

Äquivalenzumformungen von Termen und Gleichungen

Zwei Terme sind äquivalent, wenn sie für jede mögliche Einsetzung denselben Wert liefern. Äquivalenzumformungen von Termen sehen folgendermaßen aus:

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \dots$$

Mögliche Äquivalenzumformungen sind:

- Terme mit den K-, A- und D-Gesetzen zusammen fassen:
 - Produkte zusammen fassen
 - Summen/Differenzen zusammen fassen
 - Klammern auflösen
 - Summen / Differenzen miteinander multiplizieren
 - ausklammern (zum Faktorisieren)
- speziell:
 - binomische Formeln anwenden (vorwärts zum Klammern auflösen oder rückwärts zum Faktorisieren)
 - Potenzgesetze anwenden
- Brüche erweitern oder kürzen
- durch eine Fallunterscheidung einen Betragsterm in zwei Terme aufteilen
- Wurzeln von Quadraten ziehen (dabei beachten, dass $\sqrt{a^2} = |a|$ gilt!) oder Quadrate von Wurzeln nehmen; auch bei allgemeineren Wurzeln ähnlich möglich
- Polynomdivision ausführen
- quadratischen Term mit Hilfe der Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung faktorisieren (geht ähnlich auch mit allgemeineren Polynomen)
- (Logarithmengesetze benutzen)

bei Ungleichungen ist zusätzlich zu Gleichungen zu beachten:

Wird mit einer negativen Zahl multipliziert / dadurch dividiert, so dreht sich die Richtung um.

bei Gleichungssystemen sind zusätzlich mögliche Äquivalenzumformungen:
eine Gleichung durch die Summe aus dieser und einer anderen ersetzen;
eine Gleichung mit einer anderen gleich setzen oder darin einsetzen

Zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge haben. Äquivalenzumformungen von Gleichungen sehen folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{l|l} T_1 = T_2 & | \dots \\ T_3 = T_4 & | \dots \\ T_3 = T_4 & | \dots \end{array}$$

.....

Mögliche Äquivalenzumformungen sind:

- Terme auf einer oder beiden Seiten in äquivalente Terme umformen (siehe links!)
- eine Gleichung durch Anwenden des Satzes vom Nullprodukt in mehrere Gleichungen aufteilen
- (durch eine Fallunterscheidung eine Betragsgleichung in zwei Gleichungen aufteilen)

alle folgenden Umformungen müssen immer auf beiden Seiten gleichzeitig durchgeführt werden:

- eine beliebige Zahl oder einen beliebigen Term addieren oder subtrahieren
- mit einer beliebigen Zahl ungleich Null oder einem beliebigen Term, der nicht gleich Null sein kann, multiplizieren oder dadurch teilen – dabei D-Gesetz beachten! Insbesondere bei Bruchgleichungen: mit dem Hauptnenner multiplizieren.
- substituieren – Resubstitution nicht vergessen!
- den Kehrwert nehmen (geht nur, wenn auf beiden Seiten etwas steht, das sicher ungleich Null ist!)
- die Wurzel ziehen (dabei beachten, dass $\sqrt{a^2} = |a|$ gilt!)
- quadrieren (Vorsicht – ist im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung! am Schluss also Probe nötig!); ähnlich auch potenzieren mit beliebigem Exponenten möglich
- (mit beliebiger Basis exponieren)
- (mit beliebiger Basis logarithmieren (geht nur, wenn auf beiden Seiten etwas steht, das sicher positiv ist!))
- (trigonometrische Funktionen oder deren Umkehrfunktionen anwenden)