Anwendungen der Integralrechnung

1. Ein PKW wird ab der Zeit t = 0 s aus der Ruhe vom Ort x(0) = 3 m an beschleunigt; dabei gilt für die Beschleunigung a in Abhängigkeit von der Zeit t:

$$a(t) = 5\,\frac{m}{s^2} - 0{,}2\,\frac{m}{s^3} \cdot t$$

Ermitteln Sie die Zeit-Geschwindigkeits- und die Zeit-Orts-Funktion.

2. Ein Auto der Masse m = 1200 kg wird aus der Ruhe beschleunigt (d. h. es gilt E(0) = 0). Für die auf die Räder übertragene Motorleistung (in Watt) gilt dabei in Abhängigkeit der Zeit (in Sekunden):

$$P(t) = 1620\,t^2 - 32\,400\,t + 162\,000 \text{ für } 0 \le t \le 10$$

Berechnen Sie die (kinetische) Energie des Autos nach Ende des Beschleunigungsvorganges (in Joule), die mittlere Leistung und die am Ende erreichte Geschwindigkeit.

3. Der Wasserverbrauch w (in m^3/h) einer Wohnsiedlung ist nicht konstant, sondern hängt im Laufe eines Vormittags von der Zeit ab; er kann zwischen t = 6 (Uhr) und t = 12 (Uhr) beschrieben werden durch die Funktion

$$w(t) = 0{,}7\,t^3 - 18\,t^2 + 150\,t - 390$$

Berechnen Sie, welches Wasservolumen V (in m^3) an diesem Vormittag insgesamt verbraucht wird, und den mittleren Wasserverbrauch $\overline{w}$ (in m^3/h) an diesem Vormittag.

4. Personen, die vorübergehend eine Fastendiät einhalten, nehmen erfahrungsgemäß nicht gleichmäßig, sondern im Laufe der Zeit immer weniger ab. Wir nehmen an, dass bei einem bestimmten Diätvorschlag die wöchentliche Abnahmerate

$$r(t) = 1000 - 50\,t^2 \quad \text{(t in Wochen, r in g/Woche)}$$

zugesichert wird. Berechnen Sie, um wie viel kg man mit dieser Diät in 4 Wochen abnimmt.

5. Begründen Sie rechnerisch, dass zum Spannen einer Feder mit Federkonstante D von der Dehnung x_1 zur Dehnung x_2 die Arbeit

$$W = \frac{1}{2}\,D\left((x_2)^2 - (x_1)^2\right)$$

nötig ist (verwenden Sie das Hooke'sche Gesetz F(x) = D x). Berechnen Sie diese Arbeit für D = 5 N/cm, x_1 = 1 cm, x_2 = 3 cm.

6. Für die elektrische Kraft zwischen zwei Körpern der Ladungen Q_1 und Q_2, deren Mittelpunkte den Abstand r voneinander haben, gilt:

$$F(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \text{(Coulombsches Gesetz),}$$

wobei $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{C^2}{N\,m^2}$ die sogenannte elektrische Feldkonstante ist. Ermitteln Sie eine allgemeine Formel für die Arbeit, die benötigt wird, um zwei geladene Körpern vom Abstand r_1 in den Abstand r_2 voneinander zu bringen (Tipp: In der Integralformel für die Arbeit ist die Variable nun r statt s; schreiben Sie $\frac{1}{r^2}$ als r^{-2}.) Berechnen Sie diese Arbeit (in GJ) auf eine Dezimale genau für Q_1 = 1 C, Q_2 = –1 C, r_1 = 10 cm und r_2 = 1,0 m. Was ergibt sich, wenn r_2 gegen unendlich geht?

1. $v(t) - 0 = \int_0^t (5\,\frac{m}{s^2} - 0{,}2\,\frac{m}{s^3} \cdot t')dt' = 5\,\frac{m}{s^2} \cdot t - 0{,}1\,\frac{m}{s^3} \cdot t^2$

$x(t) - 3\text{ m} = \int_0^t (5\,\frac{m}{s^2} \cdot t' - 0{,}1\,\frac{m}{s^3} \cdot t'^2)dt' \Rightarrow x(t) = 3\text{ m} + 2{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 - \frac{1}{30}\,\frac{m}{s^2} \cdot t^3$

2. $E_{kin}(10) - E_{kin}(0) = \int_0^{10} P(t')dt'$

mit E(0) = 0 $\Rightarrow E_{kin}(10) = \int_0^{10}(1620\,t'^2 - 32\,400\,t' + 162\,000)\,dt'$

$= [540\,t'^3 - 16\,200\,t'^2 + 162\,000\,t']_0^{10} = \cdots = 540\,000\text{ (J)}$; $\bar{P} = \frac{540\,000\,J}{10\,s} = 54\,000\text{ W}$

$E_{kin} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\,E_{kin}}{m}} = \ldots = 30\text{ m/s} = 108\text{ km/h}$

3. $V = \int_6^{12} (0{,}7t^3 - 18t^2 + 150t - 390)dt = 90\text{ (m}^3\text{)}$; $\bar{w} = \frac{V}{12\,h - 6\,h} = 15\text{ (m}^3\text{/h)}$

4. $\int_0^4 (1000 - 50t^2)dt = 2933\frac{1}{3}$, man nimmt also knapp 3 kg ab

5. $W = \int_{x_1}^{x_2} (Dx)dx = \left[\frac{1}{2}Dx^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}\,D\,\left((x_2)^2 - (x_1)^2\right) \Rightarrow W = 0{,}2\text{ J}$

6. $W = -\frac{Q_1Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \Rightarrow W = 80{,}9\text{ GJ}$; $\lim_{r_2 \to \infty} W = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r_1}$