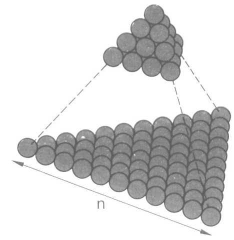
Anwendungen ganzrationaler Funktionen

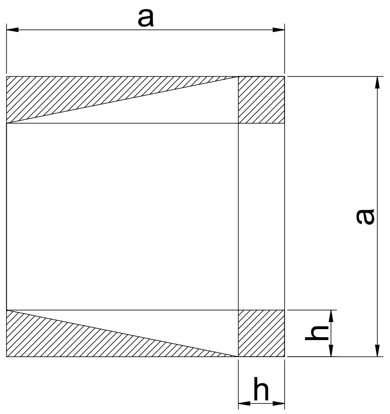
1.0 Schichtet man Kugeln in Form einer dreiseitigen Pyramide aufeinander, z. B. Orangen im Supermarkt (siehe Bild unten), so enthält die Pyramide insgesamt

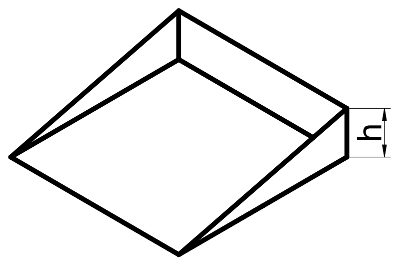
$$f(n) = \frac{1}{6}(n^3 + 3\,n^2 + 2\,n)$$

Kugeln, wenn man in der untersten Lage an einer Kante mit n Kugeln anfängt. Mit welcher Anzahl n muss man auf der Kante beginnen, um das 100fache dieser Anzahl n in der Pyramide unterzubringen?



2.0 Aus einem quadratischen Stück Blech mit der Seitenlänge a = 10 dm soll durch Abschneiden von zwei Dreiecken und zwei Quadraten (siehe Skizze links) und anschließendes Aufbiegen der Seitenteile eine Schaufel gefertigt werden (siehe Skizze rechts).





2.1 Stellen Sie das Volumen V(h) der Schaufel („halbierter Quader“) in Abhängigkeit von der Höhe dar (Einheiten können dabei ignoriert werden). Geben Sie zudem eine sinnvolle Definitionsmenge D_V an. [Ergebnis: $V(h) = h^3 - 15h^2 + 50h$]

2.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion V einschließlich ihrer Vielfachheiten.

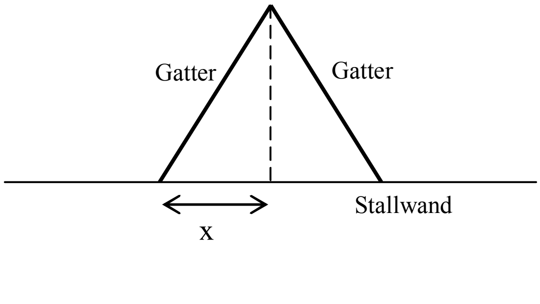
2.3 Das Volumen wird (etwa) für h = 2 (dm) am größten. Berechnen Sie dieses größte Volumen.

2.4 Skizzieren Sie den Graphen G_V der Funktion V mit Hilfe aller bisheriger Ergebnisse in einem sinnvollen Bereich.

2.5 Berechnen Sie auf 2 Dezimalen genau die Werte von h, für die das Volumen größer als 36 (dm^3) ist.

(nach Abschlussprüfungs-Nachtermin 2005)

3.0 Mit zwei jeweils 5 Meter langen Gattern soll ein Freigehege für ein Pony abgezäunt werden. Dafür werden die beiden Gatter folgendermaßen an der Stallwand aufgestellt:



3.1 Berechnen Sie den Flächeninhalt A(x) des umzäunten Bereichs in Abhängigkeit von x. (*Tipp:* Berechnen Sie zunächst die Höhe des Dreiecks in Abhängigkeit von x.)
3.2 Die umzäunte Fläche soll 10 m^2 groß sein. Berechnen Sie, wie muss man x dafür wählen muss. (*Tipp:* Quadrieren Sie die entstehende Gleichung zunächst.)
3.3 Ermitteln Sie auf 2 Dezimalen genau, für welche x-Werte die umzäunte Fläche größer als 10 m^2 ist.

4.0 Ein Unternehmen für Elektrogeräte stellt Computerbildschirme her. Werden pro Tag x Bildschirme produziert, so entstehen die Kosten k(x) (in €). Diese Kosten werden durch die Funktion

$$k(x) = 0{,}001\,x^3 - 0{,}9\,x^2 + 300\,x + 18\,000$$

näherungsweise beschrieben. Die Bildschirme werden dann zum Preis von 250 € pro Stück an die Händler verkauft. Beim Verkauf von x Geräten erzielt das Unternehmen die Einnahmen e(x) (in €).
4.1 Ermitteln Sie den Funktionsterm der Gewinnfunktion g(x), welche den Gewinn angibt, den das Unternehmen mit der Herstellung und dem Verkauf von x Bildschirmen erzielt. Geben Sie eine im Zusammenhang der Aufgabenstellung sinnvolle Definitionsmenge D_g an. Zeichnen Sie dann die Graphen G_k, G_e und G_g (x von 0 bis 900 in Schritten von 100) und interpretieren Sie ihren Verlauf.
4.2 Ermitteln Sie, für welche Produktionsmenge x überhaupt Gewinn erwirtschaftet wird; runden Sie dabei auf ganze Zahlen. Schätzen Sie ab, für welche Menge der Gewinn am größten ist.
4.3 Ermitteln Sie näherungsweise mit Hilfe des Graphen G_k, wie hoch der Preis für einen Bildschirm mindestens sein muss, damit das Unternehmen überhaupt verlustfrei arbeiten kann.

1.0 $\frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n) = 100n \Rightarrow n^3 + 3n^2 + 2n = 600n \Rightarrow n^3 + 3n^2 - 598n = 0$

$\Rightarrow n(n^2 + 3n - 598) = 0 \Rightarrow n_1 = 0$ (nicht sinnvoll);

$\Rightarrow n^2 + 3n - 598 = 0 \Rightarrow n_2 = 23;\ n_3 = -26$ (nicht sinnvoll)

2.1 $V = \ell \cdot b \cdot h/2 = (10 - h)\cdot(10 - 2h)\cdot h/2 = (100 - 30h + 2h^2)\cdot h/2 = h^3 - 15h^2 + 50h$

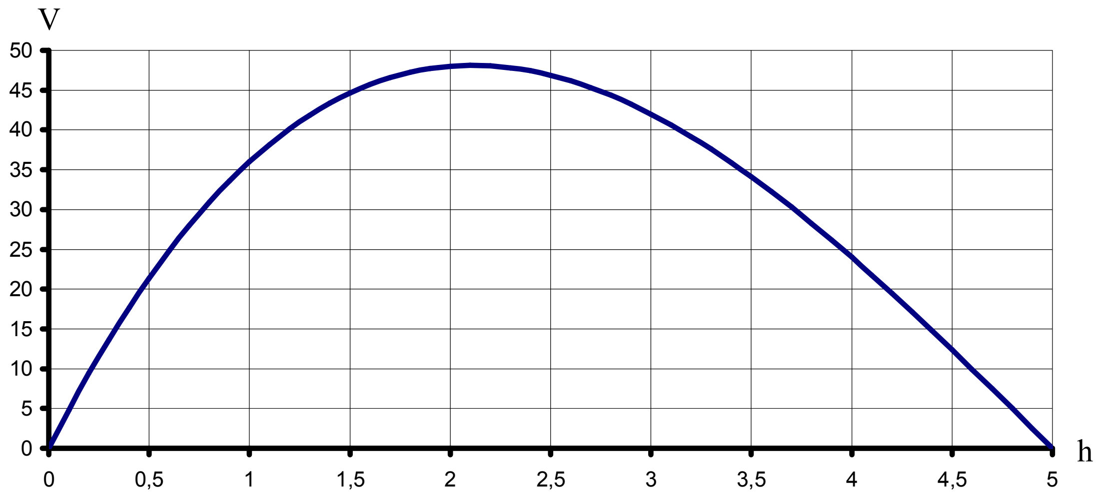
$h > 0$ und $b > 0 \Rightarrow 10 - 2h > 0 \Rightarrow h < 5$ (und $\ell > 0 \Rightarrow \ldots h < 10$) $\Rightarrow D_V =]0;5[$

2.2 $(10 - h)\cdot(10 - 2h)\cdot h/2 = 0 \Rightarrow (h_1 = 10 \notin D_V)\ h_2 = 5;\ h_3 = 0$

(oder $h^3 - 15h^2 + 50h = 0$; h ausklammern; Mitternachtsformel; .....)

2.3 $V(2) = 48$

2.4



2.5 $h^3 - 15h^2 + 50h > 36 \Rightarrow h^3 - 15h^2 + 50h - 36 > 0$

Gleichung lösen: $h^3 - 15h^2 + 50h - 36 = 0$; durch Probieren: $h_1 = 1$

$(h^3 - 15h^2 + 50h - 36):(h - 1) = h^2 - 14h + 36$

$h^2 - 14h + 36 = 0 \Rightarrow h_2 \approx 3{,}39$ (; $h_3 \approx 10{,}61 \notin D_V$)

Skizze…… $\Rightarrow$ Das Volumen ist größer als 36 (dm^3) für Höhen zwischen 1 (dm) und etwa 3,39 (dm).

3.1 $x^2 + h^2 = 5^2 \Rightarrow h = \sqrt{25 - x^2} \Rightarrow A = 0{,}5 \cdot 2x \cdot \sqrt{25 - x^2} = x\sqrt{25 - x^2}$

3.2 $x\sqrt{25 - x^2} = 10 \Rightarrow x^2(25 - x^2) = 100 \Rightarrow x^4 - 25x^2 + 100 = 0 \Rightarrow u^2 - 25u + 100 = 0$

$\Rightarrow u_1 = 5;\ u_2 = 20 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{5};\ x_{3,4} = \pm\sqrt{20}$ (nur positive Lösungen sinnvoll)

3.3 $x\sqrt{25 - x^2} > 10 \Rightarrow x^2(25 - x^2) > 100 \Rightarrow x^4 - 25x^2 + 100 < 0$; mit Skizze folgt:

$\sqrt{5} < x < \sqrt{20}$

4.1 $g(x) = e(x) - k(x) = 250x - (0{,}001x^3 - 0{,}9x^2 + 300x + 18\,000) = -0{,}001x^3 + 0{,}9x^2 - 50x - 18\,000$

$D_g = [0;\infty[$ (oder $= \mathbb{N}$)

0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
18000	40000	50000	54000	58000	68000	90000	130000	194000	288000
0	25000	50000	75000	100000	125000	150000	175000	200000	225000
-18000	-15000	0	21000	42000	57000	60000	45000	6000	-63000

4.2 $-0{,}001x^3 + 0{,}9x^2 - 50x - 18\,000 > 0$; Gleichung lösen: $-0{,}001x^3 + 0{,}9x^2 - 50x - 18\,000 = 0$

durch probieren: $x_1 = 200$; $(-0{,}001x^3 + 0{,}9x^2 - 50x - 18\,000):(x - 200) = -0{,}001x^2 + 0{,}7x + 90$

$-0{,}001x^2 + 0{,}7x + 90 = 0 \Rightarrow x_2 \approx 811;\ x_3 \approx -111$ (nicht sinnvoll); mit Skizze: $200 < x < 811$

Gewinn am größten etwa für $x_{max} = 570$

4.3 Gerade gesucht, die nur einen Punkt mit G_e gemeinsam hat, also Tangente; deren Steigung ist der gesuchte Minimalpreis; abschätzen: $p_{min} = 140$