Untersuchen Sie die jeweilige Funktionenschar (wird der Einfachheit immer mit f_a bezeichnet und durch ihren Funktionsterm gegeben; die Formvariable wurde immer a genannt.) auf:

a) Symmetrie zum KS
b) Verhalten für $x \to \pm\infty$
c) Nullstellen, und deren Vielfachheit

und skizzieren Sie den Graph der Funktion ohne Formvariable.

Nr.	ohne Formvariable — Funktionsterm	mit Formvariable	Jahrgang
1	$\frac{1}{8}(x-4)^2(x+2)$	$\frac{1}{8}(x-4)^2(x+a)$; $a \in \mathbb{R}$	1998 – AI
2	$\frac{1}{9}x^4-2x^2+9$	$\frac{1}{9}(x^4-ax^2-9x^2+9a)$; $a \in \mathbb{R}$	1998 – AII
3	$\frac{1}{9}(-x^4+4x^3)$	$\frac{a}{27}(-x^4+4x^3)$; $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	1997 – AI
4	$\frac{1}{3}(x^3-3x^2-9x+2)$	$\cancel{\frac{1}{3}x^3-x^2-ax+\frac{2}{3};\ a \in \mathbb{R}}$	1997 – AII
5	$\frac{4}{3}(-x^3-3x^2+2)$	$\frac{1}{3}(-4x^3-6ax^2+a^3)$; $a \in \mathbb{R}$; $x_1 = -\frac{1}{2}a$	1996 – AI
6	$-\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{3}x^2$	$-\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{3}ax^2$; $a \in \mathbb{R}$	1996 – AII
7	$\frac{1}{3}x^3-x-\frac{2}{3}$	$\cancel{\frac{1}{a}(x^3-12x+16)+3x-6;\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}}$	1995 – AI
8	$\frac{1}{4}(x^3-12x^2+36x)$	$\frac{1}{4}(x^3-6ax^2+9a^2x)$; $a \in \mathbb{R}$	1995 – AII
9	$\frac{1}{6}(-x^3+12x+16)$	$\cancel{-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}ax+\frac{8}{3};\ a \in \mathbb{R}}$	1994 – AI
10	$\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$		1994 – AII
11	$-\frac{1}{4}x^4+x^3$		1993 – AI
12	$\frac{3}{16}x^3-\frac{9}{4}x+3$	$\frac{3}{16}x^3-\frac{9}{4}x+a$; $a \in \mathbb{R}$ (Nullstellen nur für a = 0, a = 3, a = –3!)	1993 – AII
13	$\frac{1}{4}x^3-3x+4$	$\cancel{a^2x^3-3x+4;\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}}$	1992 – AI
14	$-\frac{1}{15}(x^4-8x^3+18x^2-75)$	Nullstellen nicht berechnen !!!	1992 – AII
15	$-\frac{1}{12}(x^3-27x+54)$		1991 – AI
16	$\frac{1}{12}x^3-\frac{3}{4}x^2+9$		1991 – AII

Lösungen

(zu den Aufgaben mit Formvariable)

1) (1998 – AI)

Beachte: Für (a) und (b) muss man den Term erst ausmultiplizieren!!!

$f_a(x) = ... = \frac{1}{8}x^3 + \left(\frac{1}{8}a - 1\right)x^2 + (2 - a)x + 2a$

a) keine Symmetrie zum KS (gerade und ungerade Exponenten für alle a)

(für a = 0 verschwindet zwar der Summand mit x^0, aber der Summand mit x^2 ist immer noch da; für a = 8 verschwindet zwar der Summand mit x^2, aber der Summand mit x^0 ist immer noch da; für a = 1 verschwindet zwar der Summand mit x^1, aber der Summand mit x^3 ist immer noch da)

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$ *(Der Graph verläuft von links unten nach rechts oben.)*

c) $\frac{1}{8}(x-4)^2(x+a) = 0$ ➔ $x_{1,2} = 4$; $x_3 = -a$

Es tritt kein a unter einer Wurzel / im Nenner eines Bruchs auf, alle Nullstellen existieren also für alle $a \in R$. Es können aber Nullstellen zusammen fallen, nämlich genau dann, wenn 4 = –a ist.

Fallunterscheidung:

1) a = –4: $x_{1,2,3} = 4$ dreifach

2) $a \neq -4$: $x_{1,2} = 4$ doppelt; $x_3 = -a$ einfach

2) (1998 – AII)

Es empfiehlt sich (vor allem für (c)), die beiden Summanden mit x^2 zusammen zu fassen:

$f_a(x) = \frac{1}{9}(x^4 - (a+9)x^2 + 9a)$

a) symmetrisch zur y-Achse (nur gerade Exponenten für alle a)

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$ *(Der Graph verläuft von links oben nach rechts oben.)*

c) $\frac{1}{9}(x^4 - (a+9)x^2 + 9a) = 0$ ➔ $x^4 - (a + 9)x^2 + 9a = 0$

Substitution: $u = x^2$ ➔ $u^2 - (a + 9)u + 9a = 0$

$$u_{1,2} = \frac{(a+9) \pm \sqrt{(-(a+9))^2 - 4\cdot 1\cdot 9a}}{2\cdot 1} = \frac{a+9 \pm \sqrt{(a+9)^2 - 36a}}{2} = \frac{a+9 \pm \sqrt{a^2 - 18a + 81}}{2}$$

$$= \frac{a+9 \pm \sqrt{(a-9)^2}}{2} = \frac{a+9 \pm (a-9)}{2}$$ ➔ $u_1 = a$; $u_2 = 9$ (beide einfach)

Resubstitution: $x^2 = u$ 1) $x^2 = a$ ➔ $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$ 2) $x^2 = 9$ ➔ $x_{3,4} = \pm 3$

Das a steht unter einer Wurzel, die Nullstellen $x_{1,2}$ existieren also nicht immer. Außerdem können Nullstellen zusammen fallen, nämlich genau dann, wenn $\sqrt{a}$ = 3 ist.

Fallunterscheidung:

1) a < 0: $x_{1,2}$ existieren nicht; $x_{3,4} = \pm 3$ beide einfach

2) a = 0: $x_{1,2} = 0$ doppelt; $x_{3,4} = \pm 3$ beide einfach

3) a > 0, aber $\neq 9$: $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$; $x_{3,4} = \pm 3$ alle einfach

4) a = 9: $x_{1,3} = 3$; $x_{2,4} = -3$ beide doppelt

3) (1997 – AI)
a) keine Symmetrie zum KS (gerade und ungerade Exponenten für alle a)
b) Es empfiehlt sich, erst die Klammer aufzulösen: $f_a(x) = -\frac{a}{27}x^4 + \frac{4a}{27}x^3$.
➔ *Der Leitkoeffizient hängt von a ab! Beachte: Der Fall a = 0 ist in der Angabe ausgeschlossen!*
Fallunterscheidung:
1) $-\frac{a}{27} > 0$, also a < 0: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$ *(Der Graph verläuft von links oben nach rechts oben.)*
2) $-\frac{a}{27} < 0$, also a > 0: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = -\infty$ *(Der Graph verläuft von links oben nach rechts oben.)*
c) $\frac{a}{27}(-x^4 + 4x^3) = 0$ ➔ $-x^4 + 4x^3 = 0$ *(da laut Angabe $a \neq 0$!)*
➔ $-x^3 \cdot (x-4) = 0$ ➔ $x_{1,2,3} = 0$ dreifach; $x_4 = 4$ einfach

5) (1996 – AI)
a) *Manche der Summanden können wegfallen, je nachdem wie man a wählt!*
Fallunterscheidung:
1) a = 0: symmetrisch zum Ursprung (nur der Summand mit x^3 bleibt übrig)
2) $a \neq 0$: keine Symmetrie zum KS (gerade und ungerade Exponenten)
b) Es empfiehlt sich, erst die Klammer aufzulösen: $f_a(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 2ax^2 + \frac{1}{3}a^3)$.
➔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = -\infty$ *(Der Graph verläuft von links oben nach rechts unten.)*
c) $\frac{1}{3}(-4x^3 - 6ax^2 + a^3) = 0$ ➔ $4x^3 + 6ax^2 - a^3 = 0$
eine Nullstelle ist vorgegeben: $x_1 = -\frac{1}{2}a$
Polynomdivision: $(4x^3 + 6ax^2 + 0x - a^3) : (x + 0{,}5a) = 4x^2 + 4ax - 2a^2$

$$
\begin{array}{l}
-(4x^3 + 2ax^2) \\
\text{------------------} \\
\quad 4ax^2 + 0x \\
\quad -(4ax^2 + 2a^2x) \\
\quad \text{------------------} \\
\qquad -2a^2x - a^3 \\
\qquad -(-2a^2x - a^3) \\
\qquad \text{------------------} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

➔ $4x^2 + 4ax - 2a^2 = 0$ ➔ $x_{2,3} = \frac{-4a \pm \sqrt{(4a)^2 - 4\cdot 4\cdot(-2a^2)}}{2\cdot 4}$ *(Klammern nicht vergessen!)*
$= \frac{-4a \pm \sqrt{48a^2}}{8} = \frac{-4a \pm 4a\sqrt{3}}{8} = \frac{4a(-1 \pm \sqrt{3})}{8} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})\,a$
Es tritt kein a unter einer Wurzel / im Nenner eines Bruchs auf, alle Nullstellen existieren also für alle $a \in \mathbb{R}$. Es können aber Nullstellen zusammen fallen!
Fallunterscheidung:
1) a = 0: $x_{1,2,3} = 0$ dreifach
2) $a \neq 0$: $x_1 = -\frac{1}{2}a$; $x_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})\,a$ alle einfach

6) (1996 – AI)

a) *Manche der Summanden können wegfallen, je nachdem wie man a wählt!*
Fallunterscheidung:
1) $a = 0$: symmetrisch zum Ursprung (nur der Summand mit x^3 bleibt übrig)
2) $a \neq 0$: keine Symmetrie zum KS (gerade und ungerade Exponenten)

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = -\infty$ *(Der Graph verläuft von links oben nach rechts unten.)*

c) $-\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}ax^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{9}x^2 \cdot (x-6a) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0;\ x_3 = 6a$

Es tritt kein a unter einer Wurzel / im Nenner eines Bruchs auf, alle Nullstellen existieren also für alle $a \in R$. Es können aber Nullstellen zusammen fallen, nämlich wenn 0 = 6a ist!
Fallunterscheidung:
1) $a = 0$: $x_{1,2,3} = 0$ dreifach   2) $a \neq 0$: $x_{1,2} = 0$ doppelt; $x_3 = 6a$ einfach

8) (1995 – AII)

a) *Manche der Summanden können wegfallen, je nachdem wie man a wählt!*
Fallunterscheidung:
1) $a = 0$: symmetrisch zum Ursprung (nur der Summand mit x^3 bleibt übrig)
2) $a \neq 0$: keine Symmetrie zum KS (gerade und ungerade Exponenten)

b) Es empfiehlt sich, erst die Klammer aufzulösen: $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \frac{9}{4}a^2x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$ *(Der Graph verläuft von links unten nach rechts oben.)*

c) $\frac{1}{4}(x^3 - 6ax^2 + 9a^2x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x \cdot (x^2 - 6ax + 9a^2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x(x-3a)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_{2,3} = 3a$

Es tritt kein a unter einer Wurzel / im Nenner eines Bruchs auf, alle Nullstellen existieren also für alle $a \in R$. Es können aber Nullstellen zusammen fallen, nämlich wenn 0 = 3a ist!
Fallunterscheidung:
1) $a = 0$: $x_{1,2,3} = 0$ dreifach   2) $a \neq 0$: $x_1 = 0$ einfach; $x_{2,3} = 3a$ doppelt

12) (1993 – AII)

a) *Manche der Summanden können wegfallen, je nachdem wie man a wählt!*
Fallunterscheidung:
1) $a = 0$: symmetrisch zum Ursprung (nur der Summand mit x^3 bleibt übrig)
2) $a \neq 0$: keine Symmetrie zum KS (gerade und ungerade Exponenten)

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \infty$ *(Der Graph verläuft von links oben nach rechts unten.)*

c) $\frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + a = 0$ *Mit Schulmitteln ist diese Gleichung nicht lösbar – man braucht dafür die "Cardanischen Formeln"! Deshalb, wie in der Angabe verlangt, nur drei Spezialfälle:*

1) $a = 0$: $\frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x = 0 \ \Big|\cdot\frac{16}{3} \Rightarrow x^3 - 12x = 0 \Rightarrow x\cdot(x^2 - 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm\sqrt{12}$

2) $a = 3$: $\frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3 = 0 \ \Big|\cdot\frac{16}{3} \Rightarrow x^3 - 12x + 16 = 0$; durch Probieren: $x_1 = 2$; Polynomdivision:
$(x^3 - 12x + 16):(x-2) = x^2 + 2x - 8$; $x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 = x_1$ doppelt; $x_3 = -4$ einfach

3) $a = -3$: $\frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x - 3 = 0$;   ähnlich wie in (2): $x_{1,2} = -2$ doppelt; $x_3 = 4$ einfach