Anwendungen der Integralrechnung

1. Wie schnell ein Kind wächst, hängt von seinem Alter ab. Die Wachstumsgeschwindigkeit $v(t)$ (in cm pro Jahr) gibt die (momentane) Änderungsrate der Höhe $h(t)$ des Kindes (in cm) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren seit der Geburt) an, es gilt also $v(t) = \dot{h}(t)$. Damit folgt für die Änderung Δh der Höhe zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2:
$$\Delta h = \int_{t_1}^{t_2} \dot{h}(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt.$$
Die Wachstumsgeschwindigkeit ist dabei gegeben durch
$$v(t) = 0{,}04t^2 - 1{,}76t + 19{,}36.$$
Berechnen Sie, um wie viel das Kind zwischen dem Alter 5 Jahre und 10 Jahre wächst, und ermitteln Sie damit die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit in dieser Zeit.

2. Der Wasserverbrauch w (in m^3/h) einer Wohnsiedlung ist nicht konstant, sondern hängt im Laufe eines Vormittags von der Zeit ab; er kann zwischen t = 6 (Uhr) und t = 12 (Uhr) beschrieben werden durch die Funktion
$$w(t) = 0{,}7\, t^3 - 18\, t^2 + 150\, t - 390$$
Berechnen Sie, welches Wasservolumen V (in m^3) an diesem Vormittag insgesamt verbraucht wird, und den mittleren Wasserverbrauch $\overline{w}$ (in m^3/h) an diesem Vormittag. *(Tipp:* Der Wasserverbrauch gibt die momentane Änderungsrate des verbrauchten Wasservolumens an, $w = \dot{V}$.)

3. Personen, die vorübergehend eine Fastendiät einhalten, nehmen erfahrungsgemäß nicht gleichmäßig, sondern im Laufe der Zeit immer weniger ab. Wir nehmen an, dass bei einem bestimmten Diätvorschlag die (momentane) Abnahmerate
$$r(t) = 1000 - 50\, t^2 \quad \text{(t in Wochen, r in g/Woche)}$$
zugesichert wird. Berechnen Sie, um wie viel kg man mit dieser Diät in 4 Wochen abnimmt, und wie viel man im Mittel pro Woche abnimmt. *(Tipp:* Die momentane Abnahmerate gibt an, wie sich das Gewicht m mit der Zeit ändert, $r = \dot{m}$.)

4. Um für ihr neues Album zu werben, sendet eine Band auf einer Internet-Plattform einen Livestream. Der Betreiber der Plattform registriert dabei, wie sich die Anzahl z (in 1000) der Zuschauer mit der Zeit t (in Minuten seit Beginn des Livestreams um 20:45:00 Uhr) geändert hat. Diese (momentane) Änderungsrate wird beschrieben durch
$$\dot{z}(t) = 2t^3 - 24t^2 + 34t + 60.$$
Berechnen Sie, wie viele Zuschauer im Zeitraum von 20:48:00 bis 20:55:00 Uhr den Live-Stream verlassen haben. *(nach Prüfung T2020 miHiMi AII)*

1. $\Delta h = \int_5^{10} (0{,}04t^2 - 1{,}76t + 19{,}36)\,dt = \left[\frac{0{,}04}{3} t^3 - 0{,}88t^2 + 19{,}36t\right]_5^{10}$

$= \left(\frac{0{,}04}{3} \cdot 10^3 - 0{,}88 \cdot 10^2 + 19{,}36 \cdot 10\right) - \left(\frac{0{,}04}{3} \cdot 5^3 - 0{,}88 \cdot 5^2 + 19{,}36 \cdot 5\right)$

$= 118{,}9\overline{3} - 76{,}4\overline{6} \approx 42{,}5,$

Das Kind ist in diesem Zeitraum um etwa 42,5 cm gewachsen, also im Mittel um $\frac{42{,}5\ cm}{10\ Jahre - 5\ Jahre}$ $= 8{,}5$ cm pro Jahr.

2. $V = \int_6^{12} (0{,}7t^3 - 18t^2 + 150t - 390)dt = 90$, der Wasserverbrauch in dieser Zeit war also 90 m^3.

Der mittlere Wasserverbrauch in dieser Zeit war deshalb $\overline{w} = \frac{V}{12\ h - 6\ h} = 15$ m^3 pro Stunde.

3. $\int_0^4 (1000 - 50t^2)dt = 2933\frac{1}{3}$, d.h. man nimmt knapp 3 kg ab, also im Mittel $\frac{3\ kg}{4\ Wochen}$ $= 0{,}75$ kg pro Woche.

4. 20:48 Uhr entspricht $t = 3$, 20:55 Uhr entspricht $t = 10$

$\Delta z = \int_3^{10} \dot{z}(t)dt = \int_3^{10} (2t^3 - 24t^2 + 34t + 60)dt = [0{,}5t^4 - 8t^3 + 17t^2 + 60t]_3^{10}$

$= (0{,}5 \cdot 10^4 - 8 \cdot 10^3 + 17 \cdot 10^2 + 60 \cdot 10) - (0{,}5 \cdot 3^4 - 8 \cdot 3^3 + 17 \cdot 3^2 + 60 \cdot 3)$

$= -700 - (157{,}5) = -875{,}6,$

d. h. 875 600 Zuschauer haben den Lifestream in dieser Zeit verlassen.