Anwendungen des Nullstellensatzes

1. Begründen Sie, dass die Funktion f mit dem Term

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

zwischen -1 und 0 eine Nullstelle hat, und ermitteln Sie diese auf zwei Nachkommastellen genau.

2. Die Funktion g mit dem Term

$$g(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

hat offensichtlich die Nullstelle $x_1 = 0$. Begründen Sie (ohne explizite Berechnung), dass g für x > 1 eine weitere Nullstelle haben muss.

Anwendungen des Nullstellensatzes

1. Begründen Sie, dass die Funktion f mit dem Term

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

zwischen -1 und 0 eine Nullstelle hat, und ermitteln Sie diese auf zwei Nachkommastellen genau.

2. Die Funktion g mit dem Term

$$g(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

hat offensichtlich die Nullstelle $x_1 = 0$. Begründen Sie (ohne explizite Berechnung), dass g für x > 1 eine weitere Nullstelle haben muss.

Anwendungen des Nullstellensatzes

1. Begründen Sie, dass die Funktion f mit dem Term

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

zwischen -1 und 0 eine Nullstelle hat, und ermitteln Sie diese auf zwei Nachkommastellen genau.

2. Die Funktion g mit dem Term

$$g(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

hat offensichtlich die Nullstelle $x_1 = 0$. Begründen Sie (ohne explizite Berechnung), dass g für x > 1 eine weitere Nullstelle haben muss.

Anwendungen des Nullstellensatzes

1. Begründen Sie, dass die Funktion f mit dem Term

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

zwischen -1 und 0 eine Nullstelle hat, und ermitteln Sie diese auf zwei Nachkommastellen genau.

2. Die Funktion g mit dem Term

$$g(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

hat offensichtlich die Nullstelle $x_1 = 0$. Begründen Sie (ohne explizite Berechnung der Nullstellen), dass g für x > 1 eine weitere Nullstelle haben muss.

Anwendung des Nullstellensatzes: Lösungen

1. $f(-1) = -1$ und $f(0) = 1$
Die Funktionswerte bei -1 und bei 0 haben unterschiedliches Vorzeichen; da f stetig ist (weil f ganzrational ist!), folgt mit dem Nullstellensatz, dass zwischen -1 und 0 eine Nullstelle von f sein muss.

Genauer kann man diese Nullstelle herausbekommen, wenn man einfach noch einige Funktionswerte zwischendrin berechnet, z. B.:

-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
-0,629	-0,312	-0,043	0,184	0,375	0,536	0,673	0,792	0,899

(dafür empfiehlt sich ein Taschenrechner, der Wertetabellen berechnen kann!).
Man sieht, dass die Funktionswerte bei -0,7 und bei -0,6 unterschiedliches Vorzeichen haben; also muss zwischen -0,7 und -0,6 eine Nullstelle sein.

Noch genauer:

-0,69	-0,68	-0,67	-0,66	-0,65	-0,64	-0,63	-0,62	-0,61
-0,019	0,006	0,029	0,053	0,075	0,098	0,120	0,142	0,163

Die Funktionswerte bei -0,69 und -0,68 haben unterschiedliches Vorzeichen; also muss zwischen -0,69 und -0,68 eine Nullstelle sein.

Führt man noch einen weiteren Schritt aus, so sieht man, dass zwischen -0,683 und -0,682 eine Nullstelle sein muss. Damit hat man auf 2 Nachkommastellen genau also die Nullstelle

$$x_1 \approx -0{,}68.$$

2. Zunächst einmal ist x = 0 eine Nullstelle, (1) weil g(0) = 0 (einsetzen!), oder (2) weil man x ausklammern kann.

zur Begründung, dass es eine weitere Nullstelle für x > 1 gibt: erst mal Funktionswert bei x = 1 berechnen: $g(1) = -2\frac{5}{12}$
andererseits gilt aber: der Graph von g geht nach rechts oben (weil der Grad ungerade ist und der Leitkoeffizient $\frac{1}{12} > 0$), d. h. es gilt: $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$
g ist stetig (weil g ganzrational ist!) und wechselt zwischen 1 und $+\infty$ das Vorzeichen; mit dem Nullstellensatz folgt also, dass es für x > 1 eine Nullstelle geben muss.