1999 – AI

1.2.0 Gegeben sind nun die reellen Funktionen

$$g_p : x \mapsto g_p(x);\quad D_{g_p} = \mathbb{R}$$

$$g_p(x) = x^3 - p^2 x \quad \text{mit } p \in \mathbb{R}.$$

1.2.1 Untersuchen Sie den Graphen G_{g_p} der Funktion g_p in Bezug auf Symmetrie und bestimmen Sie Anzahl und Lage sämtlicher Nullstellen der Funktion g_p in Abhängigkeit von p. (7 BE)

2000 – AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_k : x \mapsto \frac{x^2}{k} - 2x + k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ D_{f_k} = \mathbb{R}$$

Die Graphen der Funktionen f_k in einem kartesischen Koordinatensystem heißen G_{f_k}.

1.1.1 Zeigen Sie, dass die Scheitelpunkte aller Parabeln G_{f_k} auf der x-Achse liegen. Geben Sie die Wertemenge W_k der Funktion f_k in Abhängigkeit von k an.
(5 BE)

2001 – AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_k : x \mapsto f_k(x);\quad D_{f_k} = \mathbb{R}$$

$$f_k(x) = -\frac{1}{4}(x^3 + k\,x^2 - 2k\,x - 8) \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

Der Graph einer solchen Funktion f_k in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_{f_k}.

1.1.1 Zeigen Sie, dass $x_1 = 2$ für alle Werte von k eine Nullstelle von f_k ist und zerlegen Sie damit den Term $f_k(x)$ in ein Produkt mit genau einem Linearfaktor. (5 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $f_k(x) = -\frac{1}{4}(x^2 + kx + 2x + 4)(x - 2)$)

1.1.2 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion f_k neben $x_1 = 2$ noch mindestens eine weitere Nullstelle besitzt. Achten Sie dabei auch auf die Sonderfälle k = – 6 und k = 2. (9 BE)

1.1.3 Berechnen Sie nun k so, dass die Funktion f_k bei $x_2 = -2$ eine doppelte Nullstelle hat. (3 BE)

2002 – AII

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto f_a(x);\ \ D_{f_a} = \mathbb{R}$ mit

$f_a(x) = \frac{1}{8}(a - x) \cdot \left(x^2 + 4x + 4\right)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie das Intervall, in dem $f_a(x) \geq 0$ ist. (4 BE)

2003 – AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$f_a : x \mapsto f_a(x);\ D_{f_a} = \mathrm{IR}$ mit $\quad f_a(x) = \frac{1}{2a^2}(x^3 - 6ax^2 + 8a^2x)$ mit $a \in \mathrm{IR} \wedge a > 0$.

Der Graph einer solchen Funktion f_a heißt G_{f_a}.

1.1 Begründen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Es gibt unter den Funktionen f_a solche mit genau einer Nullstelle. (4 BE)

2004 – AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot (x^2 + k)$ mit $k \in \mathrm{IR}$ und $D_{f_k} = \mathrm{IR}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Es sei zunächst $k \neq -9$. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die Lage der Nullstellen sowie deren Vielfachheit. Unterscheiden Sie dabei die Fälle k > 0, k = 0 und k < 0. (7 BE)

Für alle folgenden Teilaufgaben ist $k = -9$ und $f_{-9}(x) = \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot (x^2 - 9)$.

1.2 Zeigen Sie, dass f_{-9} eine einfache und eine dreifache Nullstelle besitzt. Geben Sie jeweils auch die Lage dieser Nullstellen an. (3 BE)

2004 – AII

1.0 Gegeben sind die Funktionen $f_a: x \mapsto \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ in der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.2 Weisen Sie nach, dass sich der Funktionsterm $f_a(x)$ auch in der Form $f_a(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x^2-9a)$ schreiben lässt und bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.
Hinweis: Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch. (8 BE)

2005 – AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a: x \mapsto \frac{1}{4a}x^4 - 2x$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $D_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an. (2 BE)

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_a und geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (4 BE)

2007 – AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen
$f_k: x \mapsto \frac{1}{3} \cdot \left(x^3 - 2kx^2 + k^2x\right)$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k \geq 0$ und $D_{f_k} = \mathbb{R}$.
Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (5 BE)

2007 – AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k: x \mapsto \frac{1}{8} \cdot \left(x^2 - k\right)\left(x^2 - 4\right)$ $k \in \mathbb{R}$ und $D_{f_k} = \mathbb{R}$.
Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Begründen Sie folgende Aussage: Für jeden Parameter k mit $k < 0$ schneidet der Graph G_{f_k} die x-Achse zweimal, berührt sie jedoch nicht. (3 BE)

1.2 Untersuchen Sie den Graphen G_{f_k} auf Symmetrie. (2 BE)

1.4 Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den der Graph G_{f_k} die x-Achse an der Stelle $x_1 = 2$ berührt. (3 BE)

2008 – AII

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion

$$f_k : x \mapsto -\frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3 \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \wedge k > 0 \text{ und } D_{f_k} = \mathbb{R}.$$

Der Graph wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion f_k. Untersuchen Sie den Graphen G_{f_k} auf Symmetrie. (5 BE)

2.0 Gegeben ist nun die reelle Funktion $h : x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + x^3$ mit $D_h = \mathbb{R}$. Der Graph dieser Funktion wird G_h genannt.

2.1 Begründen Sie kurz, dass $h(x) = f_2(x)$ gilt und berechnen Sie dann für $k \neq 2$ die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_{f_k} und G_h. (7 BE)

2009 – AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_k : x \mapsto x \cdot \left(\frac{x^2}{k} - k - 1 \right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0 \text{ und } D_{f_k} = \mathbb{R}.$$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (8 BE)

1.3 Bestimmen Sie die Werte von k so, dass der jeweils zugehörige Graph G_{f_k} durch den Punkt $P(-3 \mid 3)$ geht. (4 BE)

2010 – AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen f_a: $x \mapsto -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl, Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a. (5 BE)

1.2 Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P\left(4 \middle| -\frac{1}{2}\right)$ auf dem Graphen der Funktion f_a liegt. (3 BE)

2010 – AII

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion f: $x \mapsto \frac{3}{16}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$ und die reellen Funktionen g_a: $x \mapsto \frac{1}{8}(ax^4 - 4x^3)$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $\mathbb{D}_f = D_{g_a} = \mathbb{R}$. Die Graphen werden mit G_{g_a} bezeichnet.

2.3 Berechnen Sie a so, dass die Graphen G_f und G_{g_a} bei $x = 4$ einen gemeinsamen Punkt besitzen. (2 BE)

Lösungen

1999 – AI

1.2.1 symmetrisch zum Ursprung (nur ungerade Exponenten)
Nullstellen:
$x^3 - p^2x = 0 \Rightarrow x\,(x^2 - p^2) = 0 \Rightarrow x\,(x + p)\,(x - p) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = p;\ x_3 = -p$
Fallunterscheidung:
1) $p = 0$: $x_{1,2,3} = 0$ dreifach
2) $p \neq 0$: $x_1 = 0$; $x_2 = p$; $x_3 = -p$ alle einfach

2000 – AI

1.1.1 $f_k(x) = \frac{1}{k}(x^2 - 2kx + k^2) = \frac{1}{k}(x - k)^2 \Rightarrow S(k|0) \Rightarrow$ liegen alle auf der x-Achse

Fallunterscheidung:

1) $k > 0 \Rightarrow \frac{1}{k} > 0 \Rightarrow$ Parabel ist nach oben geöffnet $\Rightarrow \mathbb{W}_k = \mathbb{R}^+_0$

2) $k < 0 \Rightarrow \frac{1}{k} < 0 \Rightarrow$ Parabel ist nach unten geöffnet $\Rightarrow \mathbb{W}_k = \mathbb{R}^-_0$

2001 – AII

1.1.1 $f_k(2) = -\frac{1}{4}(\,2^3 + k \cdot 2^2 - 2k \cdot 2 - 8) = -\frac{1}{4}(\,8 + 4k - 4k - 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ist Nullstelle

Polynomdivision: $(x^3 + k\,x^2 - 2k\,x - 8):(x - 2) = x^2 + (k + 2)\,x + 4$

$$\begin{array}{l}
-(x^3 - 2x^2) \\
\hline
\quad (k+2)x^2 - 2k\,x \\
-(\,(k+2)x^2 - 2(k+2)\,x) \\
\hline
\qquad\qquad 4x - 8 \\
\qquad\quad -(4x - 8) \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$\Rightarrow -\frac{1}{4}(x^3 + k\,x^2 - 2k\,x - 8) = -\frac{1}{4}(\,x^2 + (k + 2)\,x + 4)(x - 2)$

1.1.2

$x^2 + (k + 2)\,x + 4 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \dfrac{-(k+2) \pm \sqrt{(k+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-k - 2 \pm \sqrt{k^2 + 4k - 12}}{2}$

$\Rightarrow$ noch weitere Nullstellen, wenn $k^2 + 4k - 12 \geq 0$

Gleichung lösen: $k^2 + 4k - 12 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4 \pm 8}{2} \Rightarrow k_1 = -6;\ k_2 = 2$

z. B. mit Hilfe einer Skizze: $k^2 + 4k - 12 > 0$ für $k < -6$ oder $k > 2$

Fallunterscheidung:

1) $k < -6$ oder $k > 2$: zwei weitere (einfache) Nullst. (nämlich $x_{2,3} = \frac{-k-2\pm\sqrt{k^2+4k-12}}{2}$)

2) $k = -6$: $x_{2,3} = 2 = x_1$ ➔ keine weitere Nullstelle (dafür ist die erste Nullstelle dreifach)

3) $k = 2$: $x_{2,3} = -2$ ➔ eine weitere (doppelte) Nullstelle

(4) $-6 < k < 2$: keine weiteren Nullstellen)

1.1.3 aus 1.1.2: $k = 2$

2002 – AII

1.1 $\frac{1}{8}(a-x)(x^2+4x+4) \geq 0$, also $\frac{1}{8}(-x^3+(a-4)x^2+(4a-4)x+4a) \geq 0$

Gleichung lösen: $\frac{1}{8}(a-x)(x^2+4x+4) = 0$ ➔ $\frac{1}{8}(a-x)(x+2)^2 = 0$ ➔ $x_1 = a$; $x_{2,3} = -2$

Fallunterscheidung:

1) $a = -2$ ➔ $x_{1,2,3} = -2$ dreifach; mittels einer Skizze erhält man: $f_a(x) \geq 0$ in $]-\infty;-2]$

2) $a \neq -2$ ➔ $x_1 = a$ einfach; $x_{2,3} = -2$ doppelt; mittels Skizzen (unterscheide dabei noch

$a < -2$ und $a > -2$!) erhält man: $f_a(x) \geq 0$ in $]-\infty;a]$

zusammengefasst gilt also in allen Fällen: $f_a(x) \geq 0$ in $]-\infty;a]$

Anmerkung: Weit schneller geht's so:

$f_a(x) \geq 0$ ➔ $\frac{1}{8}(a-x)(x+2)^2 \geq 0$; da $\frac{1}{8}(x+2)^2$ immer ≥ 0 ist, ist nur die Ungleichung

$a - x \geq 0$ zu lösen; also erhält man sofort $x \leq a$ ➔ $f_a(x) \geq 0$ in $]-\infty;a]$

2003 – AII

1.1 Nullstellen: $\frac{1}{2a^2}(x^3 - 6ax^2 + 8a^2x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6ax + 8a^2) = 0$ (da $\frac{1}{2a^2} \neq 0$)

$\Rightarrow x_1 = 0$ oder $x^2 - 6ax + 8a^2 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{6a \pm \sqrt{(6a)^2 - 4\cdot 1\cdot 8a^2}}{2\cdot 1} = \frac{6a \pm 2a}{2}$

$\Rightarrow x_2 = 4a;\quad x_3 = 2a$

Da $a > 0$ ist, sind alle drei Nullstellen immer unterschiedlich $\Rightarrow$ Behauptung ist falsch.

2004 – AI

1.1 $\frac{1}{27}(x+3)^2\cdot(x^2+k) = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 0$ oder $x^2 + k = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -3$ oder $x^2 = -k$

Fallunterscheidung:

1) $k > 0$: $x_{1,2} = -3$ doppelt; keine weiteren Nullstellen

2) $k = 0$: $x_{1,2} = -3$ doppelt; $x_{3,4} = 0$ doppelt

3) $k < 0$: $x_{1,2} = -3$ doppelt; $x_{3,4} = \pm\sqrt{-k}$ beide einfach

1.2 mit 1.1: $x_{1,2} = -3$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{-(-9)} = \pm 3 \Rightarrow x_{1,2,4} = -3$ dreifach; $x_3 = +3$ einfach

2004 – AII

1.2 $f_a(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x^2-9a) = \frac{1}{9}(x^3 - 9ax - 3x^2 + 27a) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$

$\frac{1}{9}(x-3)(x^2-9a) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0$ oder $x^2 - 9a = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ oder $x^2 = 9a$

Fallunterscheidung:

1) $a < 0$: $x_1 = 3$ einfach; keine weiteren Nullstellen

2) $a > 0$ und $a \neq 1$: $x_1 = 3$ einfach; $x_{2,3} = \pm\sqrt{9a}$ beide einfach

3) $a = 1$: $x_{1,2} = 3$ doppelt; $x_3 = -3$ einfach

Beachte: Der Fall a = 0 ist in der Angabe ausgeschlossen!

2005 – AII

1.1 $f_a(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ *(da Grad gerade und $\frac{1}{4a} > 0$, weil laut Angabe $a > 0$)*

1.2 $\frac{1}{4a}x^4 - 2x = 0$ ➔ $\frac{1}{4a}x\,(x^3 - 8a) = 0$ ➔ $x_1 = 0$ einfach oder $x^3 - 8a = 0$

➔ $x_2 = \sqrt[3]{8a} = 2\sqrt[3]{a}$ einfach *(nicht dreifach!!!)*

2007 – AI

1.1 $\frac{1}{3}(x^3 - 2kx^2 + k^2x) = 0$ ➔ $x\,(x^2 - 2kx + k^2) = 0$ ➔ $x\,(x - k)^2 = 0$ ➔ $x_1 = 0$; $x_{2,3} = k$

Fallunterscheidung:

1) $k = 0$: $x_{1,2,3} = 0$ dreifach 2) $k \neq 0$: $x_1 = 0$ einfach; $x_{2,3} = k$ doppelt

2007 – AII

1.1 $\frac{1}{8}\cdot(x^2 - k)\,(x^2 - 4) = 0$ ➔ $x^2 - k = 0$ oder $x^2 - 4 = 0$ ➔ $x^2 = k$ oder $x^2 = 4$

für $k < 0$ hat $x^2 = k$ keine Lösung ➔ Nullstellen sind nur $x_{1,2} = \pm 2$ beide einfach

➔ Graph schneidet die x-Achse zweimal, berührt sie aber nirgends.

1.2 ausmultiplizieren: $f_k(x) = \frac{1}{8}(x^4 - (k + 4)x^2 + 4k)$

nur gerade Exponenten für alle k ➔ symmetrisch zur y-Achse

oder: $f_k(-x) = \frac{1}{8}\cdot(\,(-x)^2 - k)\,(\,(-x)^2 - 4) = \frac{1}{8}\cdot(x^2 - k)\,(x^2 - 4) = f_k(x)$ ➔ symmetrisch zur y-Achse

1.4 $x_1 = 2$ muss doppelte Nullstelle sein; einfache Nullstelle ist sie sowieso schon (siehe 1.1) ➔ $x^2 = k$ muss nochmals eine einfache Nullstelle bei 2 liefern ➔ $2^2 = k$ ➔ $k = 4$

2008 – AII

1.1 $-\frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3 = 0 \Rightarrow -\frac{k^2}{16}x^3 \cdot \left(x - \frac{8}{k}\right) = 0 \Rightarrow x_{1,2,3} = 0$ dreifach; $x_4 = \frac{8}{k}$

(Anmerkung: die Nullstellen sind für alle k unterschiedlich)
keine Symmetrie zum KS für alle k > 0 (gerade und ungerade Exponenten)

2.1 $f_2(x) = -\frac{2^2}{16}x^4 + \frac{2}{2}x^3 = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 = h(x)$

Schnitt: $-\frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3 = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \Rightarrow \left(-\frac{k^2}{16}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \left(\frac{k}{2}-1\right)x^3 = 0$

$\Rightarrow x^3 \cdot \left(\left(-\frac{k^2}{16}+\frac{1}{4}\right)x + \frac{k}{2} - 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1,2,3} = 0$ oder $\left(\left(-\frac{k^2}{16}+\frac{1}{4}\right)x + \frac{k}{2} - 1\right) = 0$

$\Rightarrow \left(-\frac{k^2}{16}+\frac{1}{4}\right) x = -\left(\frac{k}{2}-1\right) \mid \cdot(-16) \Rightarrow (k^2 - 4)\, x = 8k - 16 \Rightarrow x_4 = \frac{8k-16}{k^2-4} = \frac{8}{k+2}$

(da $k \neq 2$, also $k^2 - 4 \neq 0$)

2009 – AII

1.1 $x \cdot \left(\frac{x^2}{k} - k - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ oder $\frac{x^2}{k} - k - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = k\,(k + 1)$

Diese Gleichung hat nur Lösungen für $k\,(k + 1) = k^2 + k \geq 0$

Gleichung lösen: $k\,(k + 1) = 0 \Rightarrow k_1 = -1$ (; $k_2 = 0$ ausgeschlossen in Angabe)

z. B. mit Hilfe einer Skizze folgt: $k\,(k + 1) > 0$ für $k < -1$ oder $k > 0$

Fallunterscheidung: *(Anmerkung: Der Fall k = 0 ist in der Angabe ausgeschlossen!)*

1) $k < -1$ oder $k > 0$: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{k(k+1)}$ alle einfach

2) $k = -1$: $x_{1,2,3} = 0$ dreifach

3) $-1 < k < 0$: $x_1 = 0$ einfach; keine weiteren Nullstellen

1.3 P einsetzen: $3 = -3 \cdot \left(\frac{(-3)^2}{k} - k - 1\right) \Rightarrow -1 = \frac{9}{k} - k - 1 \Rightarrow \frac{9}{k} - k = 0 \Rightarrow \frac{9}{k} = k$

$\Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3$

2010 – AI

1.1 $-\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = a;\ x_{3,4} = 5$

Fallunterscheidung:

1) $a = 0$: $x_{1,2} = 0;\ x_{3,4} = 5$ zwei doppelte Nullstellen

2) $a = 5$: $x_1 = 0;\ x_{2,3,4} = 5$ zwei Nullstellen: eine einfach, eine dreifach

3) $a \neq 0$ und $a \neq 5$: $x_1 = 0;\ x_2 = a;\ x_{3,4} = 5$ drei Nullstellen: zwei einfach, eine doppelt

1.2 P einsetzen: $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{8}\cdot 4\cdot(4-a)\cdot(4-5)^2 \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cdot(4-a)\cdot(-1)^2 \Rightarrow 1 = 4 - a$

$\Rightarrow a = 3$

2010 – AII

2.3 $f(4) = g_a(4) \Rightarrow \frac{3}{16}(4^3 - 7\cdot 4^2 + 8\cdot 4 + 16) = \frac{1}{8}(a\cdot 4^4 - 4\cdot 4^3) \Rightarrow 0 = \frac{1}{8}(256a - 256)$

$\Rightarrow a = 1$