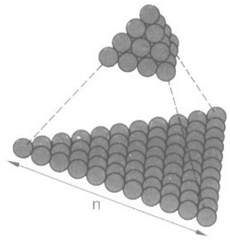
Anwendungen ganzrationaler Funktionen

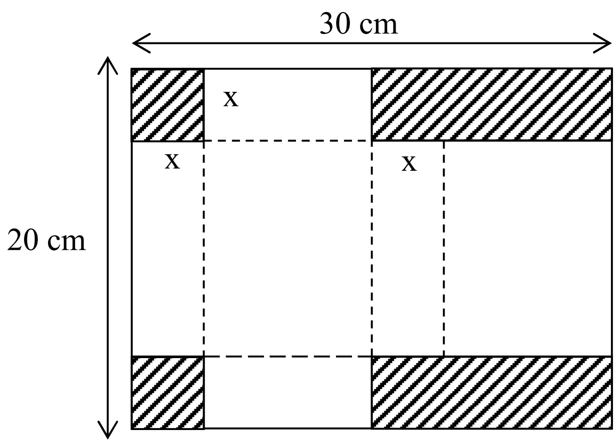
1.0 Schichtet man Kugeln in Form einer dreiseitigen Pyramide aufeinander, z. B. Orangen im Supermarkt (siehe Bild unten), so enthält die Pyramide insgesamt

$$f(n) = \frac{1}{6}(n^3 + 3\,n^2 + 2\,n)$$

Kugeln, wenn man in der untersten Lage an einer Kante mit n Kugeln anfängt. Mit welcher Anzahl n muss man auf der Kante beginnen, um das 100fache dieser Anzahl n in der Pyramide unterzubringen?



2.0 Aus einem rechteckigen Blatt Papier (Länge 30 cm, Breite 20 cm) soll eine Schachtel mit Deckel gebastelt werden. Dafür werden von dem Blatt die unten gezeigten schraffierten Teile abgeschnitten, dann werden die Seitenteile (an den gestrichelt gezeichneten Linien) hochgeklappt.



2.1 Stellen Sie einen Term V(x) für das Volumen der Schachtel (in cm^3) auf; geben Sie das Ergebnis in der normalen Form ganzrationaler Funktionsterme an. Einheiten können dabei ignoriert werden. Geben Sie auch eine geeignete Definitionsmenge D_V an.

(Ergebnis: $V(x) = 2x^3 - 50x^2 + 300x$)

2.2 Geben Sie die Nullstellen einschließlich Vielfachheiten der Funktion V an.

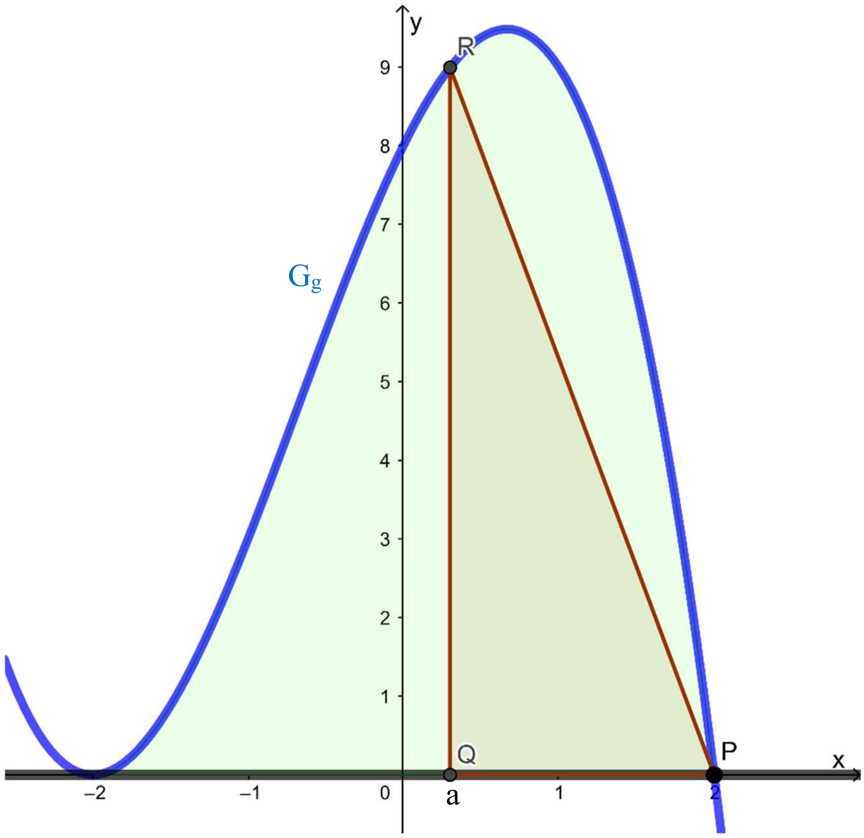
2.3 Das Volumen wird für eine Höhe von (etwa) 4 cm am größten. Berechnen Sie dieses größte Volumen.

2.4 Skizzieren Sie den Graphen G_V im Bereich $0 \leq x \leq 10$ unter Verwendung *aller* bisherigen Ergebnisse.

2.5 Berechnen Sie, für welche Werte von x das Volumen größer als 416 cm^3 ist.

(nach Abschlussprüfungs-Nachtermin 2007)

3.0 Der unten gezeigte Graph der Funktion $g: x \mapsto -x^3 - 2x^2 + 4x + 8$ stellt einen Bach in einem Gartenschau-Park dar; entlang der x-Achse verläuft ein Weg. Auf der Rasenfläche, die zwischen x = –2 und x = 2 von dem Bach und dem Weg begrenzt wird, soll eine dreieckige Fläche mit Tulpen bepflanzt werden. Eine Ecke des Dreiecks soll dabei der Punkt P(2|0) sein, eine zweite Ecke Q(a|0) soll auf dem Weg zwischen –2 und 2 liegen, die dritte Ecke R(a|g(a)) am Bach sein. Die Skizze unten zeigt das beispielhaft für den Fall a = 0,3. Eine Längeneinheit entspricht hier 10 m; auf das Mitführen von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden.



3.1 Stellen Sie den Flächeninhalt A des mit Tulpen bepflanzten Dreiecks in Abhängigkeit von a dar und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge D_A an.
(Ergebnis: $A(a) = 0{,}5a^4 - 4a^2 + 8$)

3.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion A einschließlich ihrer Vielfachheiten.

3.3 Der Flächeninhalt wird für a = 0 am größten. Geben Sie diesen größten Flächeninhalt an.

3.4 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion A im Bereich $-2{,}5 \le a \le 2{,}5$ mit Hilfe *aller* bisherigen Ergebnisse.

3.5 Berechnen Sie, für welche Werte von a der Flächeninhalt A größer als 450 m^2 ist.

4.0 Ein Unternehmen für Elektrogeräte stellt Computerbildschirme her. Werden pro Tag x Bildschirme produziert, so entstehen die Kosten K(x) (in €). Diese Kosten werden durch die Funktion

$$K(x) = 0{,}001\,x^3 - 0{,}9\,x^2 + 300\,x + 18\,000$$

näherungsweise beschrieben. Die Bildschirme werden dann zum Preis von 250 € pro Stück an die Händler verkauft. Beim Verkauf von x Geräten erzielt das Unternehmen die Einnahmen E(x) (in €).

4.1 Ermitteln Sie den Funktionsterm der Gewinnfunktion G(x), welche den Gewinn angibt, den das Unternehmen mit der Herstellung und dem Verkauf von x Bildschirmen erzielt. Geben Sie eine im Zusammenhang der Aufgabenstellung sinnvolle Definitionsmenge D_G an. Zeichnen Sie dann die Graphen G_K, G_E und G_G mithilfe von Wertetabellen (x von 0 bis 900 in Schritten von 100) und interpretieren Sie ihren Verlauf.

4.2 Ermitteln Sie, für welche Produktionsmenge x überhaupt Gewinn erwirtschaftet wird; runden Sie dabei auf ganze Zahlen. Schätzen Sie ab, für welche Menge der Gewinn am größten ist.

4.3 Ermitteln Sie näherungsweise mit Hilfe des Graphen G_K, wie hoch der Preis für einen Bildschirm mindestens sein muss, damit das Unternehmen überhaupt verlustfrei arbeiten kann.

1.0 $\frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n) = 100n \Rightarrow n^3 + 3n^2 + 2n = 600n \Rightarrow n^3 + 3n^2 - 598n = 0$

$\Rightarrow n(n^2 + 3n - 598) = 0 \Rightarrow n_1 = 0$ (nicht sinnvoll);

$\Rightarrow n^2 + 3n - 598 = 0 \Rightarrow n_2 = 23;\ n_3 = -26$ (nicht sinnvoll)

Man muss mit 23 Kugeln unten an einer Kante anfangen. (und bringt dann 2300 Kugeln unter)

2.1 $V_{Quader} = \ell \cdot b \cdot h$; aus Skizze: $\ell = 20 - 2x$; $b = (30 - 3x) : 2 = 15 - x$; $h = x$

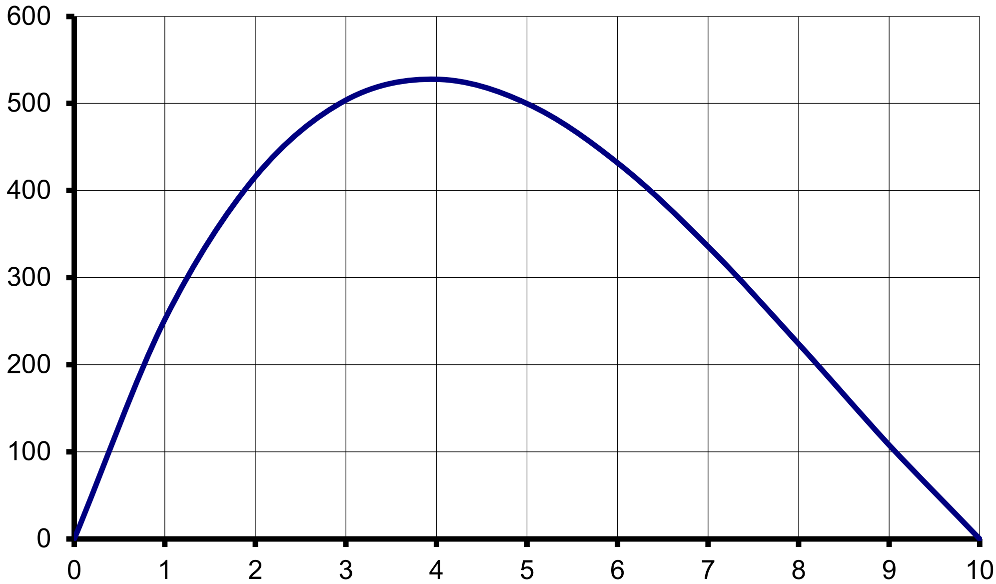
alles einsetzen: $V(x) = (20 - 2x) \cdot (15 - x) \cdot x = (300 - 20x - 30x + 2x^2) \cdot x = 2x^3 - 50x^2 + 300x$

$x > 0$ und $x < 10$ (halbe Breite!) $\Rightarrow D_V =]0;10[$ (oder mit $\ell > 0$, $b > 0 \Rightarrow \ldots$)

2.2 $2x^3 - 50x^2 + 300x = 0 \Rightarrow (20 - 2x) \cdot (15 - x) \cdot x = 0 \Rightarrow x_1 = 10;\ x_2 = 15;\ x_3 = 0$ (alle einfach)

2.3 $V(4) = 2 \cdot 4^3 - 50 \cdot 4^2 + 300 \cdot 4 = 528$

2.4



2.5 $2x^3 - 50x^2 + 300x > 416 \quad | -416 \Rightarrow \quad 2x^3 - 50x^2 + 300x - 416 > 0$

Gleichung lösen: $2x^3 - 50x^2 + 300x - 416 = 0$

durch Probieren: $x_1 = 2$

Polynomdivision: $(2x^3 - 50x^2 + 300x - 416) : (x - 2) = 2x^2 - 46x + 208$

$2x^2 - 46x + 208 = 0 \Rightarrow x_2 \approx 6{,}18$ ($x_3 \approx 16{,}82 \notin D_V$)

Skizze (oder die Skizze aus 2.4 verwenden!) …

$\Rightarrow$ Das Volumen ist größer als 416, wenn x zwischen 2 und etwa 6,18 liegt.

3.1 $A_{Dreieck} = \frac{1}{2}gh$; aus Zeichnung: $g = \overline{QP} = 2 - a$; h = y-Wert von $P = g(a) = -a^3 - 2a^2 + 4a + 8$

$\Rightarrow A(a) = \frac{1}{2} \cdot (2 - a) \cdot (-a^3 - 2a^2 + 4a + 8) = 0{,}5 \cdot (-2a^3 - 4a^2 + 8a + 16 + a^4 + 2a^3 - 4a^2 - 8a)$

$= 0{,}5 \cdot (a^4 - 8a^2 + 16) = 0{,}5a^4 - 4a^2 + 8$

Q muss zwischen –2 und 2 liegen $\Rightarrow D_A = [-2;2]$

3.2 *mit direkter Faktorisierung:*

$A = 0 \Rightarrow 0{,}5a^4 - 4a^2 + 8 = 0 \Rightarrow 0{,}5 \cdot (a^4 - 8a^2 + 16) = 0 \Rightarrow 0{,}5 \cdot (a^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow 0{,}5 \cdot ((a + 2) \cdot (a - 2))^2 = 0$

$\Rightarrow 0{,}5 \cdot (a + 2)^2 \cdot (a - 2)^2 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = -2$ doppelt; $a_{3,4} = 2$ doppelt

oder mithilfe des Ansatzes oben: $A = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (2 - a) \cdot g(a) = 0 \Rightarrow a_1 = 2$ oder $g(a) = 0$

aus der Skizze sieht man: g hat die einfache Nullstelle 2 und die doppelte Nullstelle –2; zusammen mit der Nullstelle $a_1 = 2$ hier ergibt sich also insgesamt: $a_{1,2} = 2$ doppelt; $a_{3,4} = -2$ doppelt

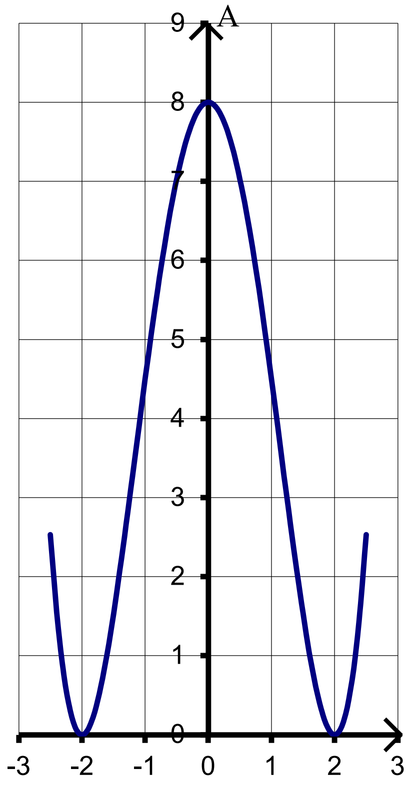
oder mit Substitution: $u = a^2 \Rightarrow 0{,}5u^2 - 4u + 8 = 0$

$u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 8}}{2 \div 0{,}5} = \frac{4 \pm 0}{1} \Rightarrow u_{1,2} = 4$ doppelt

Resubstitution: $a^2 = u \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a_{1,2} = +2$ doppelt; $a_{3,4} = -2$ doppelt

3.3 $A(0) = 8$, der Flächeninhalt ist dann also 800 m^2 *(Längeneinheit beachten!)*

3.4



3.5

$0{,}5a^4 - 4a^2 + 8 > 4{,}5$ *(Längeneinheit beachten!)* $\Rightarrow 0{,}5a^4 - 4a^2 + 3{,}5 > 0$

Gleichung lösen: $0{,}5a^4 - 4a^2 + 3{,}5 = 0$

Substitution: $u = a^2 \Rightarrow 0{,}5u^2 - 4u + 3{,}5 = 0$; $u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}5}}{2 \div 0{,}5} = \frac{4 \pm 3}{1}$

$\Rightarrow u_1 = 7$; $u_2 = 1$ (beide einfach); Resubstitution: $a^2 = u$

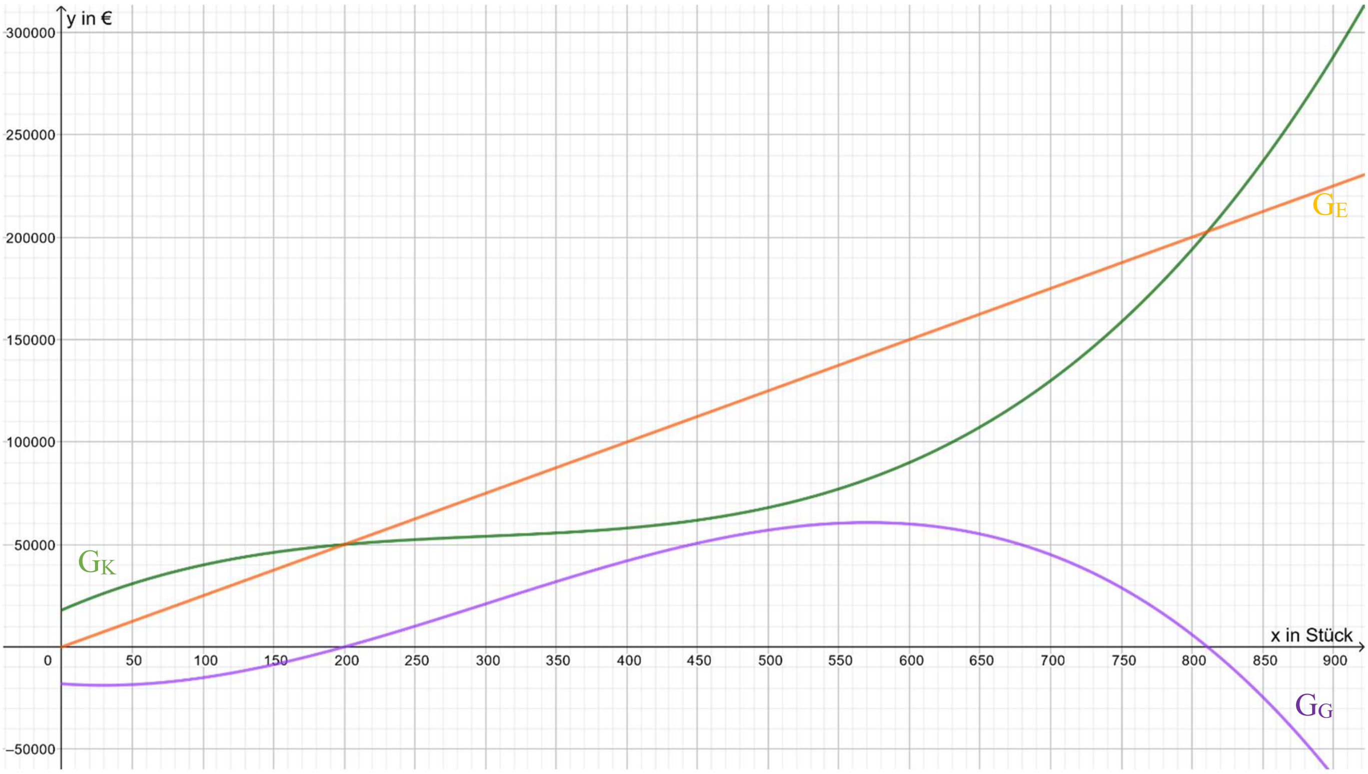
1) $a^2 = 7 \Rightarrow (a_{1,2} = \pm\sqrt{7} \approx \pm 2{,}6 \notin D_A)$ 2) $a^2 = 1 \Rightarrow a_{3,4} = -1$ beide einfach

Skizze (oder die Skizze in 3.4 verwenden) … $\Rightarrow$ Der Flächeninhalt ist größer als 450 m^2 für $-1 < a < 1$.

4.1 $G(x) = E(x) – K(x) = 250x – (0{,}001\,x^3 – 0{,}9\,x^2 + 300\,x + 18\,000) = –0{,}001\,x^3 + 0{,}9\,x^2 – 50\,x – 18\,000$

$D_G = [0; \infty[$ (oder = $\mathbb{N}$)

0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
18000	40000	50000	54000	58000	68000	90000	130000	194000	288000
0	25000	50000	75000	100000	125000	150000	175000	200000	225000
-18000	-15000	0	21000	42000	57000	60000	45000	6000	-63000



4.2 $–0{,}001\,x^3 + 0{,}9\,x^2 – 50\,x – 18\,000 > 0$; Gleichung lösen: $–0{,}001\,x^3 + 0{,}9\,x^2 – 50\,x – 18\,000 = 0$
aus Tabelle: $x_1 = 200$; $(–0{,}001\,x^3 + 0{,}9\,x^2 – 50\,x – 18\,000):(x – 200) = –0{,}001x^2 + 0{,}7x + 90$
$–0{,}001x^2 + 0{,}7x + 90 = 0 \Rightarrow x_2 \approx 811$; $x_3 \approx –111$ (nicht sinnvoll);
mit Skizze bzw. aus dem Graph in 4.1: Es wird Gewinn erwirtschaftet, wenn mehr als 200, aber weniger als 811 Stück produziert werden.
aus dem Graph in 4.1: Der Gewinn ist am größten etwa dann, wenn 570 Stück produziert werden.

4.3 Gerade gesucht, die nur einen Punkt mit G_E gemeinsam hat, also Tangente; deren Steigung ist der gesuchte Minimalpreis; abschätzen: $p_{min} = 135$

Anmerkung: Später, mit Wissen aus Kapitel III und IV, löst man diese Aufgaben so:
größter Gewinn in 4.2

$G'(x) = –0{,}003x^2 + 1{,}8x – 50$; $G''(x) = –0{,}006x + 1{,}8$

WaP: $–0{,}003x^2 + 1{,}8x – 50 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1{,}8 \pm \sqrt{1{,}8^2 - 4\cdot(-0{,}003)\cdot(-50)}}{2\cdot(-0{,}003)} \Rightarrow x_1 \approx 29{,}2$; $x_2 \approx 570{,}8$

$G''(29{,}2) = 1{,}6248 > 0 \Rightarrow$ TiP; $G''(570{,}8) = –1{,}6236 < 0 \Rightarrow$ HoP

(außerdem: $G(0) = –18000$; $\lim_{x\to\infty} G(x) = -\infty \Rightarrow$ sogar abs. HoP)

Der Gewinn ist also am größten, wenn 571 Stück produziert werden.

4.3 $K'(x) = 0{,}003x^2 – 1{,}8x + 300$

gesucht ist eine Tangente an G_K durch den Ursprung, also t: $y = mx$

wenn die Tangente G_K bei x_0 berührt, dann ist $x = x_0$, $y = K(x_0)$, $m = K'(x_0)$, also: $K(x_0) = K'(x_0)\cdot x_0$

$\Rightarrow 0{,}001x_0^3 – 0{,}9x_0^2 + 300x_0 + 18\,000 = (0{,}003x_0^2 – 1{,}8x_0 + 300)\cdot x_0$

$\Rightarrow –0{,}002x_0^3 + 0{,}9x_0^2 + 18\,000 = 0$

durch Probieren erhält man: $x_0 \approx 487{,}82 \Rightarrow m = K'(x_0) \approx 135{,}8$

$\Rightarrow$ Damit das Unternehmen verlustfrei arbeiten kann, muss der Preis mindestens 135,80 € sein.