Anwendungen der Integralrechnung

1. Die Grenzkosten k‘(x) sind die Ableitung der Kosten k(x) in Abhängigkeit der Produktionsmenge x, geben also an, wie sich die Kosten ändern, wenn sich die Produktionsmenge ändert. Die gesamte Änderung der Kosten Δk bei einer Änderung der Produktionsmenge von x_1 zu x_2 ist deshalb gegeben durch

$$\Delta k = \int_{x_1}^{x_2} k'(x)\, dx.$$

Bei einem bestimmten Unternehmen seien die Grenzkosten gegeben durch (*k* in Geldeinheiten GE, x in Mengeneinheiten ME):

$$k'(x) = 2x^2 - 80x + 900$$

Berechnen Sie, wie sich die Kosten ändert, wenn die Produktionsmenge von 6 ME auf 15 ME steigt.

2. Wird der Gewinn g eines Unternehmens in Abhängigkeit der Zeit durch die Funktion g(t) beschrieben, so gibt die Ableitung $\dot{g}(t)$ an, wie schnell sich der Gewinn mit der Zeit ändert. Die gesamte Änderung des Gewinns von der Zeit t_1 bis zur Zeit t_2 ist deshalb gegeben durch

$$\Delta g = \int_{t_1}^{t_2} \dot{g}(t)\, dt.$$

Bei einem bestimmten Unternehmen sei die Änderungsrate des Gewinns (in 1000 €) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren seit Unternehmungsgründung) gegeben durch

$$\dot{g}(t) = t^3 - 15t^2 + 50t.$$

Berechnen Sie, um wie viel sich der Gewinn in den ersten acht Jahren seit der Unternehmensgründung geändert hat, und um wie viel er sich im Mittel pro Jahr geändert hat.

3. Der Wasserverbrauch w (in m^3/h) einer Wohnsiedlung ist nicht konstant, sondern hängt im Laufe eines Vormittags von der Zeit ab; er kann zwischen t = 6 (Uhr) und t = 12 (Uhr) beschrieben werden durch die Funktion

$$w(t) = 0{,}7\ t^3 - 18\ t^2 + 150\ t - 390$$

Berechnen Sie, welches Wasservolumen V (in m^3) an diesem Vormittag insgesamt verbraucht wird, und den mittleren Wasserverbrauch $\overline{w}$ (in m^3/h) an diesem Vormittag. *(Tipp:* Der Wasserverbrauch gibt die momentane Änderungsrate des verbrauchten Wasservolumens an, $w = \dot{V}$.)

4. Personen, die vorübergehend eine Fastendiät einhalten, nehmen erfahrungsgemäß nicht gleichmäßig, sondern im Laufe der Zeit immer weniger ab. Wir nehmen an, dass bei einem bestimmten Diätvorschlag die (momentane) Abnahmerate

$$r(t) = 1000 - 50\ t^2 \quad \text{(t in Wochen, r in g/Woche)}$$

zugesichert wird. Berechnen Sie, um wie viel kg man mit dieser Diät in 4 Wochen abnimmt, und wie viel man im Mittel pro Woche abnimmt. *(Tipp:* Die momentane Abnahmerate gibt an, wie sich das Gewicht (bzw. eigentlich die Masse) m mit der Zeit ändert, $r = \dot{m}$.)

1. $\Delta k = \int_6^{15}(2x^2 - 80x + 900)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 40x^2 + 900x\right]_6^{15}$

$= \left(\frac{2}{3}\cdot 15^3 - 40\cdot 15^2 + 900\cdot 15\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot 6^3 - 40\cdot 6^2 + 900\cdot 6\right) = 6750 - 4104 = 2646,$

die Kosten steigen also um 2646 GE an.

2. $\Delta g = \int_0^8 (t^3 - 15t^2 + 50t)\,dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - 5t^3 + 25t^2\right]_0^8 = \frac{1}{4}\cdot 8^4 - 5\cdot 8^3 + 25\cdot 8^2 - 0 = 64,$

der Gewinn ist also um 64 000 € gestiegen, also im Mittel um 64 000 € : 8 = 8 000 € pro Jahr.

3. $V = \int_6^{12}(0{,}7t^3 - 18t^2 + 150t - 390)dt = 90\ (m^3);\quad \overline{w} = \frac{V}{12\,h - 6\,h} = 15\ (m^3/h)$

4. $\int_0^4 (1000 - 50t^2)dt = 2933\frac{1}{3}$, man nimmt also knapp 3 kg ab,

also im Mittel $\frac{3\,kg}{4\,Woche} = 0{,}75$ kg pro Woche