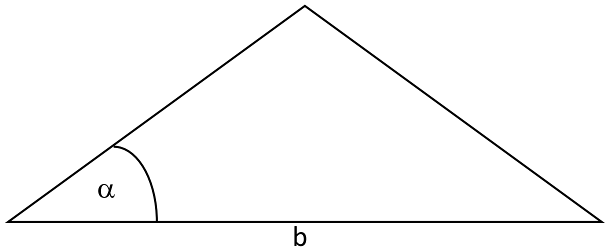
Anwendungen von Wurzelfunktionen

1. Der symmetrische Giebel eines Hauses habe die Breite b und den Neigungswinkel α (siehe Skizze) mit $0 < \alpha < 90°$. Zeigen Sie, dass Regenwasser die Zeit

$$t(\alpha) = \sqrt{\frac{2\,b}{g \cdot \sin(2\,\alpha)}}$$

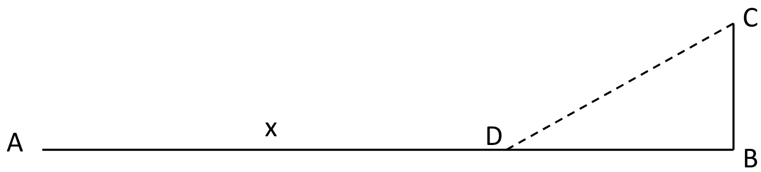
braucht, um vom Dachfirst nach unten zu fließen (dabei ist g die Erdbeschleunigung; Reibung wird vernachlässigt), und ermitteln Sie, für welchen Winkel α diese Zeit minimal ist.



2. Ein Wanderer, der von A nach C unterwegs ist (siehe Skizze), nimmt zuerst den geraden Weg von A nach B, auf dem er mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h vorwärts kommt. Nachdem er die Strecke x zurückgelegt hat, beschließt er, den Knick im Weg (bei B) schräg durchs Gelände abzukürzen (gestrichelt); dort kommt er aber nur noch mit 4 km/h vorwärts. Zeigen Sie für $\overline{AB}$ = 5 km und $\overline{BC}$ = 1 km, dass er insgesamt die Zeit (in Stunden)

$$t(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 26}}{4}$$

braucht, und ermitteln Sie, für welchen Wert von x diese Zeit minimal ist. (Einheiten können in der Rechnung ignoriert werden)

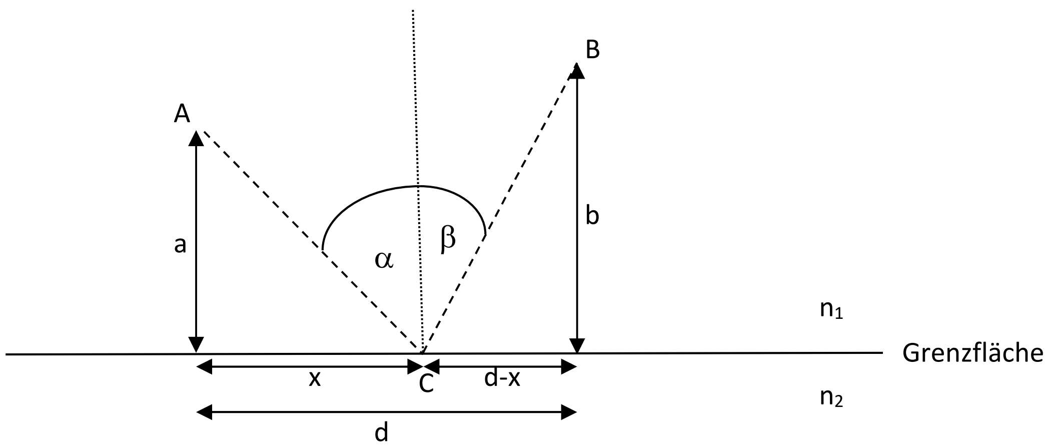


3. Licht breitet sich in durchsichtigen Medien langsamer aus als im Vakuum; dies wird durch den sogenannten Brechungsindex ausgedrückt:

$$n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Medium}}}.$$

Außerdem gilt für die Lichtausbreitung das Fermat'sche Prinzip (nach Pierre de Fermat, französischer Mathematiker und Jurist, 1607-1665): Licht nimmt stets den Weg, auf dem es die kleinst- oder größtmögliche Zeit braucht.

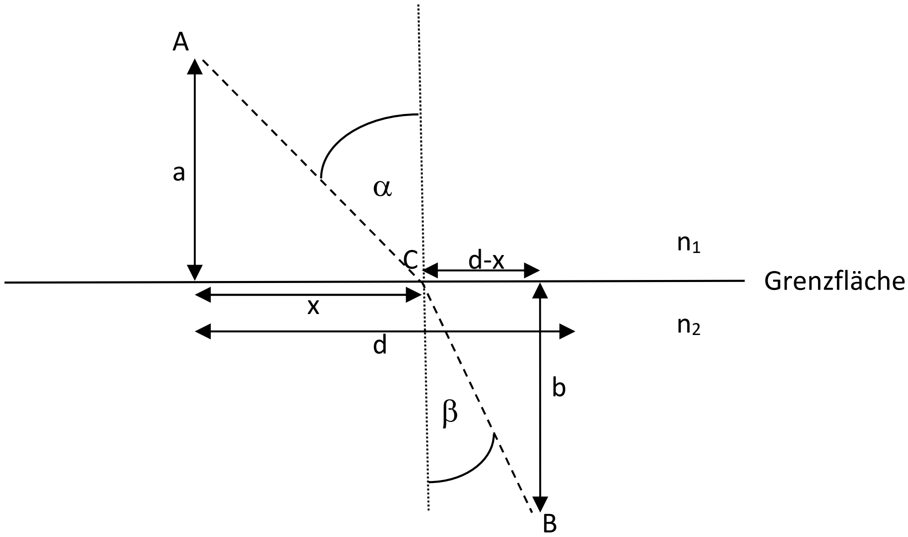
a) Wenn Licht (gestrichelt) auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien trifft (Brechzahlen n_1 und n_2, also Lichtgeschwindigkeiten $c_1 = c_{\text{Vakuum}}/n_1$ und $c_2 = c_{\text{Vakuum}}/n_2$), wird ein Teil reflektiert (siehe Skizze). Zeigen Sie das Reflexionsgesetz: Einfallswinkel = Ausfallswinkel, also $\alpha = \beta$. (Anleitung: Ermitteln Sie zunächst die Lichtlaufzeit in Abhängigkeit von x, schreiben Sie dann die Bedingung dafür hin, dass diese Laufzeit extremal wird, und drücken Sie diese Bedingung schließlich mithilfe der Winkel aus.)



b) Wenn Licht (gestrichelt) auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien trifft (Brechzahlen n_1 und n_2, also Lichtgeschwindigkeiten $c_1 = c_{\text{Vakuum}}/n_1$ und $c_2 = c_{\text{Vakuum}}/n_2$), wird ein Teil gebrochen (siehe Skizze). Zeigen Sie das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

(Hinweis: Die Rechnungen verlaufen fast genauso wie in Teil a.)



4. Bewegt sich eine Lichtquelle, die Licht der Frequenz f_S abgibt, relativ zum Beobachter mit einer Geschwindigkeit vom Betrag v unter dem Winkel φ zur Blickrichtung, so misst dieser Licht der Frequenz f_E, wobei der Zusammenhang

$$f_E = f_S \cdot \frac{1-\beta\cdot\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

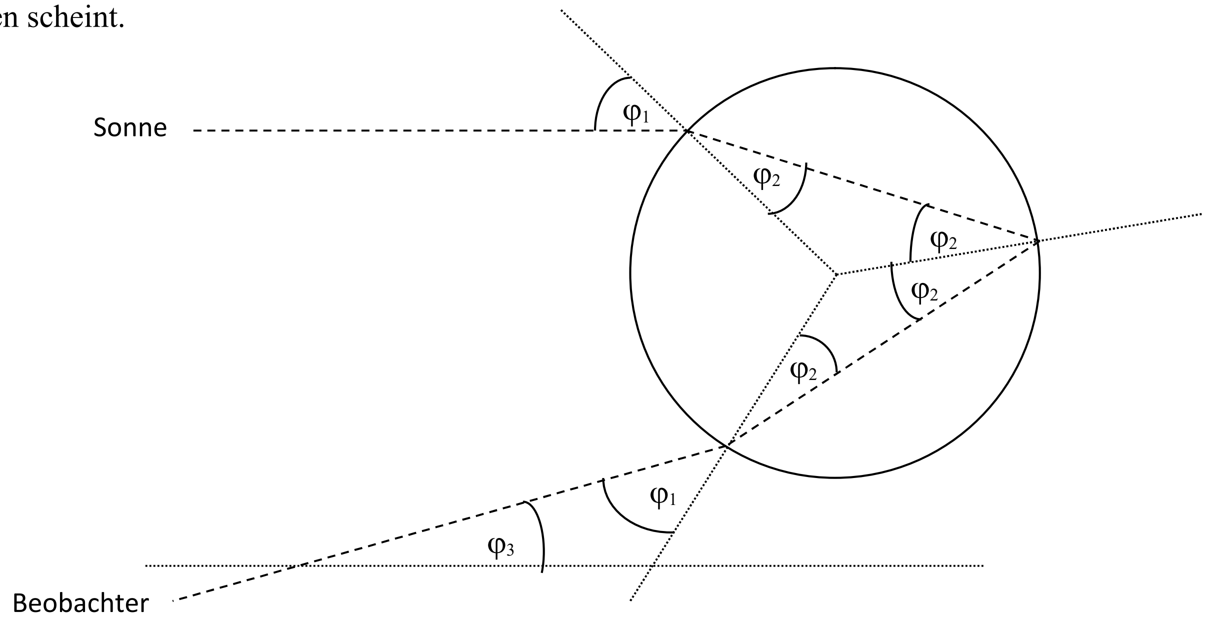
besteht mit $\beta = \frac{v}{c}$ (relativistischer Doppler-Effekt). Im Folgenden bezeichnen wir das Frequenzverhältnis mit g und sehen es als eine Funktion von β an mit Parameter φ:

$$g_\varphi(\beta) = \frac{f_E}{f_S} = \frac{1-\beta\cdot\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad D_{g_\varphi} = [0; 1[.$$

Betrachten Sie die Spezialfälle φ = 0°, φ = 90° und φ = 180°. Vereinfachen Sie, wenn möglich, jeweils den Funktionsterm. Ermitteln Sie dann jeweils das Grenzverhalten und skizzieren Sie die Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse physikalisch.

Anwendungen von Arcusfunktionen

1. Die Skizze zeigt, wie Sonnenlicht (gestrichelt), das von links unter dem Winkel φ_1 auf einen kugelförmigen Regentropfen fällt, in diesem reflektiert wird und deshalb unter dem Winkel φ_3 von rechts zu kommen scheint.



a) Begründen Sie zunächst geometrisch, dass $\varphi_3 = 4\varphi_2 - 2\varphi_1$ ist, und zeigen Sie dann mittels des Brechungs-gesetzes, dass

$$\varphi_3 = 4\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi_1\right) - 2\varphi_1$$

gilt.

b) Die Brechungsindizes haben die Werte $n_1 = 1$ (Luft) und $n_2 = 1{,}33$ (Wasser). Zeigen Sie, dass damit φ_3 maximal 42,5° ist.

2. Eine Drehung um eine Achse a kann auf eine Drehung um eine Achse b, die mit a den Winkel γ einschließt, übertragen werden, indem man ein Kardangelenk benutzt (siehe Abbildung). Dreht sich die Achse a um den Winkel α, so dreht sich dann die Achse b um den Winkel β mit

$$\beta = \arctan\frac{\tan\alpha}{\cos\gamma}.$$

Die Achse a rotiere nun mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_a, d.h. $\alpha = \omega_a t$.

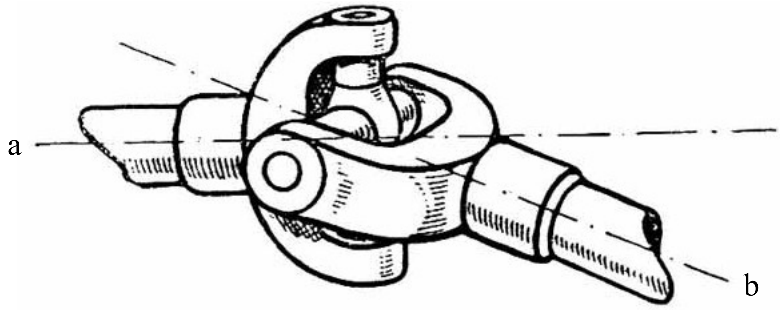
a) Zeigen Sie, dass die Winkelgeschwindigkeit ω_b der Achse b in Abhängigkeit von der Zeit t gegeben ist durch

$$\omega_b(t) = \dot{\beta}(t) = \frac{\omega_a}{\cos\gamma\,\cos^2(\omega_a t) + \frac{1}{\cos\gamma}\,\sin^2(\omega_a t)}.$$

b) Zeigen Sie: Zu allen Zeiten t, zu denen

$$\cos(\omega_a t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

gilt, sind die beiden Winkelgeschwindigkeiten jeweils gleich groß.



Lösungen zu Anwendungen von Wurzelfunktionen

1. mit Trigonometrie folgt für die Strecke, die das Regenwasser fließt: s = $\frac{b}{2\cos\alpha}$
   Auf das Regenwasser wirkt die konstante Hangabtriebskraft F_H = m g sin α, deswegen haben wir hier eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung a = g sin α, also ist s = $\frac{1}{2} g \sin\alpha\, t^2$
   gleichsetzen ==> t = $\sqrt{\frac{b}{g\sin\alpha\cos\alpha}}$; mit sin(2α) = 2 sin α cos α (FS!) folgt dann das angegebene Ergebnis
   t(α) = $\sqrt{\frac{2\,b}{g}} \cdot (\sin(2\,\alpha))^{-1/2}$ ==> t'(α) = $\sqrt{\frac{2\,b}{g}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (\sin(2\,\alpha))^{-3/2} \cdot \cos(2\alpha) \cdot 2 = -\sqrt{\frac{2\,b}{g}}\, \frac{\cos(2\alpha)}{\sqrt{\sin(2\alpha)}^3}$
   t'(α) = 0 ==> $\cos(2\alpha) = 0$; einzige Lösung in D: α = 45°
   $\cos(2\alpha)$ wechselt dort das VZ von + nach – ==> t'(α) = 0 wechselt VZ von – nach + ==> Minimum
   Da dies das einzige Extremum in D ist, und da die Funktion t(α) stetig ist, ist die Zeit für diesen Winkel absolut minimal.

2. Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit: $t = \frac{s}{v}$; dabei ist s_1 = x und s_2 ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $\overline{DB} = 5 - x$ und $\overline{BC} = 1$; außerdem ist $v_1 = 5$ und $v_2 = 4$.
   Damit folgt für die gesamte Zeit t = $t_1 + t_2$ das angegebene Ergebnis.
   t'(x) = $\frac{1}{5} + \frac{1}{4\cdot 2\sqrt{x^2-10x+26}} \cdot (2x - 10)$; t'(x) = 0 ..... ==> $\frac{1}{25}(x^2 - 10x + 26) = \frac{1}{16} \cdot (x^2 - 10x + 25)$
   ... ==> $x_1 = \frac{11}{3}$ ($; x_2 = \frac{19}{3} \notin D = [0; 5]$; Probe nicht vergessen!
   t'(3) $\approx -0{,}02 < 0$; t'(4) $\approx 0{,}02 > 0$ ==> VZW von t' bei x_1 von – nach + ==> Minimum
   Da dies das einzige Extremum in D ist, und da die Funktion t(x) stetig ist, ist die Zeit für diesen Wert von x absolut minimal.

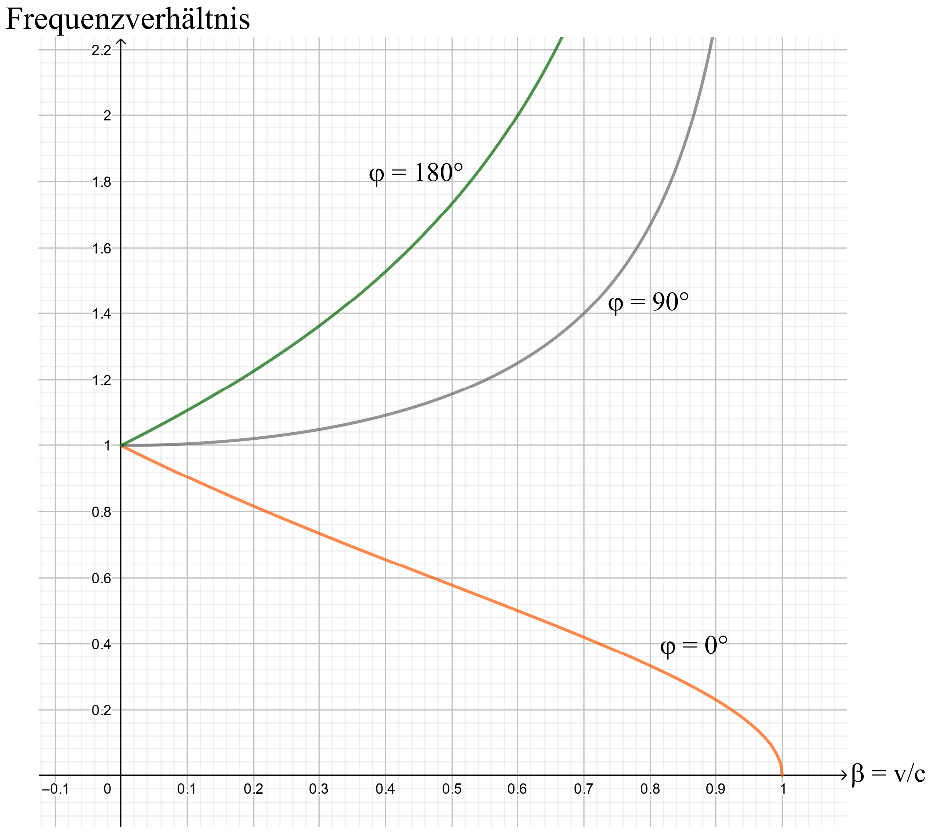
3. a) Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit: $t = \frac{s}{v}$; dabei ist $s_1 = \overline{AC}$ und $s_2 = \overline{CB}$ und $v_1 = v_2 = c_1$
   mit dem Satz des Pythagoras folgt dann für die gesamte Zeit t = $t_1 + t_2$:
   $$t(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b+(d-x)^2}}{c_1}$$
   Damit diese Zeit extremal wird, muss t'(x) = 0 gelten, also
   $$\frac{1}{c_1 \cdot 2\sqrt{a^2+x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{c_1 \cdot 2\sqrt{b+(d-x)^2}} \cdot 2(d-x)\cdot(-1) = 0$$
   $$\Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b+(d-x)^2}}$$
   Oben stehen nun jeweils die Gegenkatheten zu den Winkeln in den beiden rechtwinkligen Dreiecken, unten die Hypotenusen, also folgt: sin α = sin β. Da beide Winkel zwischen 0° und 90° liegen müssen, hat diese Gleichung nur die eine Lösung α = β.

   b) Wie in (a) folgt: t(x) = $\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b+(d-x)^2}}{c_2}$.
   Aus t'(x) = 0 folgt nun $\frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{c_2\sqrt{b+(d-x)^2}}$, also $\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2}$, und daraus folgt die Behauptung.

4.
$g_{0°}(\beta) = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1-\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$; $\lim_{\beta\to 0} g_{0°}(\beta) = 1^-$; $\lim_{\beta\to 1} g_{0°}(\beta) = 0^+$

$g_{90°}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\lim_{\beta\to 0} g_{90°}(\beta) = 1^+$; $\lim_{\beta\to 1} g_{90°}(\beta) = +\infty$

$g_{180°}(\beta) = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$; $\lim_{\beta\to 0} g_{180°}(\beta) = 1^+$; $\lim_{\beta\to 1} g_{180°}(\beta) = +\infty$



Für einen Winkel von 0° zwischen Bewegungsrichtung des Senders und der Blickrichtung, wenn sich der Sender also vom Empfänger entfernt, ist das Frequenzverhältnis immer kleiner als 1, d. h. die empfangene Frequenz ist kleiner als die gesendete (Rotverschiebung). Für $\beta \to 1$, also $v \to c$, geht die empfangene Frequenz gegen 0, d. h. sie wird immer kleiner, und im Grenzfall, dass sich der Sender mit Lichtgeschwindigkeit entfernt, empfängt man gar nichts mehr.

Für einen Winkel von 180° zwischen Bewegungsrichtung des Senders und der Blickrichtung, wenn sich der Sender also auf den Empfänger zu bewegt, ist das Frequenzverhältnis immer größer als 1, d. h. die empfangene Frequenz ist größer als die empfangene (Blauverschiebung). Für $\beta \to 1$, also $v \to c$, geht die empfangene Frequenz gegen ∞, d. h. sie wird immer größer, und im Grenzfall, dass sich der Sender mit Lichtgeschwindigkeit auf den Empfänger zu bewegt, würde man eine unendlich hohe Frequenz empfangen.

Für einen Winkel von 90°, wenn sich der Sender also gerade am Empfänger vorbei bewegt, ist das Grenzverhalten ähnlich wie bei 180°, allerdings geht das Frequenzverhältnis deutlich langsamer gegen ∞. Auch in diesem Fall tritt also (im Gegensatz zum akustischen Dopplereffekt!) eine Frequenzerhöhung (Blauverschiebung) auf („transversaler Dopplereffekt‘‘).

Man beachte übrigens noch, dass hier nur die relative Geschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger wesentlich ist – im Gegensatz zum akustischen Dopplereffekt, bei dem man jeweils unterscheiden muss, ob sich der Sender oder Empfänger bewegt. Das liegt letztlich daran, dass Schallwellen im Gegensatz zu Lichtwellen ein Medium für ihre Ausbreitung brauchen; relevant sind in diesem Fall dann die Geschwindigkeiten relativ zum Medium, nicht relativ zueinander.

Lösungen zu Anwendungen von Arcusfunktionen

1. a) Man kann z. B. vom linken unteren Schnittpunkt aus eine Senkrechte nach oben zeichnen. Dieser Punkt, der Schnittpunkt der Senkrechten mit dem oberen Lichtstrahl und die drei Punkte, in denen der Lichtstrahl auf den Tropfen trifft, bilden ein Fünfeck. In jedem Fünfeck ist die Summe der Innenwinkel gleich 540°. Deshalb ist insgesamt
   $540° = 90° + (180° - \varphi_1 + \varphi_2) + 2\,\varphi_2 + (180° - \varphi_1 + \varphi_2) + (90° - \varphi_3)$; daraus folgt $\varphi_3 = 4\varphi_2 - 2\varphi_1$.
   Das Brechungsgesetz besagt hier $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{n_2}{n_1}$ ==> $\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi_1\right)$; einsetzen ==> Behauptung

   b) $\frac{d\,\varphi_3}{d\,\varphi_1} = \frac{4}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi_1\right)^2}} \cdot \frac{n_1}{n_2}\cos\varphi_1 - 2 = 0$ ==> $4\frac{n_1}{n_2}\cos\varphi_1 = 2\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi_1\right)^2}$

   ==> $16\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\cos^2\varphi_1 = 4\left(1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\varphi_1\right)$ ==> $16\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\cos^2\varphi_1 = 4\left(1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2(1-\cos^2\varphi_1)\right)$

   ==> $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\cos^2\varphi_1 = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right)$ ==> $\cos\varphi_1 = \sqrt{\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2-1}{3}}$

   mit $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}33$ ==> $\varphi_1 \approx 59{,}585°$ (einzige Lösung in D = [0°;90°])
   z. B. mit Werte einsetzen folgt: $\frac{d\,\varphi_3}{d\,\varphi_1}$ wechselt dort das VZ von + nach – ==> Maximum
   Da dies das einzige Extremum in D ist, und da die Funktion $\varphi_3(\varphi_1)$ stetig ist, ist φ_3 für diesen Wert von φ_1 absolut maximal, nämlich $\varphi_3(59{,}585°) \approx 42{,}5°$.

2. a) $\beta(t) = \arctan\frac{\tan(\omega_a\,t)}{\cos\gamma}$

   ==> $\omega_b(t) = \dot\beta(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{\tan(\omega_a t)}{\cos\gamma}\right)^2}\cdot\left(\frac{\tan(\omega_a t)}{\cos\gamma}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{\tan(\omega_a t)}{\cos\gamma}\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\cdot\frac{1}{\cos^2(\omega_a t)}\cdot\omega_a$

   $= \frac{1}{1+\frac{1}{\cos^2\gamma}\frac{\sin^2(\omega_a t)}{\cos^2(\omega_a t)}}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\cdot\frac{1}{\cos^2(\omega_a t)}\cdot\omega_a = \frac{\omega_a}{\cos\gamma\cos^2(\omega_a t)+\frac{1}{\cos\gamma}\sin^2(\omega_a t)}$

   b) $\omega_b = \omega_a$ ==> $\cos\gamma\cos^2(\omega_a t) + \frac{1}{\cos\gamma}\sin^2(\omega_a t) = 1$

   ==> $\cos^2\gamma\cos^2(\omega_a t) + (1-\cos^2(\omega_a t)) = \cos\gamma$

   ==> $(\cos^2\gamma - 1)\cos^2(\omega_a t) = \cos\gamma - 1$ ==> $\cos^2(\omega_a t) = \frac{\cos\gamma-1}{\cos^2\gamma-1} = \frac{\cos\gamma-1}{(\cos\gamma-1)(\cos\gamma+1)} = \frac{1}{1+\cos\gamma}$

   mit FS: $\cos^2(\omega_a t) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$ ==> $\cos(\omega_a t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$

   Es bleibt noch, die (unendlich vielen) Lösungen dieser Gleichung zu bestimmen, vgl. Klasse 12.