

Anwendungen der Integralrechnung

1. Ein PKW wird ab der Zeit $t = 0$ s aus der Ruhe vom Ort $x(0) = 3$ m an beschleunigt; dabei gilt für die Beschleunigung a in Abhängigkeit von der Zeit t :

$$a(t) = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t$$

Ermitteln Sie die Zeit-Geschwindigkeits- und die Zeit-Orts-Funktion.

2. Ein Auto der Masse $m = 1200$ kg wird aus der Ruhe beschleunigt (d. h. es gilt $E(0) = 0$). Für die auf die Räder übertragene Motorleistung (in Watt) gilt dabei in Abhängigkeit der Zeit (in Sekunden):

$$P(t) = 1620 t^2 - 32\,400 t + 162\,000 \text{ für } 0 \leq t \leq 10$$

Berechnen Sie die (kinetische) Energie des Autos nach Ende des Beschleunigungsvorganges (in Joule), die mittlere Leistung und die am Ende erreichte Geschwindigkeit.

3. Ein Kondensator wird an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen; für die Stromstärke gilt:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t)$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$, wobei T die Periodenlänge ist.

a) Ermitteln Sie $Q(t)$ unter der Bedingung, dass die Ladung auf dem Kondensator gleich 0 ist.

b) Geben Sie eine Gleichung für die Spannung $U_C = Q/C$ an einem Kondensator der Kapazität in Abhängigkeit von der Zeit t an. Welche Amplitude ergibt sich für diese Spannung? Welchen Widerstand hat ein Kondensator also, wenn man den Widerstand einfach als Quotienten der Amplituden von Spannung und Stromstärke berechnet?

4. Für die Spannung U_R an einem ohmschen Widerstand gilt: $U_R = R I$. Der ohmsche Widerstand wird an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen, vgl. Aufgabe 2.

a) Geben Sie die Gleichung für die Spannung U_R und die Leistung $P = U I$ in Abhängigkeit von der Zeit an. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Formel für $\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2$ aus der Merkhilfe verwenden (mit $\frac{\varphi}{2} = \omega t$).

b) Ermitteln Sie, um wieviel sich die Energie des Widerstands im Laufe einer Periode T ändert, und berechnen Sie damit die *mittlere* Leistung während einer Periode. Drücken Sie das Ergebnis durch R und $U_0 = R I_0$ aus.

5. Der Wasserverbrauch w (in m^3/h) einer Wohnsiedlung ändert sich im Laufe eines Vormittags kontinuierlich; er kann zwischen $t = 6$ (Uhr) und $t = 12$ (Uhr) beschrieben werden durch die Funktion

$$w(t) = 0,7 t^3 - 18 t^2 + 150 t - 390$$

Berechnen Sie, welches Wasservolumen V (in m^3) an diesem Vormittag insgesamt verbraucht wird, und den mittleren Wasserverbrauch \bar{w} (in m^3/h) an diesem Vormittag.

6. Personen, die vorübergehend eine Fastendiät einhalten, nehmen erfahrungsgemäß nicht gleichmäßig, sondern im Laufe der Zeit immer weniger ab. Wir nehmen an, dass bei einem bestimmten Diätvorschlag die wöchentliche Abnahmerate

$$r(t) = 1000 - 50 t^2 \quad (t \text{ in Wochen, } r \text{ in g/Woche)}$$

zugesichert wird. Berechnen Sie, um wie viel kg man mit dieser Diät in 4 Wochen abnimmt.

7. Begründen Sie rechnerisch, dass zum Spannen einer Feder mit Federkonstante D von der Dehnung x_1 zur Dehnung x_2 die Arbeit

$$W = \frac{1}{2} D \left((x_2)^2 - (x_1)^2 \right)$$

nötig ist (verwenden Sie das Hooke'sche Gesetz $F(x) = D x$). Berechnen Sie diese Arbeit für $D = 5 \text{ N/cm}$, $x_1 = 1 \text{ cm}$, $x_2 = 3 \text{ cm}$.

8. Für die elektrische Kraft zwischen zwei Körpern der Ladungen Q_1 und Q_2 , deren Mittelpunkte den Abstand r voneinander haben, gilt:

$$F(r) = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \text{ (Coulombsches Gesetz),}$$

wobei $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$ die sogenannte elektrische Feldkonstante ist. Geben Sie mit Hilfe Ihrer

Ergebnisse in (2) eine allgemeine Formel für die Arbeit an, die benötigt wird, um zwei geladene Körpern vom Abstand r_1 in den Abstand r_2 voneinander zu bringen (vgl. Formelsammlung Physik!). Berechnen Sie diese Arbeit (in GJ) auf eine Dezimale genau für $Q_1 = 1 \text{ C}$, $Q_2 = -1 \text{ C}$, $r_1 = 10 \text{ cm}$ und $r_2 = 1,0 \text{ m}$. Was ergibt sich, wenn r_2 gegen unendlich geht?

$$1. \quad v(t) - 0 = \int_0^t (5 \frac{m}{s^2} - 0,2 \frac{m}{s^3} \cdot t') dt' = 5 \frac{m}{s^2} \cdot t - 0,1 \frac{m}{s^3} \cdot t^2$$

$$x(t) - 3 \text{ m} = \int_0^t (5 \frac{m}{s^2} \cdot t' - 0,1 \frac{m}{s^3} \cdot t'^2) dt' \rightarrow x(t) = 3 \text{ m} + 2,5 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 - \frac{1}{30} \frac{m}{s^2} \cdot t^3$$

$$2. \quad E_{kin}(10) - E_{kin}(0) = \int_0^{10} P(t') dt'$$

$$\text{mit } E(0) = 0 \rightarrow E_{kin}(10) = \int_0^{10} (1620 t'^2 - 32\,400 t' + 162\,000) dt'$$

$$= [540 t'^3 - 16\,200 t'^2 + 162\,000 t']_0^{10} = \dots = 540\,000 \text{ (J)}; \quad \bar{P} = \frac{540\,000 \text{ J}}{10 \text{ s}} = 54\,000 \text{ W}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 E_{kin}}{m}} = \dots = 30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h}$$

$$3. \text{ a) } Q(t) = -\frac{I_0}{\omega} \cos(\omega t) + C; \quad \text{im Mittel gleich } 0 \rightarrow C = 0$$

$$\text{b) } U_C(t) = -\frac{I_0}{C\omega} \cos(\omega t); \quad \text{Amplitude: } U_{C0} = \frac{I_0}{C\omega} \rightarrow \text{Widerstand: } R = \frac{1}{C\omega}$$

$$4. \text{ a) } U_R(t) = R I_0 \sin(\omega t); \quad P(t) = R I_0^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} R I_0^2 (1 - \cos(2\omega t))$$

$$\text{b) } \Delta E = \frac{1}{2} \int_0^T R I_0^2 (1 - \cos(2\omega t)) dt = \dots = \frac{1}{2} R I_0^2 T \rightarrow \text{mittlere Leistung: } \bar{P} = \frac{\Delta E}{T} = \frac{1}{2} R I_0^2 = \dots = \frac{U_0^2}{2R}$$

$$5. \quad V = \int_6^{12} (0,7t^3 - 18t^2 + 150t - 390) dt = 90 \text{ (m}^3\text{)}; \quad \bar{w} = \frac{V}{12 \text{ h} - 6 \text{ h}} = 15 \text{ (m}^3\text{/h)}$$

$$6. \quad \int_0^4 (1000 - 50t^2) dt = 2933 \frac{1}{3}, \text{ man nimmt also knapp } 3 \text{ kg ab}$$

$$7. \quad W = \int_{x_1}^{x_2} (Dx) dx = \left[\frac{1}{2} Dx^2 \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} D \left((x_2)^2 - (x_1)^2 \right) \rightarrow W = 0,2 \text{ J}$$

$$8. \quad W = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \rightarrow W = 80,9 \text{ GJ}; \quad \lim_{r_2 \rightarrow \infty} W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 r_1}$$