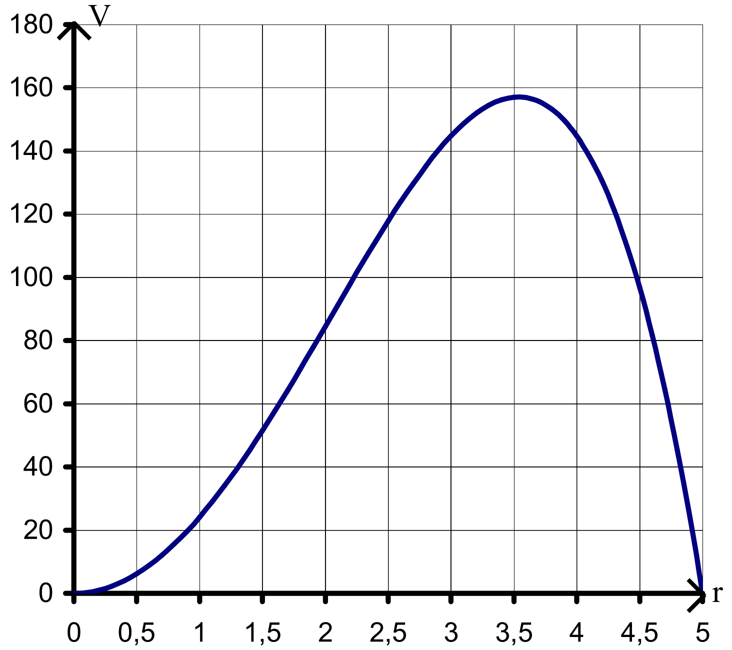
aus der Zeichnung: $D_V =]0;5[$

3.2 $-0{,}32\pi \cdot (r^4 - 25\, r^2) = 0$ ➔ $-0{,}32\pi \cdot r^2 \cdot (r^2 - 25) = 0$ ➔ $-0{,}32\pi \cdot r^2 \cdot (r + 5) \cdot (r - 5) = 0$

➔ $r_{1,2} = 0$ doppelt; $r_3 = -5$; $r_4 = 5$ beide einfach

3.3 $V(3{,}5) = -0{,}32\pi \cdot (3{,}5^4 - 25 \cdot 3{,}5^2) = -0{,}32\pi \cdot (-156{,}1875) = 49{,}98\pi \approx 157$

3.4



3.5 $-0{,}32\pi \cdot (r^4 - 25\, r^2) > 26{,}88\pi \quad | : (-0{,}32\pi)$ ➔ $r^4 - 25\, r^2 < -84$ ➔ $r^4 - 25\, r^2 + 84 < 0$

Gleichung lösen: $r^4 - 25\, r^2 - 84 = 0$; Substitution: $u = r^2$ ➔ $u^2 - 25\, u + 84 = 0$

➔ $u_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 84}}{2 \cdot 1} = \frac{25 \pm 17}{2}$ ➔ $u_1 = 21$; $u_2 = 4$ (beide einfach)

Resubstitution: $r^2 = u$ ➔ 1) $r^2 = 21$ ➔ $r_1 = \sqrt{21} \approx 4{,}6$ und 2) $r^2 = 4$ ➔ $r_2 = 2$

(beide einfach; beachte: die negativen Lösungen gehören nicht zu D_V!)

Skizze (oder die Skizze aus 4.4 verwenden!):

➔ Das Volumen ist größer als $26{,}88\pi$ für $2 < r < \sqrt{21}$.

4.1 Satz von Pythagoras: $x^2 + h^2 = 5^2$ ➔ $h = \sqrt{25 - x^2}$ ➔ $A = 0{,}5 \cdot 2x \cdot \sqrt{25 - x^2} = x\sqrt{25 - x^2}$

4.2 $x\sqrt{25 - x^2} = 10$ ➔ $x^2 (25 - x^2) = 100$ ➔ $x^4 - 25x^2 + 100 = 0$ ➔ $u^2 - 25u + 100 = 0$

➔ $u_1 = 5$; $u_2 = 20$ ➔ $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{20}$ (nur positive Lösungen sinnvoll)

4.3 $x\sqrt{25 - x^2} > 10$ ➔ $x^2 (25 - x^2) > 100$ ➔ $x^4 - 25x^2 + 100 < 0$; mit Skizze folgt:

$\sqrt{5} < x < \sqrt{20}$